

唐山市 2023 年普通高等学校招生统一考试第三次模拟演练

数 学

注意事项:

- 1、答卷前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上.
- 2、回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其它答案标号.回答非选择题时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效.
- 3、考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{x | x < -1 \text{ 或 } x > 1\}$, $B = \{x | -3 < x < 2\}$, 则 $A \cap B =$
 - A. $(1, 2)$
 - B. $(-3, -1)$
 - C. $(-3, 1)$
 - D. $(-3, -1) \cup (1, 2)$
2. 已知 i 为虚数单位, 复数 $z = 1 - \sqrt{3}i$, 则 $\frac{4}{z} =$
 - A. $1 - \sqrt{3}i$
 - B. $1 + \sqrt{3}i$
 - C. $-1 - \sqrt{3}i$
 - D. $-1 + \sqrt{3}i$
3. $(\sqrt{x} - \frac{1}{x})^6$ 的展开式中的常数项为
 - A. -20
 - B. -15
 - C. 15
 - D. 20
4. 正方形 $ABCD$ 边长为 4, M 为 CD 中点, 点 N 在 AD 上, $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BN} = 20$, 则 $|\overrightarrow{BN}| =$
 - A. $\sqrt{5}$
 - B. $2\sqrt{5}$
 - C. 5
 - D. 10
5. 把边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形 $ABCD$ 沿对角线 AC 折成直二面角 $D-AC-B$, 则三棱锥 $D-ABC$ 的外接球的球心到平面 BCD 的距离为
 - A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$
 - B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
 - C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$
 - D. $\frac{1}{2}$
6. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的两个焦点分别为 F_1, F_2 , 点 M 为 C 上异于长轴端点的任意一点, $\angle F_1MF_2$ 的角平分线交线段 F_1F_2 于点 N , 则 $\frac{|MF_1|}{|F_2N|} =$
 - A. $\frac{1}{5}$
 - B. $\frac{\sqrt{10}}{5}$
 - C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
 - D. $\sqrt{2}$

7. 假设有两箱零件，第一箱内装有 5 件，其中有 2 件次品；第二箱内装有 10 件，其中有 3 件次品。现从两箱中随机挑选 1 箱，然后从该箱中随机取 1 个零件，若取到的是次品，则这件次品是从第一箱中取出的概率为

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{3}{7}$
C. $\frac{7}{20}$ D. $\frac{4}{7}$

8. 已知 $3^m = e$ 且 $a = \cos m$, $b = 1 - \frac{1}{2}m^2$, $c = \frac{\sin m}{m}$, e 是自然对数的底数，则

- A. $a > b > c$ B. $c > a > b$
C. $c > b > a$ D. $b > a > c$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分。

9. 为了得到函数 $y = \cos(2x - \frac{\pi}{3})$ 的图象，只需把余弦曲线 $y = \cos x$ 上所有的点

- A. 横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向右平移 $\frac{\pi}{3}$
B. 横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向右平移 $\frac{\pi}{6}$
C. 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ ，再把得到的曲线上各点横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍，纵坐标不变
D. 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ ，再把得到的曲线上各点横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍，纵坐标不变

10. 已知 m, n 为异面直线， $m \perp$ 平面 α , $n \perp$ 平面 β , l 是空间任意一条直线，以下说法正确的有

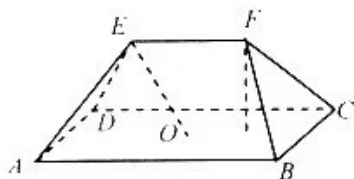
- A. 平面 α 与 β 必相交 B. 若 $l \perp m$, 则 $l \parallel \alpha$
C. 若 l 与 n 所成的角为 30° , 则 l 与平面 β 所成的角为 60°
D. 若 m 与 n 所成的角为 30° , 则平面 α 与 β 的夹角为 60°

11. 函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 \mathbf{R} , 若 $f(x)$ 为奇函数, 且 $f(x+2) = f(x)$, 则

- A. $f'(x)$ 为偶函数 B. $f'(0) = 0$
C. $f(x)$ 的图象关于 $(1, 0)$ 对称 D. 若 $F(x) = f(x) + xf'(x)$, 则 $F'(x)$ 为奇函数

12. 《九章算术》是我国古代的数学名著，书中提到底面为长方形的屋状的楔体(图示的五面体 $EF-ABCD$)。底面长方形 $ABCD$ 中 $BC=3$, $AB=4$, 上棱长 $EF=2$, 且 $EF \parallel$ 平面 $ABCD$, 高(即 EF 到平面 $ABCD$ 的距离)为 1, O 是底面的中心，则

- A. $EO \parallel$ 平面 BCF
B. 五面体 $EF-ABCD$ 的体积为 5
C. 四边形 $ABFE$ 与四边形 $CDEF$ 的面积和为定值 $3\sqrt{13}$
D. $\triangle ADE$ 与 $\triangle BCF$ 的面积和的最小值为 $3\sqrt{2}$



三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 设 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和， $a_1 = \frac{1}{2}$ ， $a_3^2 = a_6$ ，则 $S_3 =$ _____.

