银川一中2023届高三第二次模拟数学(理科)参考答案

一、单选题

1.【答案】A

【分析】根据给定条件，求出复数z及$\overline{z}$，再利用复数除法运算求解作答.

【详解】依题意，$z=1+2i$，则$\overline{z}=1-2\mathrm{i}$，

所以$\frac{z}{\overline{z}}=\frac{1+2\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}=\frac{(1+2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})}{(1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})}=\frac{-3+4\mathrm{i}}{5}=-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\mathrm{i}$.

故选：A

2.【答案】D

【分析】由已知可推得$2\in B$，代入即可解得$m=-2$，代入即可得出答案.

【详解】由题意可知，$2\in B$，即$2^2-2+m=0$，所以$m=-2$，

所以，$B=\{x|x^2-x-2=0\}=\{2,-1\}$.

故选：D.

3.【答案】C

【分析】根据含量词命题的否定形式可得到原命题，通过反例可说明原命题为假命题.

【详解】$\because$命题P的否定为特称命题，$\therefore P$：$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2+1>1$，

当$x=0$时，$x^2+1=1$，$\therefore P$为假命题，ABD错误，C正确.

故选：C.

4.【答案】B

【分析】求出基本事件总数， 再求出和为奇数事件所包含的基本事件个数，根据古典概型求解.

【详解】不超过17的质数有：2，3，5，7，11，13，17，共7个，

随机选取两个不同的数，基本事件总数$n=\mathrm{C}_7^2=21$，

其和为奇数包含的基本事件有：$(2,3),(2,5),(2,7),(2,11),(2,13),(2,17)$，共6个，

所以$P=\frac{6}{21}=\frac{2}{7}$.

故选：B

5.【答案】B

【分析】执行程序即可算出其输出值结果.

【详解】由题意可知，流程图的功能为计算$S=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\frac{1}{5\times6}$的值，

裂项求和可得：$S=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)=\frac{5}{6}$.

故选：B.

6.【答案】D

【分析】根据一次函数、反比例函数、幂函数和分段函数的性质，逐个选项进行判断即可得到答案.

【详解】对于A：函数$y=-x+2$的定义域为$\mathbf{R}$，值域也为$\mathbf{R}$，不符合题意；

对于B：函数$y=\sqrt{x}$的定义域和值域都为$[0,+\infty)$，不符合题意；

对于C：$y=\frac{2}{x}$的定义域和值域都为$\{x|x\neq0\}$，不符合题意；

对于D：$y=\begin{cases}x-2,x\le0\\x+2,x>0\end{cases}$的定义域为$\mathbf{R}$；

当$x\le0$时，$y=x-2\le-2$；当$x>0$时，$y=x+2>2$；

所以值域为$(-\infty,-2]\cup(2,+\infty)$，定义域和值域不相同，符合题意；

故选：D.

7.【答案】A

【分析】利用向量垂直的坐标表示，结合数量积公式，即可求解.

【详解】因为$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cos75^\circ\cos15^\circ-2\sin75^\circ\sin15^\circ=2\cos\left(15^\circ+75^\circ\right)=0$，

$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$.

所以$\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\lambda\vec{b}\right)=2\vec{a}^2-\lambda\vec{b}^2=8-\lambda=0$.

所以$\lambda=8$.

故选：A

8.【答案】A

【分析】由题意求出双曲线的一条渐近线的倾斜角，可得渐近线的斜率，根据离心率的计算公式可得答案.

【详解】由题意设一条渐近线的倾斜角为$\alpha,\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，

则另一条渐近线的倾斜角为5α，由双曲对称性可得$\alpha+5\alpha=\pi,\therefore\alpha=\frac{\pi}{6}$，

则一条渐近线的斜率为$\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

设双曲线的长半轴长为a，短半轴长为b，则$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

故离心率为$e=\sqrt{1+(\frac{b}{a})^2}=\sqrt{1+\frac{1}{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

故选：A

9.【答案】C

【分析】根据已知条件求得$h_1=\frac{2R}{3}$，$h_2=\frac{4R}{3}$，代入体积公式计算即可.

