# 攀枝花市 2023 届高三第三次统一考试数学（理科）

## 参考答案

**一、选择题：（每小题 5 分，共 60 分）**

（1~5）CBDBD　（6~10）CABCA　（11~12）CA

**二、填空题：（每小题 5 分，共 20 分）**

13、$\underline{2}$　14、$\underline{-3}$　15、$\underline{\dfrac{69\pi}{5}}$　16、$\underline{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

**三、解答题：（本大题共 6 小题，共 70 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.）**

17、（本小题满分 12 分）

解：（1）由已知得：$\overline{x}=10\times0.015\times10+20\times0.040\times10+30\times0.025\times10+40\times0.020\times10=25$. ………3 分

因为 $0.15+0.4>0.5$，所以中位数在第二组，设中位数为 $x$

则 $0.015\times10+0.04\times(x-15)=0.5$，解得 $x=23.75$. ………………5 分

（2）因为购买一件产品，其质量指标值位于 $[15,25)$ 内的概率为 $0.4$，

所以 $X\sim B(3,0.4)$，且 $X=0,1,2,3$. ………………7 分

$P(X=0)=(1-0.4)^3=0.216$，

$P(X=1)=C_3^1\times0.4\times(1-0.4)^2=0.432$，

$P(X=2)=C_3^2\times0.4^2\times(1-0.4)=0.288$，

$P(X=3)=0.4^3=0.064$，

所以 $X$ 的分布列为

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | 0.512 | 0.384 | 0.096 | 0.008 |

………………11 分（**每个正确得 1 分**）

$\therefore E(X)=3\times0.4=1.2$. ………………12 分

18、（本小题满分 12 分）

（1）解：由条件①得，因为 $S_1$，$S_2$，$S_4$ 成等比数列，则 $S_2^2=S_1S_4$，………………1 分

即 $(2a_1+d)^2=a_1(4a_1+6d)$，又 $d\neq0$，则 $d=2a_1$，………………2 分

由条件②得 $S_4=4a_1+6d=32$，即 $2a_1+3d=16$，………………3 分

由条件③得 $S_6=3(a_6+2)$，可得 $6a_1+15d=3(a_1+5d+2)$，即 $a_1=2$. ………………4 分

若选①②，则有 $\begin{cases}d=2a_1\\2a_1+3d=16\end{cases}$，可得 $\begin{cases}a_1=2\\d=4\end{cases}$，则 $a_n=a_1+(n-1)d=4n-2$；………………6 分

若选①③，则 $d=2a_1=4$，则 $a_n=a_1+(n-1)d=4n-2$；………………6 分

若选②③，则 $2a_1+3d=4+3d=16$，可得 $d=4$，所以 $a_n=a_1+(n-1)d=4n-2$. ………………6 分

（2）证明：由 $b_n-b_{n-1}=2a_n=8n-4(n\geq2)$，且 $b_1=3$，

当 $n\geq2$ 时，则有 $b_n=b_1+(b_2-b_1)+(b_3-b_2)+\cdots+(b_n-b_{n-1})=3+12+20+\cdots+(8n-4)$

$$=3+\frac{(8n-4+12)(n-1)}{2}=4n^2-1 \text{………………8 分}$$

又 $b_1=3$ 也满足 $b_n=4n^2-1$，故对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，有 $b_n=4n^2-1$，………………9 分

则 $\frac{1}{b_n}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$，…………………10 分

所以 $T_n=\frac{1}{2}[(1-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\cdots+(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})]=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})<\frac{1}{2}$，…………………11 分

由于 $T_n=\frac{n}{2n+1}$ 单调递增，所以 $T_n \ge T_1=\frac{1}{3}$，

综上：$\frac{1}{3}\le T_n<\frac{1}{2}$．…………………12 分

19、（本小题满分 12 分）

解:（1）由题意得到 $AB=BD=1$，$AD=\sqrt{2}$，所以 $AD^2=AB^2+BD^2$．…………………2 分

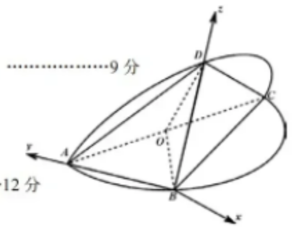
由勾股定理的逆定理，得到 $AB\perp BD$．…………………3 分

$\angle ABC$ 为直径所对的圆周角，所以 $AB\perp BC$．…………………5 分

又∵ $BD\cap BC=B$　　∴ $AB\perp$ 平面 $BCD$．…………………6 分

（2）由（1）同理可得 $DC\perp$ 平面 $ABD$．…………………7 分

以点 $B$ 为坐标原点，平行于 $DC$ 的直线为 $x$ 轴，$BA$ 为 $y$ 轴，$BD$ 为 $z$ 轴建立空间直角坐标系，$A(0,1,0)$，$D(0,0,1)$，$C(\sqrt{2},0,1)$，$O(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$；




