绝密★启用前

2017年普通高等学校招生全国统一考试（山东卷）

理科数学

本试卷分第I卷和第II卷两部分，共4页。满分150分。考试用时120分钟。

考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

注意事项：

1．答卷前，考生务必用0.5毫米黑色签字笔将自己的姓名、座号、考生号、县区和科类填写在答题卡和试卷规定的位置上。

2．第I卷每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。学.科.网答案写在试卷上无效。

3．第II卷必须用0.5毫米黑色签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应的位置，不能写在试卷上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不能使用涂改液、胶带纸、修正带。不按以上要求作答的答案无效。

4、填空题请直接填写答案，解答题应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

参考公式：

如果事件A，B互斥，那么P（A+B）=P(A)+P(B)；如果事件A、B独立，那么P（AB）=P(A) · P(B)

第I卷（共50分）

一、选择题：本大题共10小题，每小题5分，共50分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符号题目要求的.

（1）设函数 $y=\sqrt{4-x^2}$ 的定义域 A，函数 $y=\ln(1-x)$ 的定义域为 B,则 $A\cap B$=

（A）(1,2)　　（B）$(1,2]$　　（C）(-2,1)　　（D）[-2,1)

（2）已知 $a\in R$,i是虚数单位，若 $z=a+\sqrt{3}i, z\cdot\bar{z}=4$，则 a=

（A）1 或-1　　（B）$\sqrt{7}$或-$\sqrt{7}$　　（C）-$\sqrt{3}$　　（D）$\sqrt{3}$

（3）已知命题 p: $\forall x>0, \ln(x+1)>0$；命题 q：若 $a>b$，则 $a^2>b^2$，下列命题为真命题的是

（A）$p \wedge q$　　（B）$p \wedge \neg q$　　（C）$\neg p \wedge q$　　（D）$\neg p \wedge \neg q$

（4）已知 x,y 满足 $\begin{cases} x-y+3 \le 0 \\ 3x+y+5 \le 0 \\ x+3 \ge 0 \end{cases}$，则 $z=x+2y$ 的最大值是

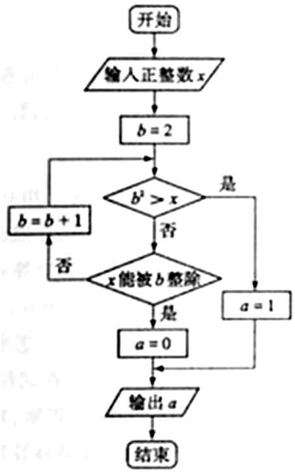
（A）0　　（B）2　　（C）5　　（D）6

（5）为了研究某班学生的脚长 x（单位：厘米）和身高 y（单位：厘米）的关系，从该班随机抽取 10 名学生，根据测量数据的散点图可以看出 y 与 x 之间有线性相关关系，设其回归直线方程为 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$．已知 $\sum_{i=1}^{10} x_i=225$，$\sum_{i=1}^{10} y_i=1600$，$\hat{b}=4$．该班某学生的脚长为 24，据此估计其身高为

（A）160　　（B）163　　（C）166　　（D）170

（6）执行两次右图所示的程序框图，若第一次输入的 x 的值为 7，第二次输入的 x 的值为 9，则第一次、第二次输出的 a 的值分别为

（A）0，0　　（B）1，1　　（C）0，1　　（D）1，0



（7）若 $a>b>0$，且 $ab=1$，则下列不等式成立的是

（A）$a+\frac{1}{b}<\frac{b}{2^a}<\log_2(a+b)$　　（B）$\frac{b}{2^a}<\log_2(a+b)<a+\frac{1}{b}$

（C）$a+\frac{1}{b}<\log_2(a+b)<\frac{b}{2^a}$　　（D）$\log_2(a+b)<a+\frac{1}{b}<\frac{b}{2^a}$

（8）从分别标有 1，2，…，9 的 9 张卡片中不放回地随机抽取 2 次，每次抽取 1 张．则抽到的 2 张卡片上的数奇偶性不同的概率是

（A）$\frac{5}{18}$　　（B）$\frac{4}{9}$　　（C）$\frac{5}{9}$　　（D）$\frac{7}{9}$

（9）在 $\Delta\mathrm{ABC}$ 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c．若 $\Delta\mathrm{ABC}$ 为锐角三角形，且满足