【详解】设小球缺的高为h_1，大球缺的高为h_2，则$h_1+h_2=2R$，①

由题意可得：$\frac{2\pi Rh_1}{2\pi Rh_2}=\frac{1}{2}$，即：$h_2=2h_1$，②

所以由①②得：$h_1=\frac{2R}{3}$，$h_2=\frac{4R}{3}$，

所以小球缺的体积$V_1=\frac{1}{3}\pi\left(3R-\frac{2R}{3}\right)\times\left(\frac{2R}{3}\right)^2=\frac{28\pi R^3}{81}$，

大球缺的体积$V_2=\frac{1}{3}\pi\left(3R-\frac{4R}{3}\right)\times\left(\frac{4R}{3}\right)^2=\frac{80\pi R^3}{81}$，

所以小球缺与大球缺体积之比为$\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{28\pi R^3}{81}}{\frac{80\pi R^3}{81}}=\frac{7}{20}$.

故选：C.

10【答案】B

【分析】由判别式可解得k 6，由根与系数关系可得$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2}=\frac{k}{k+3}=\frac{1}{1+\frac{3}{k}}$，由$k$的范围结合不等式的性质变形可得答案.

【详解】由题意可得$\varDelta=(-k)^2-4(k+3)$ 0，

解得k 6或$k\le-2$，

设两个为x_1，x_2，由两根为正根可得

$\begin{cases}x_1+x_2=k>0\\x_1\cdot x_2=k+3>0\end{cases}$，解得$k>0$，

综上知，k 6.

故两个根的倒数和为$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2}$

$=\frac{k}{k+3}=\frac{1}{1+\frac{3}{k}}$，

$\because k\ \ 6$，$\therefore 0<\frac{1}{k}\ \ \frac{1}{6}$，$0<\frac{3}{k}\ \ \frac{1}{2}$，

故$1<1+\frac{3}{k}\ \ \frac{3}{2}$，

$\therefore \frac{1}{1+\frac{3}{k}}\ \ \frac{2}{3}$，

故两个根的倒数和的最小值是$\frac{2}{3}$.

故选：B

11.【答案】B

【分析】根据二倍角公式得到$\tan\gamma=\frac{11}{10}$，代入式子得到$\frac{2h}{D+d}=\frac{2h}{106+14}=\frac{11}{10}$，解得答案.

【详解】$\frac{10\sin 2\gamma}{\cos 2\gamma+1}=11$，即$\frac{20\sin\gamma\cos\gamma}{2\cos^2\gamma}=10\tan\gamma=11$，所以$\tan\gamma=\frac{11}{10}$，

$\frac{2h}{D+d}=\frac{2h}{106+14}=\frac{11}{10}$，解得$h=66$，

故选：B.

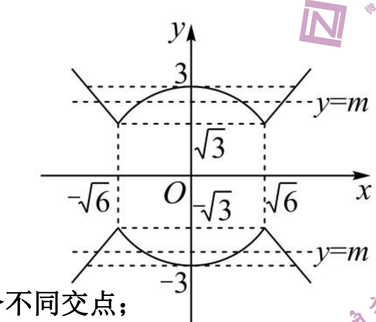
12.【答案】B

【分析】结合$x^2+y^2\geq 9$可确定曲线上的点的位置，结合双曲线和圆的图象可确定曲线Γ的图象，采用数形结合的方式可求得结果.

