

2023 年河南省五市高三第二次联考

数 学(文科)

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,满分 150 分.考试时间为 120 分钟,其中第 II 卷 22 题,23 题为选考题,其它题为必考题.考试结束后,将答题卡交回.

注意事项:

1.答题前,考生必须将自己的姓名、准考证号码填写清楚,将条形码准确粘贴在条形码区域内.

2.选择题必须用 2B 铅笔填涂;非选择题必须使用 0.5 毫米黑色字迹的签字笔书写,字体工整、笔迹清楚.

3.请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答,超出答题区域书写的答案无效;在草稿纸、试题卷上答题无效.

4.保持卡面清洁,不要折叠、不要弄破、不准使用涂改液、刮纸刀.

第 I 卷 选择题(共 60 分)

一、选择题:本题共 12 个小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{y \mid y = x^2\}$, $B = \{x \mid y = \ln(2 - x)\}$, 则 $A \cup B =$

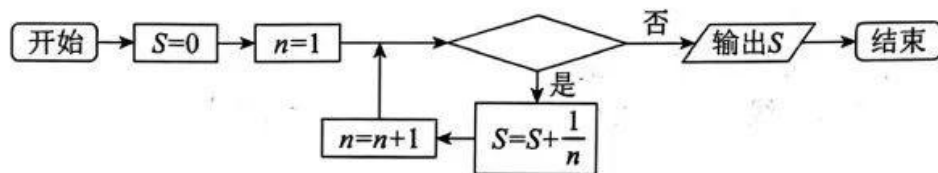
- A. R B. $(0, 2)$ C. $[0, 2)$ D. $(0, +\infty)$

2. 1904 年,瑞典数学家科赫构造了一种曲线,取一个正三角形,在每个边以中间的三分之一部分为一边,向外凸出作一个正三角形,再把原来边上中间的三分之一部分擦掉,就成了一个很像雪花的六角星,如图所示.现在向圆中均匀散落 1000 粒豆子,则落在六角星中的豆子数约为($\pi \approx 3, \sqrt{3} \approx 1.732$)



- A. 331 B. 481 C. 508 D. 577

3. 要计算 $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2023}$ 的结果,如图程序框图中的判断框内可以填



- A. $n < 2023$ B. $n \leq 2023$ C. $n > 2023$ D. $n \geq 2023$

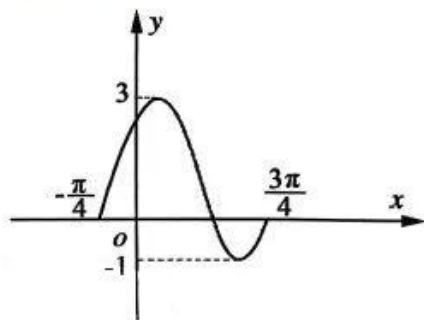
4. 已知 $\alpha - \beta = \frac{\pi}{6}$, $\tan \alpha - \tan \beta = 3$, 则 $\cos(\alpha + \beta)$ 的值为

- A. $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

5. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 前 n 项和为 S_n , 则“ $d > 0$ ”是“ $S_{3n} - S_{2n} > S_{2n} - S_n$ ”的
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件
6. 美国生物学家和人口统计学家雷蒙德·皮尔提出一种能较好地描述生物生长规律的生长曲线, 称为“皮尔曲线”, 常用的“皮尔曲线”的函数解析式可以简化为 $f(x) = \frac{P}{1+a^{kx+b}}$ ($P > 0, a > 1, k < 0$) 的形式. 已知 $f(x) = \frac{6}{1+3^{kx+b}}$ ($x \in \mathbf{N}$) 描述的是一种果树的高度随着栽种时间 x (单位: 年) 变化的规律, 若刚栽种 ($x=0$) 时该果树的高为 1.5m, 经过 2 年, 该果树的高为 4.5m, 则该果树的高度不低于 5.4m, 至少需要
 A. 2 年 B. 3 年 C. 4 年 D. 5 年

