皖淮市级知名高中联考
高三数学参考答案(文科)

1. A　因为 $A=\{x|x>2\}$,所以 $A\cap B=\{3,5\}$.

2. C　全称命题的否定为特称命题.

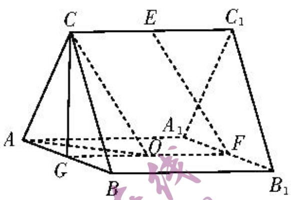
3. B　由"$\tan\alpha>0$"推不出"α 为锐角",但由"α 为锐角"可以推出"$\tan\alpha>0$". 故"$\tan\alpha>0$"是"α 为锐角"的必要不充分条件.

4. B　因为 $x+y=4$,所以 $\frac{1}{x}+\frac{9}{y}=\frac{1}{4}(x+y)(\frac{1}{x}+\frac{9}{y})=\frac{1}{4}(\frac{y}{x}+\frac{9x}{y}+10)$.
因为 $x>0,y>0$,所以 $\frac{y}{x}+\frac{9x}{y}\geqslant 2\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{9x}{y}}=6$,当且仅当 $x=1,y=3$ 时,等号成立,所以 $\frac{1}{4}(\frac{y}{x}+\frac{9x}{y}+10)\geqslant 4$,故 $\frac{1}{x}+\frac{9}{y}$ 的最小值为 4.

5. D　$y'=3x^2+a$,依题意可得 $3+a=7$,即 $a=4$. 因为 $1^3+a=7+m$,所以 $m=-2$.

6. C　因为直线 $x=\frac{5\pi}{24}$ 是函数 $f(x)=\sin(2x+\varphi)$ 图象的一条对称轴,所以 $\frac{5\pi}{12}+\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$. 又 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$,所以 $\varphi=\frac{\pi}{12}$. 由 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{12}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,解得 $\frac{5\pi}{24}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{17\pi}{24}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,即 $f(x)$ 的单调递减区间为 $[\frac{5\pi}{24}+k\pi,\frac{17\pi}{24}+k\pi](k\in\mathbf{Z})$.

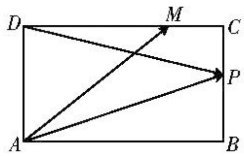
7. D　如图,取 AB 的中点 G,连接 FG,CG,取 FG 的中点 O,连接 OA,OC. 因为 E,F 分别是棱 CC_1,A_1B_1 的中点,所以 $CO/\!/EF$. 又正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的所有棱长均为 2,所以 $CO=\sqrt{OG^2+CG^2}=2$,$AO=\sqrt{AG^2+OG^2}=\sqrt{2}$,$\cos\angle ACO=\frac{AC^2+OC^2-AO^2}{2AC\cdot OC}=\frac{4+4-2}{2\times2\times2}=\frac{3}{4}$,即异面直线 AC 与 EF 所成角的余弦值为 $\frac{3}{4}$.



8. D　由 $\frac{c}{a}+\frac{a}{c}=3$,得 $a^2+c^2=3ac$. 因为 $b=2,B=\frac{2\pi}{3}$,$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$,所以 $ac=1$,故 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

9. A　因为 $f(-x)=-f(x)$,所以 $f(x)$ 是奇函数,排除 C,D. 当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时,$f(x)>0$,排除 B. 故选 A.

10. A　如图,因为 $AB\perp AD$,所以 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP})=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{AD}^2=3\lambda=2$,即 $\lambda=\frac{2}{3}$. 又因为 $\overrightarrow{DC}=4\overrightarrow{MC}$,所以 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AD}+\frac{3}{4}\overrightarrow{DC}$,
故 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{DP}=(\overrightarrow{AD}+\frac{3}{4}\overrightarrow{DC})\cdot(\overrightarrow{DC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC})=\frac{3}{4}\overrightarrow{DC}^2-\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}^2=\frac{3}{4}\times9-\frac{1}{3}\times(\sqrt{3})^2=\frac{23}{4}$.