【详解】由题意得：$x^2+y^2-9\geq 0$，即$x^2+y^2\geq 9$，即曲线Γ上的点(x,y)为圆$x^2+y^2=9$上或圆$x^2+y^2=9$外的点，

由$\left(\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{3}-1\right)\sqrt{x^2+y^2-9}=0$得：$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{3}=1$或$x^2+y^2=9$，

由$\begin{cases}\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{3}=1\\ x^2+y^2=9\end{cases}$得：$\begin{cases}x=-\sqrt{6}\\ y=\sqrt{3}\end{cases}$或$\begin{cases}x=-\sqrt{6}\\ y=-\sqrt{3}\end{cases}$或$\begin{cases}x=\sqrt{6}\\ y=\sqrt{3}\end{cases}$或$\begin{cases}x=\sqrt{6}\\ y=-\sqrt{3}\end{cases}$，



由此可得曲线Γ的图象如下图所示，

由图象可知：当$m\in\left(-3,-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3},3\right)$时，直线$y=m$与曲线$\Gamma$有四个不同交点；

$\therefore$实数m的取值范围为$\left(-3,-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3},3\right)$.

故选：B.

二、填空题

13.【答案】11

【分析】根据题设的抽取方式，结合随机表法依次写出所得编号，即可得答案.

【详解】由题设，依次取出的编号为08、02、14、07、11、05，

所以第5个个体的编号为11.

故答案为：11

14.【答案】2

【分析】由题，利用导数及韦达定理可得a_3a_7，后利用等比中项性质可得答案.

【详解】$f'(x)=x^2-8x+4$，

由题a_3，a_7是方程$x^2-8x+4=0$的两个不等实根，

则由韦达定理$a_3a_7=4>0, a_3+a_7=8>0$，所以$a_3>0, a_7>0$

又a_5是a_3，a_7的等比中项且a_5与a_3，a_7同号，则$a_5^2=4, a_5>0\Rightarrow a_5=2$.

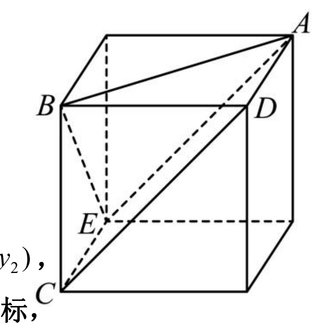
故答案为：2.

15.【答案】60°

【分析】把展开图恢复到原正方体，得到$AE//DC$，从而得到$\angle BAE$或其补角是异面直线AB与CD所成的角，从而可解.

【详解】

如图所示，把展开图恢复到原正方体.



连接AE，BE. 由正方体可得$CE//AD$且$CE=AD$，

$\therefore$四边形$ADCE$是平行四边形，$\therefore AE//DC$.

$\therefore\angle BAE$或其补角是异面直线AB与CD所成的角.

由正方体可得：$AB=AE=BE$，$\therefore\triangle ABE$是等边三角形，$\therefore\angle BAE=60°$.

$\therefore$异面直线AB与CD所成的角是60°.

故答案为：60°

16.【答案】1

【分析】构造函数$f(x)=e^x$，设切点为(x_1,y_1)，设$g(x)=\ln x$，设切点为(x_2,y_2)，结合条件得到x_1,x_2是函数$f(x)=e^x$和$g(x)=\ln x$的图象与曲线$y=\frac{1}{x}$交点的横坐标，利用对称性得出$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$关于直线$y=x$对称，从而得出$x_2=e^{x_1}$，$x_1=\ln x_2$，然后计算出k_1k_2.

【详解】设$f(x)=e^x$，则$f'(x)=e^x$，设切点为(x_1,y_1)，则$k_1=e^{x_1}$，

则切线方程为$y-y_1=e^{x_1}(x-x_1)$，即$y-e^{x_1}=e^{x_1}(x-x_1)$，

直线$y=k_1(x+1)-1$过定点$(-1,-1)$，

所以$-1-e^{x_1}=e^{x_1}(-1-x_1)$，所以$x_1e^{x_1}=1$，

设$g(x)=\ln x$，则$g'(x)=\frac{1}{x}$，设切点为(x_2,y_2)，则$k_2=\frac{1}{x_2}$，

则切线方程为$y-y_2=\frac{1}{x_2}(x-x_2)$，即$y-\ln x_2=\frac{1}{x_2}(x-x_2)$，

直线$y=k_1(x+1)-1$过定点$(-1,-1)$，

所以$-1-\ln x_2=\frac{1}{x_2}(-1-x_2)$，所以$x_2\ln x_2=1$，

则x_1,x_2是函数$f(x)=e^x$和$g(x)=\ln x$的图象与曲线$y=\frac{1}{x}$交点的横坐标，

易知$f(x)$与$g(x)$的图象关于直线$y=x$对称，而曲线$y=\frac{1}{x}$也关于直线$y=x$对称，

因此点$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$关于直线$y=x$对称，

从而$x_2=e^{x_1}$，$x_1=\ln x_2$，

所以$k_1k_2=\frac{e^{x_1}}{x_2}=1$.