设平面 $BOD$ 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，由 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BO}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0\end{cases}\Rightarrow \vec{n}=(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0)$．…………………9 分

再由（1）知平面 $BCD$ 的法向量为 $\overrightarrow{BA}=(0,1,0)$，…………………10 分

设二面角 $O-BD-C$ 为 $\theta$，则 $\cos\theta=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{BA}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$．…………………12 分

**注：亦可取 $BD$ 中点 $E$ 及 $BC$ 中点 $F$，连接 $OE,OF,EF$，在 $\Delta OEF$ 中用几何法求解，相应给分.**

20、（本小题满分 12 分）

解　（1）易知椭圆的 $c=2$．……………………1 分

∵点 $G$ 在椭圆上，且 $|GF_1|+|GF_2|=\sqrt{4^2+\frac{1}{5}}+\frac{\sqrt{5}}{5}=2\sqrt{5}$　，∴ $2a=2\sqrt{5}\Rightarrow a=\sqrt{5}$．……………………2 分

由 $a^2=b^2+c^2$ 得 $b=1$，　∴椭圆 $C$ 的标准方程为：$\frac{x^2}{5}+y^2=1$．……………………3 分

（2）（i）**法一：**设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，根据对称性不妨假设 $A,B$ 都在 $y$ 轴的左侧

设直线 $MA$: $y=k_1x+1$，

将 $y=k_1x+1$ 代入 $x^2+y^2=1$ 得 $(1+k_1^2)x^2+2k_1x=0$，

所以 $x_1=-\frac{2k_1}{1+k_1^2},y_1=k_1x_1+1=\frac{1-k_1^2}{k_1^2+1}$．…………………5 分

设直线 $MB$: $y=k_2x+1$，

将 $y=k_2x+1$ 代入 $\frac{x^2}{5}+y^2=1$ 得 $(1+2k_2^2)x^2+4k_2x=0$，

所以 $x_2=\frac{-10k_2}{1+5k_2^2}=\frac{-10k_1}{5+k_1^2}$，$y_2=\frac{1-5k_2^2}{1+5k_2^2}=\frac{5-k_1^2}{5+k_1^2}$．…………………7 分

所以$k_{AB}=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{\dfrac{1-k_1^2}{k_1^2+1}-\dfrac{5-k_1^2}{5+k_1^2}}{\dfrac{-2k_1}{k_1^2+1}+\dfrac{10k_1}{5+k_1^2}}=-\dfrac{1}{k_1}$，所以$MA\perp AB$．………………9 分

又$MN$为圆$x^2+y^2=1$的直径，　　$\therefore NA\perp MA$．………………10 分

故$N,A,B$三点共线．……………………10 分

**法二：**$k_{BM}\cdot k_{BN}=\dfrac{y_2-1}{x_2}\cdot\dfrac{y_2+1}{x_2}=\dfrac{y_2^2-1}{x_2^2}=\dfrac{y_2^2-1}{5-5y_2^2}=-\dfrac{1}{5}$．……………………6 分

由$k_1=5k_2$得：$k_{BN}=-\dfrac{1}{5k_2}=-\dfrac{1}{k_1}$．……………………7 分

$MN$为圆$x^2+y^2=1$的直径，$\therefore NA\perp MA$　　$\therefore k_{AN}=-\dfrac{1}{k_1}=k_{BN}$．……………………9 分

故$N,A,B$三点共线．………………10 分

（ii）由（i）可知$\Delta MAB$为直角三角形，其外接圆的直径为线段$MB$

又因为$|MB|=\sqrt{x_2^2+(y_2-1)^2}=\sqrt{-4y_2^2-2y_2^2+6}=\sqrt{-4\ y_2+(\dfrac{1}{4})^2+\dfrac{25}{4}}$．………………11 分

当且仅当$y_2=-\dfrac{1}{4}$时，$|MB|$取最大值$\dfrac{5}{2}$

综上，$\Delta MAB$外接圆直径的最大值为$\dfrac{5}{2}$．……………………12 分

21、（本小题满分 12 分）

解：(1) 定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=(x+1)e^x-\dfrac{a}{x}$．………………1 分

由题意知$\begin{cases}f'(1)=2e-a=2e+1\\ f(1)=2e+1-b=e\end{cases}$，解得$a=-1,b=e+1$．………………3 分

