

绝密★考试结束前

浙江省 A9 协作体暑假返校联考

高三数学试题卷

命题: 普陀中学 庄成明、庄静红 磨题: 牌头中学 赵春风 桐乡一中 董志俊 校稿: 吕金晶

考生须知:

1. 本卷满分 150 分, 考试时间 120 分钟;
2. 答题前务必将自己的姓名, 准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔分别填写在试题卷和答题纸规定的地方。
3. 答题时, 请按照答题纸上“注意事项”的要求, 在答题纸相应的位置上规范答题, 在本试卷纸上答题一律无效。
4. 考试结束后, 只需上交答题卷。

选择题部分 (共 60 分)

一、单选题 (每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求)

1. 已知集合 $M = \{x \in \mathbb{R} \mid (1-x)(1+x) < 0\}$, $N = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-1| \leq 3\}$, 则 $M \cap N =$
A. (1,4) B. [-2,4] C. [-2,-1) ∪ (1,4] D. (1,4)
2. 已知平面向量 $\vec{a} = (1, -\sqrt{3})$, $\vec{b} = (-\frac{2\sqrt{3}}{3}, m)$, $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则实数 m 等于
A. $-\frac{2}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $-\frac{3}{2}$
3. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$, F_1, F_2 分别为左、右焦点, 点 P 在双曲线上, $PF_1 \perp PF_2$, P 到左焦点 F_1 的距离是 P 到右焦点 F_2 的距离的 3 倍, 则双曲线的离心率是
A. $\sqrt{2}$ B. $\frac{\sqrt{10}}{2}$ C. 2 D. $\sqrt{10}$
4. 已知 $0 < m < 1$, $0 < n < 1$, 且 $2\log_4 m = \log_2(1-n)$, 则 $\frac{1}{m} + \frac{9}{n}$ 的最小值是
A. 18 B. 16 C. 10 D. 4
5. 若函数 $f(x)$ 满足以下条件: ① $f^2(x) = f(2x) + 2$ ② $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增, 则这个函数 $f(x)$ 可以是
A. $f(x) = 2\cos x$ B. $f(x) = |x| + \frac{1}{|x|}$ C. $f(x) = e^x - \frac{1}{e^x}$ D. $f(x) = e^x + \frac{1}{e^x}$
6. 已知某生产商 5 个月的设备销售数据如下表所示:

时间代码 x	1	2	3	4	5
销售台数 y (单位: 百台)	5	7	8	14	16.5

生产商发现时间代码和销售台数有很强的相关性, 决定用回归方程 $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$ 进行模拟, 则 \hat{b} 的值是

参考数据、公式: $\sum_{i=1}^5 y_i = 50.5$; $\sum_{i=1}^5 x_i \cdot y_i = 181.5$; 若 $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$,

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i - n\bar{x} \cdot \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n(\bar{x})^2}$$

- A. 3.2 B. 3.1 C. 3 D. 2.9

7. 已知函数 $f(x) = 2\cos(\omega x + \frac{\pi}{6}) (\omega > 0)$, 若 $f(x)$ 在区间 $[0, \pi]$ 内有且仅有 3 个零点和 3 条对称轴, 则 ω 的取值范围是

- A. $(\frac{17}{6}, \frac{10}{3}]$ B. $(\frac{17}{6}, \frac{23}{6}]$ C. $[\frac{17}{6}, \frac{10}{3}]$ D. $(\frac{7}{3}, \frac{10}{3}]$

8. 如图, 一只青蛙开始时位于数轴上原点的位置, 每次向数轴的左侧或右侧随机跳跃一个单位, 记 a_n 为第 n 次跳跃后对应数轴上的数字 ($n=1, 2, \dots, 14, n \in \mathbb{N}^*$), 则满足 $a_8^2 = 16$, $a_{14} = 2$ 的跳跃方法有多少种



- A. 336 B. 448 C. 315 D. 420

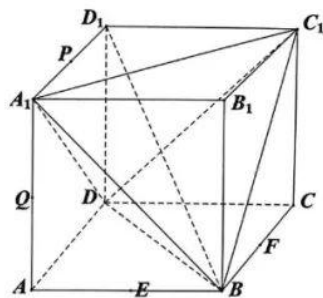
二、多选题 (每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 2 分)

9. 对于 $(\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}})^8$ 的展开式, 下列说法正确的是

- A. 展开式中各项系数之和为 256
B. 展开式中各项系数绝对值之和为 3^8
C. 展开式中的奇数项的二项式系数之和为 128
D. 展开式中的常数项是 1120

10. 如图, 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, P 、 Q 、 E 、 F 分别为棱 A_1D_1 、 A_1A 、 AB 、 BC 的中点, 则下列说法正确的是

- A. $BD_1 \perp \text{面} A_1C_1D$
B. P, Q, E, F 四点共面
C. 三棱锥 $B - A_1C_1D$ 的外接球的半径是 $\sqrt{3}$
D. 平面 PQE 经过三棱锥 $B - A_1C_1D$ 的外接球的球心



11. 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, 直线 $l: (2m-2)x - 2y - m + 1 = 0$, 若有且仅有一个正整数 x_0 , 使得点 $(x_0, f(x_0))$ 在直线 l 的上方, 则下列说法正确的是

- A. 直线 l 恒过定点 $(\frac{1}{2}, 0)$ B. $f(3) < f(2)$
C. $x_0 = 3$ D. 实数 m 的取值范围是 $[\frac{2\ln 3}{15} + 1, \frac{\ln 2}{3} + 1)$