$\sin\mathrm{B}(1+2\cos\mathrm{C})=2\sin\mathrm{A}\cos\mathrm{C}+\cos\mathrm{A}\sin\mathrm{C}$，则下列等式成立的是

（A）$a=2b$　　（B）$b=2a$　　（C）$\mathrm{A}=2\mathrm{B}$

（D）$\mathrm{B}=2\mathrm{A}$

（10）已知当 $x\in[0,1]$ 时，函数 $y=(mx-1)^2$ 的图象与 $y=\sqrt{x}+m$ 的图象有且只有一个交点，则正实数 m 的取值范围是

（A）$\left(0,1\right]\cup\left[2\sqrt{3},+\infty\right)$　　（B）$\left(0,1\right]\cup\left[3,+\infty\right)$

（C）$\left(0,\sqrt{2}\right]\cup\left[2\sqrt{3},+\infty\right)$　　（D）$\left(0,\sqrt{2}\right]\cup\left[3,+\infty\right)$

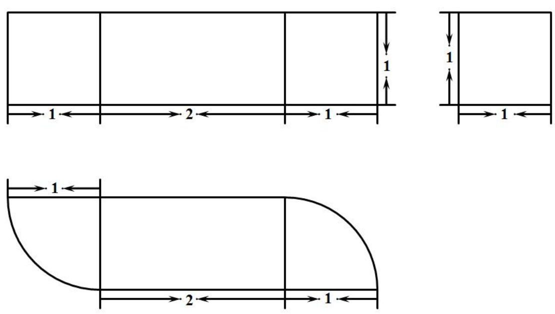
第 II 卷（共 100 分）

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分

（11）已知 $(1+3x)^n$ 的展开式中含有 x^2 项的系数是 54，则 $n=$__________.

（12）已知 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 是互相垂直的单位向量，若 $\sqrt{3}\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$ 与 $\boldsymbol{e}_1+\lambda\boldsymbol{e}_2$ 的夹角为 60°，则实数 λ 的值是________.

(13)由一个长方体和两个 $\frac{1}{4}$ 圆柱体构成的几何体的三视图如右图，则该几何体的体积为____.



（14）在平面直角坐标系 xOy 中，双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$ 的右支与焦点为 F 的抛物线 $x^2=2px\left(p>0\right)$ 交于 A,B 两点，若 $|AF|+|BF|=4|OF|$，则该双曲线的渐近线方程为______.

（15）若函数 $e^x f\left(x\right)$（$e=2.71828\cdots$ 是自然对数的底数）在 $f\left(x\right)$ 的定义域上单调递增，则称函数 $f\left(x\right)$ 具有 M 性质.下列函数中所有具有 M 性质的函数的序号为______.

① $f\left(x\right)=2^{-x}$　② $f\left(x\right)=3^{-x}$　③ $f\left(x\right)=x^3$　④ $f\left(x\right)=x^2+2$

三、解答题：本大题共 6 小题，共 75 分。

（16）（本小题满分 12 分）

设函数 $f(x)=\sin(\omega x-\frac{\pi}{6})+\sin(\omega x-\frac{\pi}{2})$，其中 $0<\omega<3$.已知 $f(\frac{\pi}{6})=0$.

（Ⅰ）求 ω；

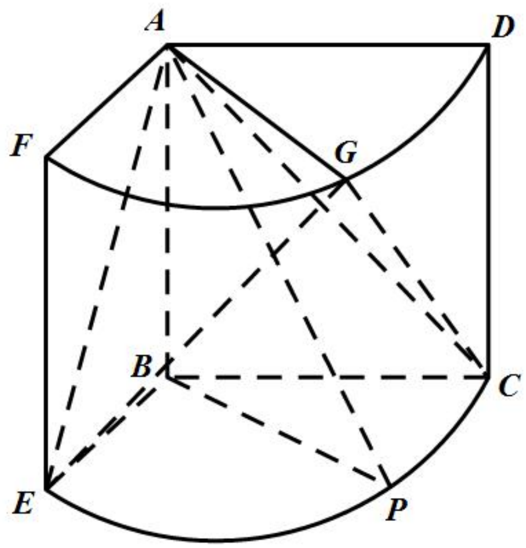
（Ⅱ）将函数 $y=f(x)$ 的图象上各点的横坐标伸长为原来的 2 倍（纵坐标不变），再将得到的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{4}$ 个单位，得到函数 $y=g(x)$ 的图象，求 $g(x)$ 在 $[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}]$ 上的最小值.