11. C　设良马第 n 天行走的路程里数为 a_n,驽马第 n 天行走的路程里数为 b_n,则 $a_n=193+13(n-1)$,$b_n=97-\frac{1}{2}(n-1)(n\in\mathbf{N}^*,1\leqslant n\leqslant 9)$. 良马这 9 天共行走了 $9\times193+\frac{9\times8\times13}{2}=2205$ 里路程,驽马这 9 天共行走了 $9\times97+\frac{9\times8\times(-\frac{1}{2})}{2}=855$ 里路程,故长安与齐国两地相距 $\frac{2205+855}{2}=1530$ 里,A 正确. 3 天后,良马行走了 $3\times(193+13)=618$ 里路程,驽马共行走了 $3\times(97-\frac{1}{2})=289.5$ 里路程,故它们之间的距离为 328.5 里,B 正确. 良马前 6 天共行走了 $6\times193+\frac{6\times5\times13}{2}=1353$ 里<1530 里,故良马行走 6 天还未到达齐国,C 不正确. 良马前 7 天共行走了 $7\times193+\frac{7\times6\times13}{2}=1624$ 里>1530 里,则良马从第 7 天开始返回迎接驽马,故 8 天后,两马之间的距离即两马第 9 天行走的距离之和,由 $a_9+b_9=193+13\times8+97+(-\frac{1}{2})\times$

$8=390$,知 8 天后,两马之间的距离为 390 里,D 正确.

12. B　因为 $f(1)=e-4<0$,$f(\frac{3}{2})=e^{\frac{3}{2}}+\ln\frac{3}{2}-4=\sqrt{e^3}+\ln\frac{3}{2}-4>\sqrt{16}+\ln\frac{3}{2}-4>0$,

所以 $b\in(1,\frac{3}{2})$,因为 $\frac{3}{2}=\log_2\sqrt{2^3}<\log_2 3$,所以 $a>b$.

$g'(x)=3x^2-x-1$,令 $g'(x)=0$,得 $x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{6}$.

因为 $g(x)$ 在 $(-\infty,\frac{1-\sqrt{13}}{6})$,$(\frac{1+\sqrt{13}}{6},+\infty)$ 上单调递增,在 $(\frac{1-\sqrt{13}}{6},\frac{1+\sqrt{13}}{6})$ 上单调递减,

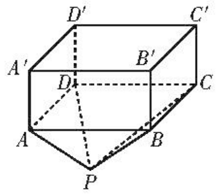
所以 $c=\frac{1+\sqrt{13}}{6}$,又因为 $\frac{1+\sqrt{13}}{6}<1$,所以 $c<b$,故 $a>b>c$.

13. -7　画出可行域(图略)知,当直线 $z=2x-y$ 经过点 $(-4,-1)$ 时,z 取得最小值,且最小值为 -7.

14. $-\frac{7}{25}$　$\sin(\frac{5\pi}{2}+2\alpha)=\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=-\frac{7}{25}$.

15. $(0,1)\cup(1,2)$　由题意得 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. 因为 $f(x)=f(-x)$,所以 $f(x)$ 是偶函数. 当 $x>0$ 时,$f(x)=\log_{2021}x-\frac{1}{x^2}+5$,$f(x)$ 单调递增,因此当 $x<0$ 时,$f(x)$ 单调递减. 又因为 $f(1)=f(-1)=4$,$f(x-1)<4$,所以 $-1<x-1<0$ 或 $0<x-1<1$,即 $0<x<1$ 或 $1<x<2$.

16. $\frac{3+2a}{6}$;$\frac{1}{2}$　由三视图可知,该漏斗是一个如图所示的正四棱柱和正四棱锥的组合体,它的容积为 $1\times1\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times1\times1\times a=\frac{3+2a}{6}$. 由图可知,该漏斗的外接球即正四棱柱 $ABCD-A'B'C'D'$ 的外接球,且外接球的半径 $R=\frac{3}{4}$,故 $a=R-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.



17. 解:a,c,b 成等差数列,则 $a+b=2c$. ………………………… 1 分

选择条件①,

由 $\triangle ABC$ 的周长为 6,得 $a+b+c=6$,又 $a+b=2c$,则 $c=2$,$a+b=4$. ………………………… 2 分

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=(a+b)^2-2ab-2ab\cos C$,则 $2ab+2ab\cos C=4^2-2^2=12$,即 $ab(1+\cos C)=6$①,

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\sqrt{3}$,即 $ab\sin C=2\sqrt{3}$②. ………………………… 4 分

$\frac{②}{①}$ 得 $\frac{\sin C}{1+\cos C}=\frac{2\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, ………………………… 6 分

$\frac{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{1+2\cos^2\frac{C}{2}-1}=\tan\frac{C}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,又 $0<C<\pi$,所以 $\frac{C}{2}=\frac{\pi}{6}$,即 $C=\frac{\pi}{3}$. ………………………… 8 分