14. 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F ，过 F 且斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点，则 $\triangle AOB$ 的面积为_____.来源：高三答案公众号

15. 已知曲线 $y = \ln x$ 与 $y = ax^2 (a > 0)$ 有公共切线，则实数 a 的取值范围为_____.

16. 数字波是由 0 和 1 组成的脉冲信号序列，某类信号序列包含有 n 个数字 0 和 n 个数字 1，且每个数字 0 之前 1 的个数多于 0 的个数. 当 n 等于 3 时，这样的信号序列有_____种；当 n 等于 5 时，这样的信号序列有_____种.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤

17. (10 分)

设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和， $a_n > 0$ ， $a_n^2 + 2a_n + 1 = 4S_n$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

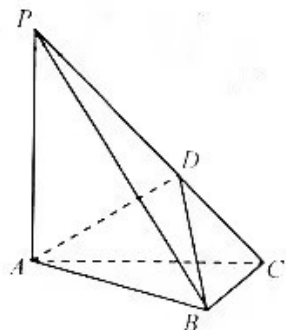
(2) 求数列 $\left\{(-1)^n \left(\frac{4n}{a_n a_{n+1}}\right)\right\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. (12 分)

如图所示，在三棱锥 $P-ABC$ 中，已知 $PA \perp$ 平面 ABC ，平面 $PAB \perp$ 平面 PBC ，点 D 为线段 PC 上一点，且 $PD = 2DC$.

(1) 证明： $BC \perp$ 平面 PAB ；

(2) 若 $AB = 6$ ， $BC = 3$ ，且三棱锥 $P-ABC$ 的体积为 18，求平面 ABD 与平面 ACD 的夹角的余弦值.



19. (12 分)

记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，已知 A 为钝角， $a \sin B = b \cos B$.

(1) 若 $C = \frac{\pi}{6}$ ，求 A ；

(2) 求 $\cos A + \cos B + \cos C$ 的取值范围.

20. (12分)

据统计,某城市居民年收入(所有居民在一年内收入的总和,单位:亿元)与某类商品销售额(单位:亿元)的10年数据如下表所示:

第 <i>n</i> 年	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
居民年收入 <i>x</i>	32.2	31.1	32.9	35.7	37.1	38.0	39.0	43.0	44.6	46.0
商品销售额 <i>y</i>	25.0	30.0	34.0	37.0	39.0	41.0	42.0	44.0	48.0	51.0

依据表格数据,得到下面一些统计量的值.

$\sum_{i=1}^{10} x_i$	$\sum_{i=1}^{10} y_i$	$\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2$	$\sum_{i=1}^{10} (y_i - \bar{y})^2$	$\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
379.6	391	247.624	568.9	<i>m</i>

(1) 根据表中数据,得到样本相关系数 $r \approx 0.95$. 以此推断, y 与 x 的线性相关程度是否很强?

(2) 根据统计量的值与样本相关系数 $r \approx 0.95$, 建立 y 关于 x 的经验回归方程(系数精确到 0.01);

(3) 根据(2)的经验回归方程,计算第1个样本点(32.2, 25.0)对应的残差(精确到 0.01); 并判断若剔除这个样本点再进行回归分析, \hat{b} 的值将变大还是变小?(不必说明理由,直接判断即可).

附: 样本 (x_i, y_i) ($i=1, 2, \dots, n$) 的相关系数 $r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$,

$$\sqrt{2.297} \approx 1.516, \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}.$$

21. (12分)

已知双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1$ ($a > 0$), 左、右顶点分别为 A_1, A_2 , 经过右焦点 F 垂直于 x 轴的直线与 E 相交于 A, B 两点, 且 $|AB| = 1$.

(1) 求 E 的方程;

(2) 若直线 $l: y = kx + m$ 与圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 相切, 且与双曲线左、右两支分别交于 P_1, P_2 两点, 记直线 P_1A_1 的斜率为 k_1, P_2A_2 的斜率为 k_2 , 那么 $k_1 \cdot k_2$ 是否为定值? 并说明理由.

22. (12分)

已知函数 $f(x) = e^{2x} + (2-a)e^x - ax + \frac{ae}{2}$, ($a \in \mathbf{R}$)

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x) \geq 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

高三数学试卷 第4页(共4页)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线