（17）（本小题满分 12 分）

如图，几何体是圆柱的一部分，它是由矩形 $ABCD$（及其内部）以 AB 边所在直线为旋转轴旋转 $120°$ 得到的，G 是 $\overset{\frown}{DF}$ 的中点.

（Ⅰ）设 P 是 $\overset{\frown}{CE}$ 上的一点，且 $AP\perp BE$，求 $\angle CBP$ 的大小；

（Ⅱ）当 $AB=3$，$AD=2$，求二面角 $E-AG-C$ 的大小.



（18）（本小题满分 12 分）在心理学研究中，常采用对比试验的方法评价不同心理暗示对人的影响，具体方法如下：将参加试验的志愿者随机分成两组，一组接受甲种心理暗示，另一组接受乙种心理暗示，通过对比这两组志愿者接受心理暗示后的结果来评价两种心理暗示的作用，现有 6 名男志愿者 A_1，A_2，A_3，A_4，A_5，A_6 和 4 名女志愿者 B_1，B_2，B_3，B_4，从中随机抽取 5 人接受甲种心理暗示，另 5 人接受乙种心理暗示.

（Ⅰ）求接受甲种心理暗示的志愿者中包含 A_1 但不包含 B_1 的频率。

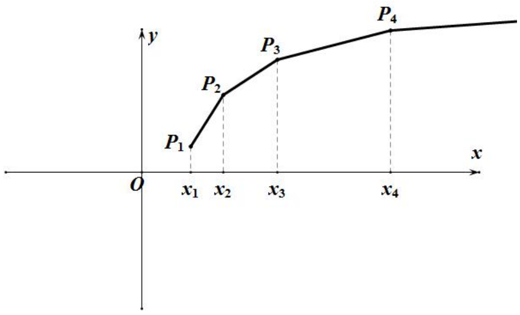
（II）用 X 表示接受乙种心理暗示的女志愿者人数，求 X 的分布列与数学期望 EX.

（19）（本小题满分 12 分）

已知$\{x_n\}$是各项均为正数的等比数列，且 $x_1+x_2=3$，$x_3-x_2=2$

（Ⅰ）求数列$\{x_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）如图，在平面直角坐标系 xOy 中，依次连接点 $P_1(x_1, 1)$，$P_2(x_2, 2)$…$P_{n+1}(x_{n+1}, n+1)$得到折线 $P_1 P_2…P_{n+1}$，求由该折线与直线 $y=0$，$x=x_1, x=x_{n+1}$ 所围成的区域的面积 T_n .



（20）（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=x^2+2\cos x$， $g(x)=e^x(\cos x-\sin x+2x-2)$，其中 $e=2.71828\cdots$ 是自然对数的底数.

（Ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(\pi, f(\pi))$ 处的切线方程；

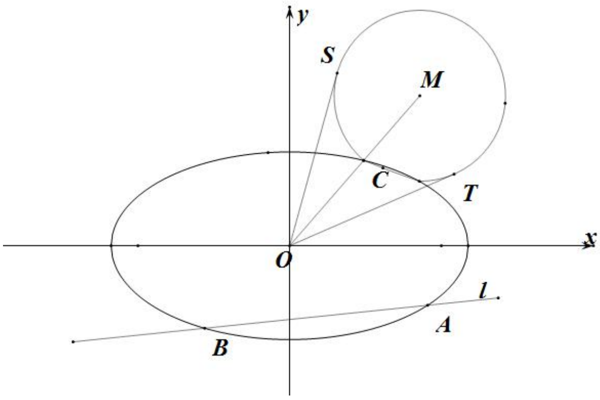
（Ⅱ）令 $h(x)=g(x)-af(x)(a\in R)$，讨论 $h(x)$ 的单调性并判断有无极值，有极值时求出极值.

(21)（本小题满分 14 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 E： $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ，焦距为 2 .