故答案为：1.

三、解答题

17.【答案】(1)$a_n=2n+1$；(2)详见解析.

【分析】（1）设数列$\{a_n\}$的公差为d，将已知条件转化为a_1,d关系，即可求解；

（2）根据$\{b_n\}$通项公式，用裂项相消法求出和T_n，即可证明结论.

【详解】（1）由设数列$\{a_n\}$的公差为d，则$\begin{cases}a_1+3d=9\\ 3a_1+3d=15\end{cases}$

解得$d=2$，$a_1=3$，

所以$\{a_n\}$是首项为3，公差为2的等差数列，

所以$a_n=2n+1$；

（2）由$a_n=2n+1$，可得$b_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2n+1}\ \ \frac{1}{2n+3})$，

所以$T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\frac{1}{2}\left[(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+(\frac{1}{5}-\frac{1}{7})+\cdots+(\frac{1}{2n+1}\ \ \frac{1}{2n+3})\right]$

$=\frac{1}{2}(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+3})=\frac{1}{6}-\frac{1}{4n+6}$，

又$\frac{1}{4n+6}>0$，故.

18.【答案】(1)$\frac{1}{2}$　(2)分布列见解析，$E(X)=\frac{8}{7}$　(3)3 月 3 日

【分析】（1）根据古典概型公式求解即可.

（2）根据题意得到$X=0,1,2$，$P(X=0)=\frac{C_3^2}{C_7^2}=\frac{1}{7}$，$P(X=1)=\frac{C_3^1C_4^1}{C_7^2}=\frac{4}{7}$，$P(X=2)=\frac{C_4^2}{C_7^2}=\frac{2}{7}$，再写出分布列数学期望即可.

（3）根据折线图和频率分布直方图求解即可.

【详解】（1）令时间 A 为“职工甲和职工乙微信记步数都不低于 10000”，
从 3 月 2 日至 3 月 7 日这 6 天中，3 月 2 日、5 日、7 日这 3 天中，
甲乙微信记步数都不低于 10000，

故$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

（2）由（1）知：$X=0,1,2$，

$P(X=0)=\frac{C_3^2}{C_7^2}=\frac{1}{7}$，$P(X=1)=\frac{C_3^1C_4^1}{C_7^2}=\frac{4}{7}$，$P(X=2)=\frac{C_4^2}{C_7^2}=\frac{2}{7}$，

X 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$

$E(X)=0\times\frac{1}{7}+1\times\frac{4}{7}+2\times\frac{2}{7}=\frac{8}{7}$

（3）根据频率分步直方图知：微信记步数落在$[20,25]$，$[15,20)$，$[10,15)$，$[5,10)$，$[0,5)$（单位：千步）区间内的人数依次为$200\times0.15=30$人，$200\times0.25=50$人，$200\times0.3=60$人，$200\times0.2=40$人，$200\times0.1=20$人，
由甲微信记步数排名第 68，可知当天甲微信记步数在 15000 到 20000 万之间，
根据折线图知：只有 3 月 2 日，3 月 3 日，3 月 7 日.
由乙微信记步数排名第 142，可知当天乙微信记步数在 5000 到 10000 万之间，
根据折线图知：只有 3 月 3 日和 3 月 6 日，
所以 3 月 3 日符合要求.