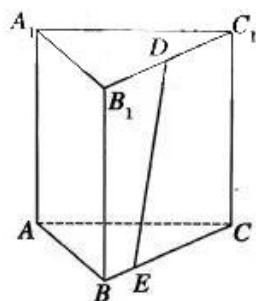
7. 函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi) + b$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示, 现将 $y = f(x)$ 的图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍 (纵坐标不变), 再向下平移 1 个单位所得图象对应的函数为 $g(x)$, 则下列结论正确的是 来源: 高三答案公众号

- A. 函数 $f(x)$ 在区间 $[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$ 上单调递减
 B. $g(-\frac{\pi}{12}) = \sqrt{2}$
 C. 点 $(\frac{\pi}{6}, 0)$ 是函数 $g(x)$ 图象的一个对称中心
 D. 直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 是函数 $y = f(x)$ 的一条对称轴



8. 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\triangle ABC$ 是直角三角形, 且 $AB = BC = AA_1$, D 为棱 B_1C_1 的中点, 点 E 在棱 BC 上, 且 $BC = 4BE$, 则异面直线 AC 与 DE 所成角的余弦值是

- A. $\frac{\sqrt{34}}{17}$ B. $\frac{\sqrt{34}}{34}$
 C. $\frac{\sqrt{10}}{5}$ D. $\frac{\sqrt{10}}{10}$



9. 若圆 $C_1: x^2 + y^2 = 1$ 与圆 $C_2: (x-a)^2 + (y-b)^2 = 1$ 的公共弦 AB 的长为 1, 则直线 AB 的方程为
 A. $2ax + by - 1 = 0$ B. $2ax + by - 3 = 0$
 C. $2ax + 2by - 1 = 0$ D. $2ax + 2by - 3 = 0$
10. 已知底面边长为 1 的正三棱柱既有外接球也有内切球, 圆锥 SO 是三棱柱的外接圆锥, 且三棱柱的一个底面在该圆锥的底面上, 则该外接圆锥的轴截面面积的最小值是
 A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{\sqrt{2}+2}{3}$ C. $\frac{4}{3}$ D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$
11. 在给出的① $\log_3 \pi < \frac{\pi}{3}$; ② $\log_2 3 > 2\log_3 2$; ③ $3^{-\frac{1}{3}} < (\frac{1}{2})^{-\frac{1}{3}}$ 三个不等式中, 正确的个数为
 A. 0 个 B. 1 个 C. 2 个 D. 3 个

12. 已知动点 P 在双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 上, 双曲线 C 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 则下列

结论: 来源: 高三答案公众号

① C 的离心率为 2; ② C 的焦点弦最短为 6;

③ 动点 P 到两条渐近线的距离之积为定值;

④ 当动点 P 在双曲线 C 的左支上时, $\frac{|PF_1|}{|PF_2|^2}$ 的最大值为 $\frac{1}{4}$. 其中正确的个数是

A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

第 II 卷 非选择题(共 90 分)

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知 \vec{e}_1, \vec{e}_2 不共线, 向量 $\vec{a} = 3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2, \vec{b} = k\vec{e}_1 + 6\vec{e}_2$, 且 $\vec{a} \parallel \vec{b}$; 则 $k =$ _____.

14. 若 $(i+1)(z-1) = 2$, 则 $|\bar{z}+1| =$ _____.

15. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $4\sqrt{6}\cos A = \frac{a}{b}\sin B + \frac{a}{c}\sin C$. 若

$\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{\sqrt{6}}{2}$, 则边 a 的最小值为 _____.

16. 已知函数 $f(x) = \sqrt{x^3 + 2x - 2a}$, 若曲线 $y = -x^2 + 2x$ 上存在点 (x_0, y_0) 使得 $f(f(y_0)) = y_0$, 则 a 的取值范围是 _____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分.

17. (本小题满分 12 分) 已知正项数列 $\{a_n\}$, 其前 n 项和为 $S_n, 3S_n = 4a_n - 1 (n \in \mathbb{N}^*)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = \frac{a_{n+1}}{3(a_n+2)(S_n+1)}$, 求证: 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $T_n < \frac{4}{9}$.