（Ⅰ）求椭圆 E 的方程；

（II）如图，动直线l：$y=k_1x-\frac{\sqrt{3}}{2}$交椭圆$E$于$A,B$两点，$C$是椭圆$E$上一点，直线$OC$的斜率为$k_2$，且$k_1k_2=\frac{\sqrt{2}}{4}$，$M$是线段$OC$延长线上一点，且$|MC|:|AB|=2:3$，$\odot M$的半径为$|MC|$，$OS,OT$是$\odot M$的两条切线，切点分别为$S,T$.求$\angle SOT$的最大值，并求取得最大值时直线$l$的斜率.



2017 年普通高等学校招生全国统一考试（山东卷）

理科数学试题参考答案

一、选择题

（1）D （2）A （3）B （4）C （5）C

（6）D （7）B （8）C （9）A （10）B

二、填空题

（11）4 （12）$\frac{\sqrt{3}}{3}$ (13) $2+\frac{\pi}{2}$ （14）$y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$ （15）①④

三、解答题：本大题共 **6** 小题，共 **75** 分。

（16）

解：（Ⅰ）因为 $f(x)=\sin(\omega x-\frac{\pi}{6})+\sin(\omega x-\frac{\pi}{2})$，

所以 $f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\omega x-\frac{1}{2}\cos\omega x-\cos\omega x$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\omega x-\frac{3}{2}\cos\omega x$

$=\sqrt{3}(\frac{1}{2}\sin\omega x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\omega x)$

$=\sqrt{3}(\sin\omega x-\frac{\pi}{3})$

由题设知 $f(\frac{\pi}{6})=0$，

所以 $\frac{\omega\pi}{6}-\frac{\pi}{3}=k\pi$，$k\in Z$.

故 $\omega=6k+2$，$k\in Z$，又 $0<\omega<3$，

所以 $\omega=2$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）得 $f(x)=\sqrt{3}\sin(2x-\frac{\pi}{3})$

所以 $g(x)=\sqrt{3}\sin(x+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3})=\sqrt{3}\sin(x-\frac{\pi}{12})$.

因为 $x\in[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$，

所以 $x-\frac{\pi}{12}\in[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}]$，

当 $x-\frac{\pi}{12}=-\frac{\pi}{3}$，

即 $x=-\frac{\pi}{4}$ 时，$g(x)$ 取得最小值 $-\frac{3}{2}$.

（17）

解：（Ⅰ）因为 $AP\perp BE$，$AB\perp BE$，

AB，$AP\subset$ 平面 ABP，$AB\cap AP=A$，

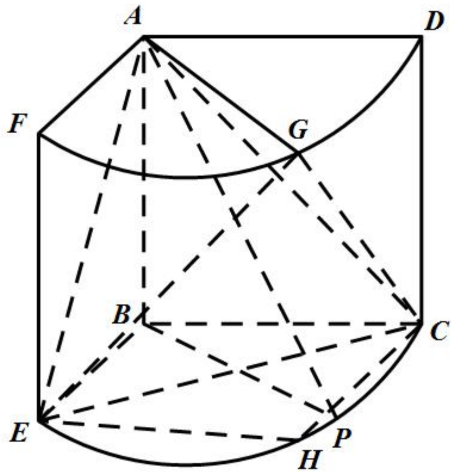
所以 $BE\perp$ 平面 ABP，

又 $BP\subset$ 平面 ABP，

所以 $BE\perp BP$，又 $\angle EBC=120°$，

因此 $\angle CBP=30°$

（Ⅱ）解法一：



取$\overset{\frown}{EC}$的中点H，连接EH，GH，CH.

因为$\angle EBC=120^\circ$，

所以四边形$BEHC$为菱形，

所以$AE=GE=AC=GC=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$.

取AG中点M，连接EM，CM，EC.

则$EM\perp AG$，$CM\perp AG$，

所以$\angle EMC$为所求二面角的平面角.

又$AM=1$，所以$EM=CM=\sqrt{13-1}=2\sqrt{3}$.