19.【答案】(1)$y^2=6x$　(2)证明见解析

【分析】（1）将$M(6,-6)$代入抛物线即可求解；

（2）设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，直线 l 的方程为$my=x-t,(t\neq0)$，将直线 l 与抛物线进行联立可得$y_1+y_2=6m,y_1y_2=-6t$，结合$OA\perp OB$可得$t=6$，即可求证

【详解】（1）因为抛物线 C 过点$M(6,-6)$，

$\therefore(-6)^2=2p\times6$，解得$p=3$，

$\therefore$抛物线 C 的标准方程为$y^2=6x$.

（2）设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，直线 l 的方程为$my=x-t,(t\neq0)$，

联立$\begin{cases}my=x-t\\y^2=6x\end{cases}$，化为$y^2-6my-6t=0$，

$\Delta=36m^2+24t>0$，

$\therefore y_1+y_2=6m,y_1y_2=-6t$，

$\because OA\perp OB$，

$\therefore\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=\frac{(y_1y_2)^2}{36}+y_1y_2=-6t\left(\frac{-6t}{36}+1\right)=0$，$t\neq0$，$T_n<\frac{1}{6}$

解得$t=6$，满足$\Delta=36m^2+24t>0$，

$\therefore$直线 l 的方程为$my=x-6$，

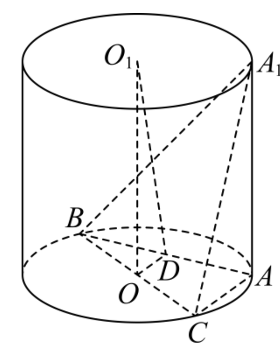
$\therefore$直线过定点$(6,0)$.

20.【答案】(1)存在，理由见解析　(2)$\frac{2\sqrt{57}}{19}$

【分析】（1）根据面面平行的判定定理、性质定理分析证明；

（2）根据题意结合长方体的外接球可得$AA_1=2$，建系，利用空间向量求二面角.

【详解】（1）当点 D 为AB的中点时，O_1D // 平面A_1AC，证明如下：



取 AB 的中点 D，连接 OD，

$\because O$，D 分别为BC，AB的中点，则OD // AC，

$OD\not\subset$平面A_1AC，$AC\subset$平面A_1AC，

$\therefore OD$ // 平面A_1AC，

又$\because OO_1$ // AA_1，

$OO_1\not\subset$平面A_1AC，$AA_1\subset$平面A_1AC，

$\therefore OO_1$ // 平面A_1AC，

$O_1O\cap OD=O$，$O_1O,OD\subset$平面OO_1D，

$\therefore$平面OO_1D // 平面A_1AC，

由于$O_1D\subset$平面OO_1D，故O_1D // 平面A_1AC.

（2）$\because BC$是$\odot O$的直径，可得$\angle BAC=90°$，即$AB\perp AC$，

且$BC=2$，$\angle ABC=30°$，故$AB=\sqrt{3}$，$AC=1$，

又$\because AA_1\perp$平面ABC，且$AB,AC\subset$平面ABC，

$\therefore AA_1\perp AB,AA_1\perp AC$，

即AB，AC，AA_1两两垂直，且点A_1，A，B，C 都在半径为$\sqrt{2}$的球面上，

可知该球为以AB、AC、AA_1为长、宽、高的长方体的外接球，

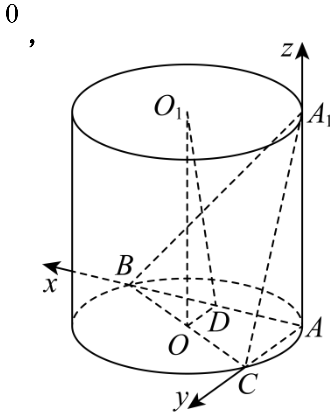
则$AB^2+AC^2+AA_1^2=\left(2\sqrt{2}\right)^2$，可得$AA_1=2$，

以 A 为原点，AB，AC，AA_1所在直线分别为 x，y，z 轴建立直角坐标系，

则$A(0,0,0)$，$B\left(\sqrt{3},0,0\right)$，$C(0,1,0)$，$A_1(0,0,2)$，

得$\overrightarrow{A_1B}=\left(\sqrt{3},0,-2\right)$，$\overrightarrow{A_1C}=(0,1,-2)$，

