

2022~2023 学年下学期第二次阶段性考试

高二数学试题

考生注意:

1. 本试卷满分 150 分, 考试时间 120 分钟。
2. 答题前, 考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时, 请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑; 非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答, 超出答题区域书写的答案无效, 在试题卷、草稿纸上作答无效。
4. 本卷命题范围: 选择性必修第二册第四章, 选择性必修第三册。

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一个选项是符合题目要求的。

1. 某物体的运动路程 s (单位: m) 与时间 t (单位: s) 的关系可用函数 $s(t) = t^2 + 3$ 表示, 则该物体在 $t = 2$ s 时的瞬时速度为
A. 0 m/s B. 2 m/s C. 3 m/s D. 4 m/s
2. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_3 = 13, a_5 = 9$, 则公差 d 等于
A. 2 B. 3 C. -2 D. -3
3. 设某项试验的成功率是失败率的 4 倍, 用随机变量 Y 描述一次试验的失败次数, 则 $D(Y) =$
A. $\frac{2}{25}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{4}{25}$ D. $\frac{4}{5}$
4. 函数 $f(x) = \frac{x-2}{e^x}$ 的单调递增区间为
A. $(-\infty, 3)$ B. $(0, 3)$ C. $(3, +\infty)$ D. $(-\infty, 2)$
5. 新型冠状病毒引起的肺炎疫情暴发以来, 各地医疗机构采取了各种针对性的治疗方法, 取得了不错的成效, 某地开始使用中西医结合方法后, 每周治愈的患者人数如表所示:

周数(x)	1	2	3	4	5
治愈人数(Y)	2	17	36	103	142

由表格可得 Y 关于 x 的非线性回归方程为 $\hat{y} = 6x^2 + a$, 则此回归模型第 5 周的残差为

- A. 0 B. 2 C. 3 D. -2
6. 现有红、黄、蓝、绿、紫五只杯子, 将它们叠成一叠, 则在黄色杯子和紫色杯子相邻的条件下, 黄色杯子和红色杯子也相邻的概率为
A. $\frac{1}{10}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{2}{3}$

7. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=1$, 公差 $d=10$, 在 $\{a_n\}$ 中每相邻两项之间都插入 4 个数, 使它们和原数列的数一起构成一个新的等差数列 $\{b_n\}$, 则 $b_{2023} =$

- A. 4043 B. 4044 C. 4045 D. 4046

8. 已知函数 $f(x) = e^{ax} - 3\ln x$, 若 $f(x) > x^3 - ax$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围为

- A. $(\frac{3}{e}, +\infty)$ B. $(3e, +\infty)$ C. $(0, \frac{3}{e})$ D. $(0, 3e)$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 在曲线 $y = \sin 2x$ 上的切线的倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$ 的点的横坐标可能为

- A. $-\frac{\pi}{12}$ B. $\frac{\pi}{6}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{12}$

10. 在正项等比数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_3=8, a_5=2$, 其前 n 项和为 S_n , 则下列说法中正确的是

- A. $a_1=32$ B. $a_n=2^{6-n}$ C. $\frac{a_8}{a_6}=4$ D. $S_6=63$

11. 若函数 $f(x) = \ln(2x+1) + 2x^2 - (a+1)x$ 的图象上不存在互相垂直的切线, 则实数 a 的值可以是

- A. -1 B. 1 C. 2 D. 3

12. 如图, P_1 是一块半径为 1 的半圆形纸板, 在 P_1 的左下端剪去一个半径为 $\frac{1}{2}$ 的半圆后得到图形 P_2 , 然后依次剪去一个更小半圆 (其直径为前一个剪掉半圆的半径) 得图形 $P_3, P_4, \dots, P_n, \dots$, 记纸板 P_n 的周长为 L_n , 面积为 S_n , 则下列说法正确的是



- A. $L_2 = \frac{3}{2}\pi + 1$ B. $S_4 = \frac{23}{64}\pi$
C. $L_n - L_{n-1} = \frac{\pi - 2}{2^{n-1}}$ D. $S_n = \frac{\pi}{9} \left(4 + \frac{1}{2^{2n-1}} \right)$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. A, B, C 三个地区爆发了流感, 这三个地区分别有 6%, 5%, 4% 的人患了流感. 假设这三个地区的人口比例为 5:4:1, 现从这三个地区中任意选取一个人, 则这个人患流感的概率为_____.

14. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $2a_5 + a_3^2 = 0$, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式可能是 $a_n =$ _____. (写出满足条件的一个通项公式即可)

15. 已知函数 $f(x) = x^5 + 2x^3 + 4x$, 若 $f(a^2 - 3a - 4) \leq 0$, 则实数 a 的取值范围为_____.

16. 某人射击 10 次, 每次中靶的概率均为 p ($0 < p < 1$) 且每次是否中靶相互独立, 记 10 次射击中恰有 3 次中靶的概率为 $f(p)$, 则 $f(p)$ 取最大值时, $p =$ _____.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

已知 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 3$ ($a, b \in \mathbb{R}$) 的两个极值点分别为 $-1, 2$.

(1) 求 a, b 的值；

(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[-2, 2]$ 上的最值.

18. (12 分)

在① $S_7 + S_8 = 64$; ② $a_2, a_4, a_6 + 2$ 成等比数列; ③ $S_n - na_n = \frac{n-n^2}{2}$. 这三个条件中选择一个,

补充在下面问题中, 并进行解答.

已知各项均为正数的等差数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = 1$, _____.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $b_n = 3^n - 3a_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

注: 如果选择多组条件分别解答, 按第一个解答计分.

19. (12 分)

为了打好脱贫攻坚战, 某贫困县农科院针对玉米种植情况进行调研, 力争有效地改良玉米品种, 为农民提供技术支持, 现统计了 25 株抗倒伏玉米, 20 株易倒伏玉米的茎高情况, 设茎高大于 180 厘米的玉米为高茎玉米, 否则为矮茎玉米. 完成以下问题.

(1) 完成以下的 2×2 列联表:

茎高	倒 伏		合计
	抗倒伏	易倒伏	
矮茎	16		
高茎			25
合计			

(2) 根据(1)中的列联表, 有 99% 的把握认为玉米倒伏与茎高有关吗?

附: $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, 其中 $n = a+b+c+d$.

$\alpha = P(\chi^2 \geq k)$	0.05	0.01	0.001
k	3.841	6.635	10.828

20. (12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = \frac{3}{4}$, $a_{n+1} = \frac{1}{2-a_n}$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

(1) 求证: 数列 $\left\{\frac{1}{a_n-1}\right\}$ 是等差数列, 并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n + a_n = 1$ ($n \in \mathbf{N}^*$), $S_n = b_1 b_2 + b_2 b_3 + \cdots + b_n b_{n+1}$, 试比较 a_n 与 $8S_n$ 的大小.

21. (12 分)

为普及航天知识, 某航天科技体验馆开展了一项“摸球过关”领取航天纪念品的游戏, 规则如下: 不透明的口袋中有 3 个白球, 2 个红球, 这些球除颜色外完全相同. 参与者每一轮从口袋中一次性取出 3 个球, 将其中的白球个数记为该轮得分 X , 记录完得分后, 将摸出的球全部放回袋中. 当参与者完成第 n 轮游戏, 且其前 n 轮的累计得分恰好为 $2n$ 时, 游戏过关, 可领取纪念品, 同时游戏结束, 否则继续参与游戏. 若第 3 轮后仍未过关, 则游戏也结束. 每位参与者只能参加一次游戏.

(1) 求随机变量 X 的分布列及数学期望;

(2) 若甲参加该项游戏, 求甲能够领到纪念品的概率.

22. (12 分)

已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{x+1} - \ln(x+1) - a$ ($a \in \mathbf{R}$).

(1) 若 $a=0$, 求函数 $f(x)$ 的图象在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(2) 若存在整数 a 使得 $f(x) > 0$ 恒成立, 求整数 a 的最大值.

(参考数据: $e^{\frac{2}{3}} \approx 1.95$, $e^{\frac{1}{3}} \approx 2.12$, $\ln 2 \approx 0.69$, $\ln 3 \approx 1.10$, $\ln 5 \approx 1.61$, $\ln 7 \approx 1.95$)