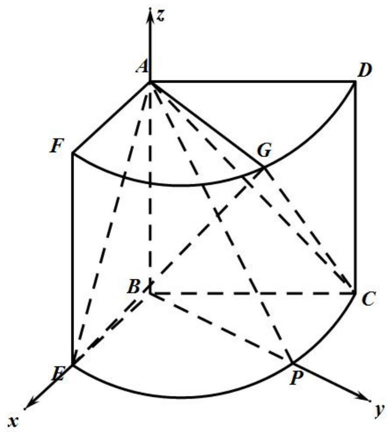
在ΔBEC中，由于$\angle EBC=120^\circ$，

由余弦定理得$EC^2=2^2+2^2-2\times2\times2\times\cos120^\circ=12$，

所以$EC=2\sqrt{3}$，因此ΔEMC为等边三角形，

故所求的角为60°.

解法二：



以 B 为坐标原点，分别以 BE，BP，BA 所在的直线为 x，y，z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系.

由题意得 $A(0,0,3)$ $E(2,0,0)$，$G(1,\sqrt{3},3)$，$C(-1,\sqrt{3},0)$，故 $\overrightarrow{AE}=(2,0,-3)$，

$\overrightarrow{AG}=(1,\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{CG}=(2,0,3)$，

设 $m=(x_1,y_1,z_1)$ 是平面 AEG 的一个法向量.

由 $\begin{cases} m\cdot\overrightarrow{AE}=0 \\ m\cdot\overrightarrow{AG}=0 \end{cases}$ 可得 $\begin{cases} 2x_1-3z_1=0, \\ x_1+\sqrt{3}y_1=0, \end{cases}$

取 $z_1=2$，可得平面 AEG 的一个法向量 $m(3,-\sqrt{3},2)$.

设 $n=(x_2,y_2,z_2)$ 是平面 ACG 的一个法向量.

由 $\begin{cases} n\cdot\overrightarrow{AG}=0 \\ n\cdot\overrightarrow{CG}=0 \end{cases}$ 可得 $\begin{cases} x_2+\sqrt{3}y_2=0, \\ 2x_2+3z_2=0, \end{cases}$

取 $z_2=-2$，可得平面 ACG 的一个法向量 $n=(3,-\sqrt{3},-2)$.

所以 $\cos<m,n>=\dfrac{m\cdot n}{|m|\cdot|n|}=\dfrac{1}{2}$.

因此所求的角为 $60°$.

（18）

解：（I）记接受甲种心理暗示的志愿者中包含 A_1 但不包含 B_1 的事件为 M，则

$$P(M)=\frac{C_8^4}{C_{10}^5}=\frac{5}{18}.$$

(II)由题意知 X 可取的值为：$0,1,2,3,4$.则

$$P(X=0)=\frac{C_6^5}{C_{10}^5}=\frac{1}{42},$$

$$P(X=1)=\frac{C_6^4C_4^1}{C_{10}^5}=\frac{5}{21},$$

$$P(X=2)=\frac{C_6^3C_4^2}{C_{10}^5}=\frac{10}{21},$$

$$P(X=3)=\frac{C_6^2C_4^3}{C_{10}^5}=\frac{5}{21},$$

$$P(X=4)=\frac{C_6^1C_4^4}{C_{10}^5}=\frac{1}{42},$$

因此 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{42}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{1}{42}$

X 的数学期望是

$$EX=0\times P(X=0)+1\times P(X=1)+2\times P(X=2)+3\times P(X=3)+4\times P(X=4)$$

$$=0+1\times\frac{5}{21}+2\times\frac{10}{21}+3\times\frac{5}{21}+4\times\frac{1}{42}$$

$=2$

（19）

解：(I)设数列 $\{x_n\}$ 的公比为 q ，由已知 $q>0$.

由题意得$\begin{cases} x_1 + x_1 q = 3 \\ x_1 q^2 - x_1 q = 2 \end{cases}$，所以$3q^2 - 5q - 2 = 0$，

因为$q > 0$,所以$q = 2, x_1 = 1$，

因此数列$\{x_n\}$的通项公式为$x_n = 2^{n-1}$.

（II）过$P_1, P_2, P_3, \ldots\ldots P_{n+1}$向$x$轴作垂线，垂足分别为$Q_1, Q_2, Q_3, \ldots\ldots Q_{n+1}$，

由(I)得$x_{n+1} - x_n = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$.

记梯形$P_n P_{n+1} Q_{n+1} Q_n$的面积为b_n.