设$\vec{n}=(x,y,z)$为平面A_1BC的一个法向量，则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1B}=\sqrt{3}x-2z=0\\\vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1C}=y-2z=0\end{cases}$，



令$x=2$，则$y=2\sqrt{3},z=\sqrt{3}$，可得$\vec{n}=\left(2,2\sqrt{3},\sqrt{3}\right)$，

且$\overrightarrow{AC}=(0,1,0)$为平面$A_1AB$的一个法向量，

设二面角$C-A_1B-A$为θ，

则$\cos\theta=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{AC},\vec{n}\right\rangle\right|=\left|\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\vec{n}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\vec{n}\right|}\right|=\frac{2\sqrt{3}}{1\times\sqrt{19}}=\frac{2\sqrt{57}}{19}$，

所以二面角$C-A_1B-A$的余弦值为$\frac{2\sqrt{57}}{19}$.

21.【答案】（1）存在，$-2\leq m\leq2$；（2）①证明见解析；②证明见解析.

【分析】（1）根据微积分基本定理求得$f(x)$，由$f'(1)=0$，求得参数a；利用导数求函数的在区间上的最值，结合一次不等式在区间上恒成立问题，即可求得参数m的范围；

（2）①求得 $F'(x)$，利用导数求得 $F(x)$ 的单调性，即可容易证明；

②由①中所求，可得 $\frac{1}{k+1} > \ln(\frac{k+2}{k+1})$，利用对数运算，即可证明.

【详解】由题可知 $f(x)=a\ln(x+1)+(x+1)^2$，$\therefore f'(x)=\frac{a}{x+1}+2x+2$.

（1）由 $f'(1)=0$，可得 $\frac{a}{2}+2+2=0$，$a=-8$.

又当 $a=-8$ 时，$f'(x)=\frac{2(x+3)(x-1)}{x+1}$，

故 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 单调递减，在 $(1,+\infty)$ 单调递增.

故函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极值，所以 $a=-8$.

$\because 1<e-1$，$f'(x)=\frac{-8}{x+1}+2x+2=\frac{2(x-1)(x+3)}{x+1}$.

$\therefore f'(x)>0$，

当 $x\in[e-1,e]$ 时，由上述讨论可知，$f(x)$ 单调递增，

故 $f(x)_{\min}=f(e-1)=-8+e^2$

不等式 $m^2+tm+e^2-14\le f(x)$ 对任意 $x\in[e-1,e]$ 及 $t\in[-1,1]$ 恒成立，

即：$m^2+tm+e^2-14\le f(x)_{\min} \Leftrightarrow m^2+tm+e^2-14\le -8+e^2$，

即：$m^2+tm-6\le 0$ 对 $t\in[-1,1]$ 恒成立，令 $g(t)=m^2+mt-6$，

$\Rightarrow g(-1)\le 0$，$g(1)\le 0$

即 $m^2-m-6\le 0$，且 $m^2+m-6\le 0$，

整理得 $(m-3)(m+2)\le 0$，且 $(m+3)(m-2)\le 0$，

解得：$-2\le m\le 2$，即为所求.

（2）①$\because F(x)=f(x)-(x+1)^2-x=\ln(1+x)-x$，$\therefore F'(x)=\frac{-x}{1+x}$

当 $x>0$ 时，$F'(x)<0$，$\therefore F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

$\therefore F(x)<F(0)=0$ 即证.

②由①可得：$\ln(1+x)<x(x>0)$

令：$x=\frac{1}{k+1}$，得 $\ln(1+\frac{1}{k+1})<\frac{1}{k+1}$，即：$\frac{1}{k+1}>\ln(\frac{k+2}{k+1})$

$\therefore \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+(n+1)} > \ln\frac{n+2}{n+1}+\ln\frac{n+3}{n+2}+\cdots+\ln\frac{2n+2}{2n+1}=\ln 2$

即证.