（2）$g(x)=f(x)-2e^x-x+3=(x-2)e^x+\ln x-x+3$，

则$g'(x)=(x-1)e^x+\dfrac{1}{x}-1=(x-1)(e^x-\dfrac{1}{x})$．………………4 分

令$h(x)=e^x-\dfrac{1}{x}$，其中$x\in[\dfrac{1}{2},1]$，则$h'(x)=e^x+\dfrac{1}{x^2}>0$，

所以函数$h(x)=e^x-\dfrac{1}{x}$在$x\in[\dfrac{1}{2},1]$上单调递增．………………5 分

因为$h(\dfrac{1}{2})=\sqrt{e}-2<0$，$h(1)=e-1>0$，所以存在唯一$x_0\in(\dfrac{1}{2},1)$，

使得$h(x_0)=e^{x_0}-\dfrac{1}{x_0}=0$，即$e^{x_0}=\dfrac{1}{x_0}$，可得$x_0=-\ln x_0$．………………7 分

当$\dfrac{1}{2}<x<x_0$时，$g'(x)>0$，此时函数$g(x)$单调递增，

当$x_0<x<1$时，$g'(x)<0$，此时函数$g(x)$单调递减．………………8 分

所以，当$x\in[\dfrac{1}{2},1]$时，

$g(x)_{\max}=g(x_0)=(x_0-2)e^{x_0}+\ln x_0-x_0+3=\frac{x_0-2}{x_0}-2x_0+3=4-2(x_0+\frac{1}{x_0})<4-4\sqrt{x_0\cdot\frac{1}{x_0}}=0$

即 $g(x)<0$，因为 $g(1)=2-e>-1$，$g(\frac{1}{2})=\frac{5}{2}-\ln 2-\frac{3}{2}\sqrt{e}>\frac{5}{2}-\ln 2-\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{3}=-\ln 2>-1$，

所以当 $x\in[\frac{1}{2},1]$ 时，$-1<g(x)<0$，. ··················10 分

即 $n\geq 0, m\leq -1\ (m,n\in \mathbf{Z})$. ··················11 分

所以 $n-m\geq 1$，即 $n-m$ 的最小值为 1. ··················12 分

**请考生在 22~23 两题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题记分．作答时用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目对应题号右侧的方框涂黑．**

22.（本小题满分 10 分）选修 4-4：坐标系与参数方程

解 （1）依题意得 $\begin{cases} x^2=t^2+2+\frac{1}{t^2} \\ y^2=t^2-2+\frac{1}{t^2}\end{cases}$，化简整理得：$x^2-y^2=4$. ··················2 分

令 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$，化简得 $\rho^2\cos 2\theta=4$. ··················3 分

对于 $(x-2)^2+y^2=4\Rightarrow x^2+y^2-4x=0$，化简得：$\rho=4\cos\theta$. ··················5 分

（2）设 $A(\rho_A,\theta), B(\rho_B,\theta)$

依题意得 $\begin{cases}\rho^2\cos 2\theta=4 \\ \theta=\frac{\pi}{6}\end{cases}$，解得 $\rho_A=2\sqrt{2}$；··················6 分

$\begin{cases}\rho=4\cos\theta \\ \theta=\frac{\pi}{6}\end{cases}$，解得 $\rho_B=2\sqrt{3}$ ··················7 分

$\therefore |AB|=\rho_B-\rho_A=2\sqrt{3}-2\sqrt{2}$ ··················8 分

设 $C_2$ 到射线 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 的距离为 $d$，$\because \frac{d}{|OC_2|}=\sin\frac{\pi}{6}$，解得 $d=1$ ··················9 分

$\therefore S_{\Delta C_2AB}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\frac{1}{2}(2\sqrt{3}-2\sqrt{2})=\sqrt{3}-\sqrt{2}$. ··················10 分

23.（本小题满分 10 分）选修 4-5：不等式选讲

解：(1) 当 $x<1$ 时，不等式可化为 $4-2x\leq x+1\Rightarrow x\geq 1$． $\therefore x\in\phi$ ··················1 分

当 $1\leq x\leq 3$ 时，不等式可化为 $2\leq x+1\Rightarrow x\geq 1$． $\therefore 1\leq x\leq 3$． ··················2 分

当 $x>3$ 时，不等式可化为 $2x-4\leq x+1\Rightarrow x\leq 5$． $\therefore 3<x\leq 5$． ··················3 分

综上所得，原不等式的解集为 $[1,5]$． ··················5 分

（2）由绝对值不等式性质得 $|x-1|+|x-3|\geq|(1-x)+(x-3)|=2$，··················7 分

$\therefore c=2$，即 $a+b=2$．

所以 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b+1}=\frac{1}{3}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b+1})[a+(b+1)]=\frac{1}{3}(2+\frac{b+1}{a}+\frac{a}{b+1})\geq\frac{4}{3}$． ··················9 分

当且仅当 $\begin{cases}a+b=2 \\ a=b+1\end{cases}\Rightarrow a=\frac{3}{2}, b=\frac{1}{2}$ 时取到等号． ··················10 分