由题意$b_n = \dfrac{(n+n+1)}{2} \times 2^{n-1} = (2n+1) \times 2^{n-2}$，

所以

$T_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots\ldots + b_n$

$= 3 \times 2^{-1} + 5 \times 2^0 + 7 \times 2^1 + \ldots\ldots + (2n-1) \times 2^{n-3} + (2n+1) \times 2^{n-2}$ ①

又$2T_n = 3 \times 2^0 + 5 \times 2^1 + 7 \times 2^2 + \ldots\ldots + (2n-1) \times 2^{n-2} + (2n+1) \times 2^{n-1}$ ②

①-②得

$-T_n = 3 \times 2^{-1} + (2 + 2^2 + \ldots\ldots + 2^{n-1}) - (2n+1) \times 2^{n-1}$

$= \dfrac{3}{2} + \dfrac{2(1-2^{n-1})}{1-2} - (2n+1) \times 2^{n-1}$.

所以$T_n = \dfrac{(2n-1) \times 2^n + 1}{2}$.

（20）（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）由题意$f(\pi) = \pi^2 - 2$

又$f'(x) = 2x - 2\sin x$，

所以 $f'(\pi)=2\pi$，

因此 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(\pi,f(\pi))$ 处的切线方程为

$y-(\pi^2-2)=2\pi(x-\pi)$，

即 $y=2\pi x-\pi^2-2$.

（II）由题意得 $h(x)=e^x(\cos x-\sin x+2x-2)-a(x^2+2\cos x)$，

因为 $h'(x)=e^x(\cos x-\sin x+2x-2)+e^x(-\sin x-\cos x+2)-a(2x-2\sin x)$

$=2e^x(x-\sin x)-2a(x-\sin x)$

$=2(e^x-a)(x-\sin x)$，

令 $m(x)=x-\sin x$

则 $m'(x)=1-\cos x\geq 0$

所以 $m(x)$ 在 R 上单调递增.

因为 $m(0)=0$,

所以 当 $x>0$ 时，$m(x)>0$,

当 $x<0$ 时，$m(x)<0$

(1)当 $a\leq 0$ 时，$e^x-a>0$

当 $x<0$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，

当 $x>0$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，

所以 当 $x=0$ 时 $h(x)$ 取得极小值，极小值是 $h(0)=-2a-1$；

(2)当 $a>0$ 时，$h'(x)=2\left(e^{x}-e^{\ln a}\right)(x-\sin x)$

由 $h'(x)=0$ 得 $x_1=\ln a$，$x_2=0$

①当 $0<a<1$ 时，$\ln a<0$，

当 $x\in(-\infty,\ln a)$ 时，$e^{x}-e^{\ln a}<0,h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增；

当 $x\in(\ln a,0)$ 时，$e^{x}-e^{\ln a}>0,h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减；

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$e^{x}-e^{\ln a}>0,h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增.

所以 当 $x=\ln a$ 时 $h(x)$ 取得极大值.

极大值为 $h(\ln a)=-a\left[\ln^{2}a-2\ln a+\sin(\ln a)+\cos(\ln a)+2\right]$，

当 $x=0$ 时 $h(x)$ 取到极小值，极小值是 $h(0)=-2a-1$；

②当 $a=1$ 时，$\ln a=0$，

所以 当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时，$h'(x)\geq 0$，函数 $h(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，无极值；

③当 $a>1$ 时，$\ln a>0$

所以 当 $x\in(-\infty,0)$ 时， $e^x-e^{\ln a}<0$ ， $h'(x)>0,h(x)$ 单调递增；

当 $x\in(0,\ln a)$ 时， $e^x-e^{\ln a}<0$ ， $h'(x)<0,h(x)$ 单调递减；

当 $x\in(\ln a,+\infty)$ 时， $e^x-e^{\ln a}>0$ ， $h'(x)>0,h(x)$ 单调递增；

所以 当 $x=0$ 时 $h(x)$ 取得极大值，极大值是 $h(0)=-2a-1$；

当 $x=\ln a$ 时 $h(x)$ 取得极小值.

极小值是 $h(\ln a)=-a\left[\ln^2 a-2\ln a+\sin(\ln a)+\cos(\ln a)+2\right]$.