则 $ab=4$,则 $a=b=c=2$,$\triangle ABC$ 为等边三角形. ………………………… 10 分

选择条件②,

由 $a\sin B=2$,$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\sqrt{3}$,得 $c=\sqrt{3}$. ………………………… 3 分

$a+b=2c=2\sqrt{3}\geqslant2\sqrt{ab}$,则 $ab\leqslant3$, ………………………… 5 分

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\sqrt{3}$,则 $ab\sin C=2\sqrt{3}$,又 $\sin C\leqslant1$,则 $ab\geqslant2\sqrt{3}$,矛盾, ………………………… 8 分

故不存在这样的 $\triangle ABC$. ………………………… 10 分

选择条件③,

由 $ab=4$,$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\sqrt{3}$,得 $\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$,又 $0<C<\pi$,所以 $C=\frac{\pi}{3}$ 或 $C=\frac{2\pi}{3}$. ………………………… 3 分

因为 $a+b=2c$,所以 c 不能为最大边,故 $C=\frac{\pi}{3}$. ………………………… 4 分

由余弦定理得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$,

所以 $c^2=(a+b)^2-2ab-ab$,$c^2=(2c)^2-3ab$,因此 $c^2=ab$. ………………………… 6 分

则 $\cos C=\frac{a^2+b^2-ab}{2ab}=\frac{1}{2}$,$(a-b)^2=0$,所以 $a=b$. ………………………… 8 分

$\triangle ABC$ 为等边三角形. ………………………… 10 分

18. (1)证明:当 $n=1$ 时,$a_1=S_1=2a_1-2$,解得 $a_1=2$. ………………………… 1 分

当 $n\geqslant2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=2a_n-2a_{n-1}+1$, ………………………… 3 分

整理得 $a_n=2a_{n-1}-1$，即 $a_n-1=2(a_{n-1}-1)$. ………………………………………… 5 分

又 $a_1-1=1$，所以 $\{a_n-1\}$ 是以 1 为首项，2 为公比的等比数列. ………………………… 6 分

(2)解：由(1)可知 $a_n-1=2^{n-1}$，所以 $b_n=\dfrac{\log_2(a_{n+1}-1)}{a_n-1}=\dfrac{n}{2^{n-1}}$. ………………………… 7 分

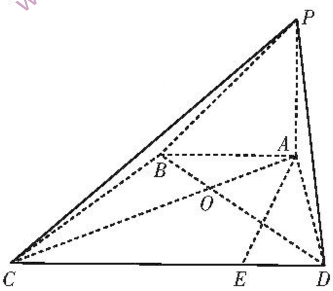
$T_n=\dfrac{1}{2^0}+\dfrac{2}{2^1}+\dfrac{3}{2^2}+\cdots+\dfrac{n}{2^{n-1}}$，

则 $\dfrac{T_n}{2}=\dfrac{1}{2^1}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\cdots+\dfrac{n}{2^n}$，……………………………………………… 9 分

两式相减得 $\dfrac{T_n}{2}=\dfrac{1}{2^0}+\dfrac{1}{2^1}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}}-\dfrac{n}{2^n}=2-\dfrac{n+2}{2^n}$，………………………… 11 分

故 $T_n=4-\dfrac{n+2}{2^{n-1}}$. ………………………………………………………………………… 12 分

19. (1)证明：如图，过点 A 作 $AE\perp CD$，垂足为 E，连接 AC，设 AC 与 BD 交于点 O.



因为底面 $ABCD$ 是等腰梯形，$AB=\dfrac{1}{2}CD=2$，所以 $DE=1$，$CE=3$.

又 $AD=BC=\sqrt{10}$，所以 $AE=3$，$AC=3\sqrt{2}$. ………………………… 1 分

因为 $\triangle AOB\backsim\triangle COD$，所以 $\dfrac{AO}{CO}=\dfrac{AB}{CD}=\dfrac{1}{2}$，则 $AO=\sqrt{2}$，同理 $BO=\sqrt{2}$. ………………………………………………………………………… 2 分