【点睛】本题考查由极值点求参数值，利用导数由恒成立问题求参数范围，以及利用导数证明不等式以及数列问题，属压轴题.

22.【答案】(1) C 的极坐标方程为 $\rho^2\sin2\theta=2\lambda$，$\theta\ne\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z$，$l$ 的直角坐标方程为 $x-\sqrt{3}y+4=0$

(2) $\lambda=1$

【分析】（1）消去参数得到 C 的普通方程，再利用公式得到极坐标方程，注意定义域，再求出 l 的直角坐标方程；

（2）将 $\theta=\frac{\pi}{12}(\rho\in\mathbf{R})$ 代入 C 的极坐标方程，求出 A,B 的坐标，得到 AB 为直径的圆的圆心和半径，根据相切关系得到方程，求出答案.

【详解】（1）将曲线 C 的参数方程 $\begin{cases}x=t\\ y=\frac{\lambda}{t}\end{cases}$ 消去 t，得 C 的普通方程为 $xy=\lambda$，

且因为 $t\ne0$，所以 $x\ne0$，

将 $x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$，$\theta\ne\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z$，代入 $xy=\lambda$，

得 $\rho^2\sin\theta\cos\theta=\lambda$，即 $\rho^2\sin2\theta=2\lambda$，$\theta\ne\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z$，即为 C 的极坐标方程，

由直线 l 的方程 $\rho\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=2$ 化简得 $\frac{\sqrt{3}}{2}\rho\sin\theta-\frac{1}{2}\rho\cos\theta=2$，

化简得 $x-\sqrt{3}y+4=0$，即为 l 的直角坐标方程.

（2）将直线 $\theta=\frac{\pi}{12}$ 代入 $\rho^2\sin2\theta=2\lambda$，

得 $\rho^2=4\lambda$，即 $\rho_1=2\sqrt{\lambda},\rho_2=-2\sqrt{\lambda}$.

故以 AB 为直径的圆圆心为 O，半径 $r=2\sqrt{\lambda}$.

圆心 O 到直线 l 的距离 $d=\frac{4}{\sqrt{1+3}}=2$，由已知得 $2\sqrt{\lambda}=2$，解得 $\lambda=1$.

23.【答案】(1) $(0,4)$ **(2)9**

【分析】（1）根据零点分区间，分类求解即可，

（2）根据绝对值三角不等关系可得 $a^2=1$，进而结合基本不等式即可求解.

【详解】（1）当 $a=-1$ 时，$f(x)<4$ 等价于 $|x-1|+|x-3|<4$，

当 $x\le1$ 时，$1-x+3-x<4\Rightarrow -2x<0$，则 $0<x\le1$，

当 $1<x<3$ 时，$x-1+3-x<4\Rightarrow 2<4$，则 $1<x<3$，

当 $x\ge3$ 时，$x-1+x-3<4\Rightarrow 2x-4<4$，则 $3\le x<4$，

综上所述，不等式 $f(x)<4$ 的解集为 $(0,4)$.

（2）$\because f(x)=|x+a|+|x+3a|\ge|x+a-(x+3a)|=|2a|$，

当且仅当 $(x+a)(x+3a)\le0$ 等号成立，

$\therefore f(x)_{\min}=|2a|=2$，即 $a^2=1$，

$\because (a-m)(a+m)=\frac{4}{n^2}$，$\therefore a^2=\frac{4}{n^2}+m^2=1$，

$\therefore \frac{1}{m^2}+n^2=\left(\frac{1}{m^2}+n^2\right)\left(\frac{4}{n^2}+m^2\right)=5+\frac{4}{(mn)^2}+(mn)^2\ge5+2\sqrt{4}=9$，

当且仅当 $\frac{4}{(mn)^2}=(mn)^2$，即 $(mn)^2=2$，即 $m^2=\frac{1}{3}$，$n^2=6$ 时，等号成立，

故 $\frac{1}{m^2}+n^2$ 的最小值为 9