综上所述：

当 $a\le 0$ 时， $h(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

函数 $h(x)$ 有极小值，极小值是 $h(0)=-2a-1$；

当 $0<a<1$ 时，函数 $h(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 和 $(0,\ln a)$ 和 $(0,+\infty)$ 上单调递增，在 $(\ln a,0)$ 上单调递减，函数 $h(x)$ 有极大值，也有极小值，

极大值是 $h(\ln a)=-a\left[\ln^2 a-2\ln a+\sin(\ln a)+\cos(\ln a)+2\right]$

极小值是 $h(0)=-2a-1$；

当 $a=1$ 时，函数 $h(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，无极值；

当 $a>1$ 时，函数 $h(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(\ln a,+\infty)$ 上单调递增，

在 $(0,\ln a)$ 上单调递减，函数 $h(x)$ 有极大值，也有极小值，

极大值是 $h(0)=-2a-1$；学 科.网

极小值是 $h(\ln a)=-a\left[\ln^2 a-2\ln a+\sin(\ln a)+\cos(\ln a)+2\right]$.

（21）

解：（I）由题意知 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$， $2c=2$，

所以 $a=\sqrt{2},b=1$，

因此 椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

（II）设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

联立方程 $\begin{cases}\frac{x^2}{2}+y^2=1,\\ y=k_1x-\frac{\sqrt{3}}{2},\end{cases}$

得 $(4k_1^2+2)x^2-4\sqrt{3}k_1x-1=0$，

由题意知 $\Delta>0$，

且 $x_1+x_2=\frac{2\sqrt{3}k_1}{2k_1^2+1},x_1x_2=-\frac{1}{2(2k_1^2+1)}$，

所以 $|AB|=\sqrt{1+k_1^2}|x_1-x_2|=\sqrt{2}\frac{\sqrt{1+k_1^2}\sqrt{1+8k_1^2}}{1+2k_1^2}$.

由题意可知圆 M 的半径 r 为 $r=\frac{2}{3}|AB|=\frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{\sqrt{1+k_1^2}\sqrt{1+8k_1^2}}{2k_1^2+1}$

由题设知 $k_1k_2=\frac{\sqrt{2}}{4}$，

所以 $k_2=\dfrac{\sqrt{2}}{4k_1}$

因此直线 OC 的方程为 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{4k_1}x$.

联立方程 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+y^2=1,\\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{4k_1}x,\end{cases}$

得 $x^2=\dfrac{8k_1^{\ 2}}{1+4k_1^{\ 2}},y^2=\dfrac{1}{1+4k_1^{\ 2}}$,

因此 $|OC|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\dfrac{1+8k_1^{\ 2}}{1+4k_1^{\ 2}}}$.

由题意可知 $\sin\dfrac{\angle SOT}{2}=\dfrac{r}{r+|OC|}=\dfrac{1}{1+\dfrac{|OC|}{r}}$,

而 $\dfrac{|OC|}{r}=\dfrac{\sqrt{\dfrac{1+8k_1^{\ 2}}{1+4k_1^{\ 2}}}}{\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\dfrac{\sqrt{1+k_1^{\ 2}}\sqrt{1+8k_1^{\ 2}}}{2k_1^{\ 2}+1}}$

$=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}\dfrac{1+2k_1^{\ 2}}{\sqrt{1+4k_1^{\ 2}}\sqrt{1+k_1^{\ 2}}}$,

令 $t=1+2k_1^{\ 2}$,

则 $t>1,\dfrac{1}{t}\in(0,1)$,

因此 $\dfrac{|OC|}{r}=\dfrac{3}{2}\dfrac{t}{\sqrt{2t^2+t-1}}=\dfrac{3}{2}\dfrac{1}{\sqrt{2+\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{t^2}}}=\dfrac{3}{2}\dfrac{1}{\sqrt{-\left(\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}}}\geq 1$，

当且仅当$\dfrac{1}{t}=\dfrac{1}{2}$，即 $t=2$ 时等号成立，此时 $k_1=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

所以 $\sin\dfrac{\angle SOT}{2}\leq\dfrac{1}{2}$，

因此$\dfrac{\angle SOT}{2}\leq\dfrac{\pi}{6}$，

所以 $\angle SOT$ 最大值为$\dfrac{\pi}{3}$.

综上所述：$\angle SOT$ 的最大值为$\dfrac{\pi}{3}$，取得最大值时直线 l 的斜率为 $k_1=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.