因为 $AO^2+BO^2=AB^2$，所以 $AO\perp BO$，即 $AC\perp BD$. ………………………… 3 分

因为 $PA\perp$ 底面 $ABCD$，$BD\subset$ 底面 $ABCD$，所以 $PA\perp BD$. ………… 4 分

又 $AC\cap PA=A$，所以 $BD\perp$ 平面 PAC. ………………………………… 5 分

又 $PC\subset$ 平面 PAC，所以 $BD\perp PC$. ………………………………… 6 分

(2)解：由(1)可知，$AC\perp BD$，$BD=3\sqrt{2}$，$CO=2\sqrt{2}$，所以 $S_{\triangle BCD}=\dfrac{1}{2}BD\cdot CO=6$. ………………… 7 分

又 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $V_{P-BCD}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle BCD}\cdot PA=4$. ………………………………………… 8 分

因为 $AB=2$，$AD=BC=\sqrt{10}$，所以 $PB=2\sqrt{2}$，$PD=\sqrt{14}$.

在 $\triangle PBD$ 中，$\cos\angle PBD=\dfrac{PB^2+BD^2-PD^2}{2PB\cdot BD}=\dfrac{1}{2}$，所以 $\sin\angle PBD=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，………………… 9 分

故 $S_{\triangle PBD}=\dfrac{1}{2}BD\cdot BP\sin\angle PBD=3\sqrt{3}$. ……………………………………………… 10 分

设点 C 到平面 PBD 的距离为 d，因为 $V_{C-PBD}=V_{P-BCD}$，

所以 $\dfrac{1}{3}\times3\sqrt{3}d=4$，解得 $d=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，……………………………………………… 11 分

即点 C 到平面 PBD 的距离为 $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. ……………………………………………… 12 分

20. 解：(1)当 $0<x<30$ 时，生产该新能源汽车的年利润 $y=9\times100x-(15x^2+300x)-4500=-15x^2+600x-4500$；……………………………………………………………………………… 2 分

当 $x\geqslant30$ 时，生产该新能源汽车的年利润 $y=9\times100x-(901x+\dfrac{40000}{x}-6500)-4500=-x-\dfrac{40000}{x}+2000$. ……………………………………………………………………………… 4 分

综上，生产该新能源汽车的年利润 $y=\begin{cases}-15x^2+600x-4500, & 0<x<30,\\ -x-\dfrac{40000}{x}+2000, & x\geqslant30.\end{cases}$ ………………………… 5 分

(2)当 $0<x<30$ 时，$y=-15x^2+600x-4500=-15(x-20)^2+1500$，………………………… 7 分

则当 $x=20$ 时，$y_{\max}=1500$(万元)；…………………………………………………… 8 分

当 $x\geqslant30$ 时，$y=-x-\dfrac{40000}{x}+2000\leqslant-2\times200+2000=1600$，………………………… 10 分

当且仅当 $x=\dfrac{40000}{x}$，即 $x=200$ 时，$y_{\max}=1600$(万元). ………………………… 11 分

因为 $1600>1500$，所以当年产量为 200 百辆时，该企业的年利润最大，最大年利润是 1600 万元. …… 12 分

21. 解：(1)由题意知，$f(x)$ 的图象在 $(0,\dfrac{\pi}{3})$ 上至少有三个最低点. ………………………… 1 分

因为 $x_0\in(0,\dfrac{\pi}{3})$，$\omega>0$，所以 $\omega x_0+\dfrac{\pi}{3}\in(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\omega\pi}{3}+\dfrac{\pi}{3})$，………………………… 2 分

因此$\frac{\omega\pi}{3}+\frac{\pi}{3}>\frac{3\pi}{2}+2\pi\times 2$， …………………………………………………… 4 分

解得 $\omega>\frac{31}{2}$. …………………………………………………………………… 5 分

从而 $T=\frac{2\pi}{\omega}\in(0,\frac{4\pi}{31})$，故 $f(x)$最小正周期的取值范围是$(0,\frac{4\pi}{31})$. ………………………… 6 分

(2)依题意得 $\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{\omega}$，又 $\omega>0$，所以 $0<\omega\leqslant 2$. ………………………………… 7 分

当 $x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$时，$\omega x+\frac{\pi}{3}\in(\frac{\pi\omega}{2}+\frac{\pi}{3},\pi\omega+\frac{\pi}{3})$，……………………………………………… 8 分

因为 $0<\omega\leqslant 2$，所以$\frac{\pi\omega}{2}+\frac{\pi}{3}\in(\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}]$，$\pi\omega+\frac{\pi}{3}\in(\frac{\pi}{3},\frac{7\pi}{3}]$， ………………………………… 9 分