18. (本小题满分 12 分) 某学校研究性学习小组在学习生物遗传学的过程中, 为验证高尔顿提出的关于儿子成年后身高 y (单位: cm) 与父亲身高 x (单位: cm) 之间的关系及存在的遗传规律, 随机抽取了 5 对父子的身高数据, 如下表:

| | | | | | |
|----------|-----|-----|-----|-----|-----|
| 父亲身高 x | 160 | 170 | 175 | 185 | 190 |
| 儿子身高 y | 170 | 174 | 175 | 180 | 186 |

(1) 根据表中数据, 求出 y 关于 x 的线性回归方程, 并利用回归直线方程分别确定儿子比父亲高和儿子比父亲矮的条件, 由此可得到怎样的遗传规律?

(2) 记 $e_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - bx_i - a, (i = 1, 2, \dots, n)$, 其中 y_i 为观测值, \hat{y}_i 为预测值, e_i 为对应 (x_i, y_i) 的残差. 求 (1) 中儿子身高的残差的和, 并探究这个结果是否对任意具有线性相关关系的两个变量都成立? 若成立加以证明; 若不成立说明理由.

高三数学(文科) 第 3 页(共 4 页)

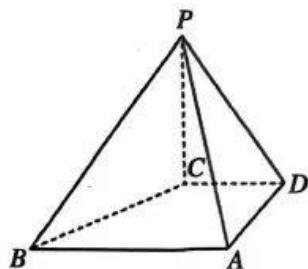
参考数据及公式： $\sum_{i=1}^5 x_i = 880, \sum_{i=1}^5 x_i^2 = 155450, \sum_{i=1}^5 y_i = 885, \sum_{i=1}^5 x_i y_i = 156045$

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x} \cdot \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$$

19.(本小题满分 12 分)如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PC \perp BC, PA = PB, \angle APC = \angle BPC$.

(1)证明: $PC \perp AD$;

(2)若 $AB \parallel CD, PD \perp AD, PC = \sqrt{3}$,且点 C 到平面 PAB 的距离为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$,求 AD 的长.



20.(本小题满分 12 分)已知函数 $f(x) = e^{x-1} + ax$.

(1)若 $f(x) \geq 0$ 恒成立,求 a 的取值范围;

(2)当 $m \geq 1$ 时,证明 $\ln x + \frac{me^x}{x} - \sin x > 1$ 恒成立.

21.(本小题满分 12 分)已知点 F 是抛物线 $C_1: x^2 = 4y$ 与椭圆 $C_2: \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$

的公共焦点, C_1, C_2 交于 P, Q 两点,且 $|PQ| = \frac{4\sqrt{6}}{3}$.

(1)求椭圆的方程;

(2)过 C_2 上一点 M 作 C_1 的两条切线,记切点分别为 A, B ,求 $\triangle MAB$ 面积的最大值.

(二)选考题:共 10 分,请考生从第 22,23 两题中任选一题作答.如果多做,则按所做的第一个题目计分.

22.(本小题满分 10 分)选修 4-4:坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中,曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 + \cos\alpha \\ y = 1 + \sin\alpha \end{cases}$ (α 为参数).以坐标原点为极

点, x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系,直线 l 的极坐标方程为 $\rho \sin\theta - \sqrt{3}\rho \cos\theta + 1 = 0$.

(1)求曲线 C 的普通方程和直线 l 的直角坐标方程;

(2)若点 $P(0, -1)$,直线 l 与曲线 C 的交点为 M, N ,求 $|PM| + |PN|$ 的值.

来源:高三答案公众号

23.(本小题满分 10 分)选修 4-5:不等式选讲

设 a, b, c 为正数,且 $a + b + c = 3$.

(1)证明: $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$;

(2)若 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq m$ 恒成立,求 m 的最大值.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



自主选拔在线
微信号: zizzsw



自主选拔在线
微信号: zizzsw



自主选拔在线
微信号: zizzsw