12. 已知数列 $\{a_n\}$ 为正项数列, 前 n 项和为 S_n , $a_1=1$, 满足 $a_{n+1}=\sqrt{S_n^2+S_n+1}$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 则下列说法正确的是

- A. 长度为 $a_{n+1}, S_n, 1$ 的三条线段可以围成一个内角为 $\frac{\pi}{3}$ 的三角形
- B. $2a_n \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3 \cdot 2^n}\right) = a_{n+1}$
- C. $S_n = \frac{\sqrt{3}}{2 \tan\left(\frac{\pi}{3 \cdot 2^n}\right)} - \frac{1}{2}$
- D. $S_n \leq 1 + \sqrt{3}(2^{n-1} - 1)$

非选择题部分 (共 90 分)

三、填空题 (每小题 5 分, 共 20 分)

13. 已知 $z=2+i$ (i 为虚数单位), 则 $\bar{z} \cdot (z+3) = \underline{\hspace{2cm}}$.
14. 十个数据: 101、103、108、107、106、105、104、109、102、110 的第 60 百分位数是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
15. 已知角 α 的顶点在坐标原点, 始边与 x 轴非负半轴重合, 终边与射线 $y=2x(x \geq 0)$ 重合, 则 $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \underline{\hspace{2cm}}$.
16. 已知直线 l 过抛物线 $C: y^2=4x$ 的焦点 F , 与抛物线交于 A, B 两点, 线段 AB 的中点为 M , 过 M 作 MN 垂直抛物线的准线, 垂足为 N , 则 $\frac{32}{|AB|} + \frac{|NF|^2}{4}$ 的最小值是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

四、解答题 (本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

17. (本题满分 10 分) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且满足

$$a \sin C \cos B + b \sin A \cos C = \frac{\sqrt{3}}{2} a.$$

- (1) 求角 A ;
- (2) 若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 求 $4 \sin^2 B - 4 \sin B \sin C$ 的取值范围.

18. (本题满分 12 分) 已知正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1=2$.

- (1) 记 $c_n = \frac{a_{n+1}}{S_n \cdot S_{n+1}}$, 证明: 数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 $T_n < \frac{1}{2}$;
- (2) 若 $S_n = 2a_n + 14 - 2^{n+3}$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 求证: 数列 $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$ 为等差数列, 并求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

19. (本题满分 12 分) 中国的 CT 机打破了欧美 30 年的技术垄断, 实现了从无到有的突破, 中国的 CT 机不仅在技术上达到了国际水平, 而且在价格上也更具竞争力。此外, 中国的 CT 机还具有更好的定制化服务, 能够更好地满足不同地区和不同医疗机构的需求, 明峰医疗和联影医疗是中国 CT 机行业中的佼佼者。2023 年 8 月某医院购进甲型 CT 机 2 台, 乙型 CT 机 1 台, 该医院决定按照以下方案调试新机器:

每台设备最多进行 2 次调试, 只要调试成功就投入使用, 每次调试费用 0 元; 如果两次调试均不成功, 则邀请生产商上门调试, 生产商调试一台医院调试不成功的 CT 机需要额外支付 1000 元, 生产商调试后直接投入使用; 其中医院对甲机型每次调试成功的概率为 $\frac{2}{3}$, 对乙机型每次

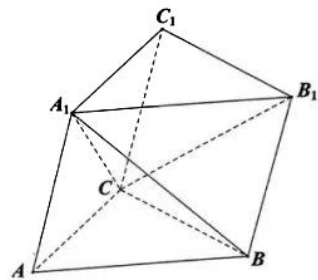
调试成功的概率为 $\frac{1}{2}$, 调试相互独立。

- (1) 求医院不需要生产商上门调试的概率 P ;
- (2) 计算医院支付调试费用 X 的分布列。

20. (本题满分 12 分) 如图三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\triangle ABC$ 是边长为 2 的正三角形, $A_1C = A_1B = \sqrt{3}$,

二面角 A_1-BC-A 的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 。

- (1) 证明: $AA_1 \perp$ 平面 A_1BC ;
- (2) 求 CB_1 与平面 ABB_1A_1 所成角的正弦值。



21. (本题满分 12 分) 已知函数 $f(x) = a\sqrt{x} - 2$ ($a \neq 0$), $g(x) = \ln x$.

- (1) 讨论函数 $F(x) = f(x) - g(x)$ 的单调区间;
- (2) 若函数 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 的图像存在两条公切线, 求实数 a 的取值范围。

22. (本题满分 12 分) 类似于圆的垂径定理, 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 中有如下性质: 不过椭圆

中心 O 的一条弦 PQ 的中点为 M , 当 PQ, OM 斜率均存在时, $k_{PQ} \cdot k_{OM} = -\frac{b^2}{a^2}$, 利用这一结论

解决如下问题: 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{9} = 1$, 直线 OP 与椭圆 E 交于 A, B 两点, 且 $\overrightarrow{OA} = 3\overrightarrow{OP}$, 其中 O 为坐标原点。

- (1) 求点 P 的轨迹方程 Γ ;
- (2) 过点 P 作直线 CD 交椭圆 E 于 C, D 两点, 使 $\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = \vec{0}$, 求四边形 $ACBD$ 的面积。

关于我们

自主招生在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizs.com](http://www.zizs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主招生领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主招生在线**浙江官方微信号：**zjgkjzb**。



微信搜一搜

浙考家长帮