则 $\pi\omega+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}$，解得 $\omega\leqslant\frac{1}{6}$，又 $\omega>0$，所以 $0<\omega\leqslant\frac{1}{6}$. ……………………………… 10 分

$f(2m-\frac{\pi}{3\omega})=\sin(2m\omega)$，当 $m\in(\frac{\pi}{2},\pi)$时，$2m\omega\in(\pi\omega,2\pi\omega)$，又 $0<\omega\leqslant\frac{1}{6}$，则 $0<\pi\omega\leqslant\frac{\pi}{6}$，$0<2\pi\omega\leqslant\frac{\pi}{3}$. ……………………………………………………………………………………… 11 分

由 $\sin(2m\omega)>\frac{\sqrt{2}}{2}$，得 $2\pi\omega>\frac{\pi}{4}$，即 $\omega>\frac{1}{8}$，故 ω 的取值范围是$(\frac{1}{8},\frac{1}{6}]$. ………………………… 12 分

22. (1)解：$f'(x)=\frac{1}{x}-a=\frac{1-ax}{x}$.

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$，故 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，
取 $x=1$，$f(1)=-a+1\geqslant 1$，不符合题意，舍去. ………………………………………………… 2 分

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)>0$，得 $0<x<\frac{1}{a}$，令 $f'(x)<0$，得 $x>\frac{1}{a}$，

故 $f(x)$在$(0,\frac{1}{a})$上单调递增，在$(\frac{1}{a},+\infty)$上单调递减.

当 $x=\frac{1}{a}$时，$f(x)$取得极大值，即最大值 $f(\frac{1}{a})=\ln\frac{1}{a}$， ……………………………………… 4 分

若 $f(x)\leqslant 0$ 恒成立，则 $\ln\frac{1}{a}\leqslant 0$，解得 $a\geqslant 1$. …………………………………………………… 5 分

(2)证明：要证$(\frac{\ln x}{x}+1)(e^{-x}+1)<\frac{2}{e}+1$，即证$\frac{\ln x}{xe^{x}}+\frac{1}{e^{x}}+\frac{\ln x}{x}<\frac{2}{e}$. ………………………… 7 分

设 $h(x)=\frac{\ln x}{x}$，则 $h'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^{2}}=\frac{1-\ln x}{x^{2}}$. 令 $h'(x)>0$，解得 $0<x<e$；令 $h'(x)<0$，解得 $x>e$. 故 $h(x)$在$(0,e)$上单调递增，在$(e,+\infty)$上单调递减. 当 $x=e$ 时，$h(x)$取得极大值，即最大值 $h(e)=\frac{1}{e}$. 故 $h(x)=\frac{\ln x}{x}\leqslant\frac{1}{e}$. ……………………………………………………………………………… 9 分

设 $F(x)=x\cdot e^{x-1}-\ln x-x$，则 $F'(x)=e^{x-1}+xe^{x-1}-\frac{1}{x}-1=e^{x-1}(1+x)-\frac{1+x}{x}=(1+x)(e^{x-1}-\frac{1}{x})$.

设 $\varphi(x)=e^{x-1}-\frac{1}{x}$，则 $\varphi'(x)=e^{x-1}+\frac{1}{x^{2}}>0$，$\varphi(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，$\varphi(1)=e^{1-1}-1=0$.

当 $x\in(0,1)$时，$\varphi(x)<0$；当 $x\in(1,+\infty)$时，$\varphi(x)>0$.
故当 $x\in(0,1)$时，$F'(x)<0$；当 $x\in(1,+\infty)$时，$F'(x)>0$.
$F(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增.
故当 $x=1$ 时，$F(x)$取得极小值，即最小值 $F(1)=0$，故 $F(x)\geqslant 0$，即 $x\cdot e^{x-1}-\ln x-x\geqslant 0$，

故$\frac{\ln x}{x\cdot e^{x}}+\frac{1}{e^{x}}\leqslant\frac{1}{e}$，当且仅当 $x=1$ 时，等号成立. …………………………………………… 11 分

又 $h(x)=\frac{\ln x}{x}\leqslant\frac{1}{e}$，当且仅当 $x=e$ 时，等号成立. 两个等号不能同时成立，所以$\frac{\ln x}{x\cdot e^{x}}+\frac{1}{e^{x}}+\frac{\ln x}{x}<\frac{2}{e}$. 故$(\frac{\ln x}{x}+1)(e^{-x}+1)<\frac{2}{e}+1$. ……………………………………………………………… 12 分