开封市 2023 届高三年级第三次模拟考试
文科数学

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上.

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号. 回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效.

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 复数 $z=(1+i)(1+2i)$ 的虚部为

A. -3　　B. 3　　C. $-3i$　　D. $3i$

2. 已知集合 $A=\{-1,0,1\}$，$B=\{x\mid x=ab,a,b\in A\}$，则集合 B 的真子集个数是

A. 3　　B. 4　　C. 7　　D. 8

3. 从 3 名男生，2 名女生中随机抽取 2 名学生到社区当志愿者，则正好抽取 1 名男生、1 名女生的概率是

A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{3}{10}$　　C. $\frac{2}{5}$　　D. $\frac{3}{5}$

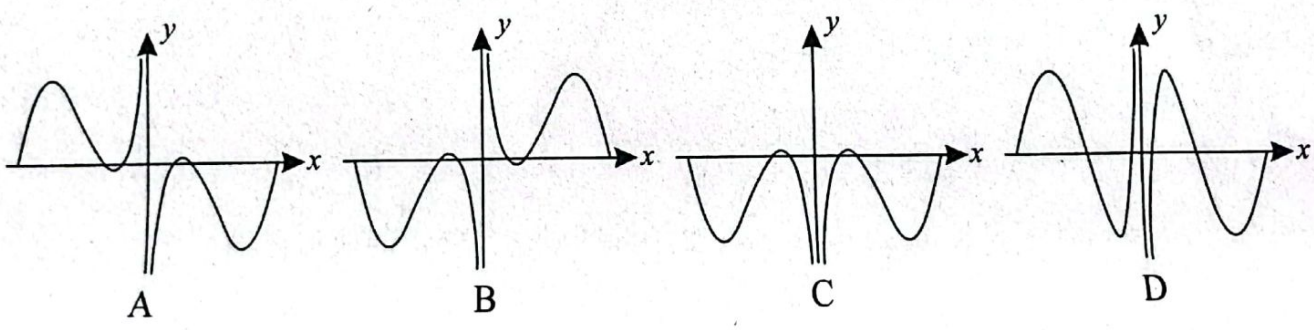
4. 记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $2(a_1+a_2)=a_2+a_3=12$，则 $S_5=$

A. 30　　B. 31　　C. 61　　D. 62

5. 已知双曲线 $x^2-my^2=1(m>0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1(-2,0)$，$F_2(2,0)$，则双曲线的渐近线方程为

A. $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$　　B. $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$　　C. $y=\pm\sqrt{2}x$　　D. $y=\pm\sqrt{3}x$

6. 函数 $f(x)=\left(x-\frac{1}{x}\right)\cos x$ 在 $\left[-\frac{3\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{3\pi}{2}\right]$ 上的图象大致为



7. 设 $a=\log_2 3$，$b=\log_3 5$，$c=\frac{3}{2}$，则

A. $a<c<b$　　B. $a<b<c$　　C. $b<c<a$　　D. $c<a<b$

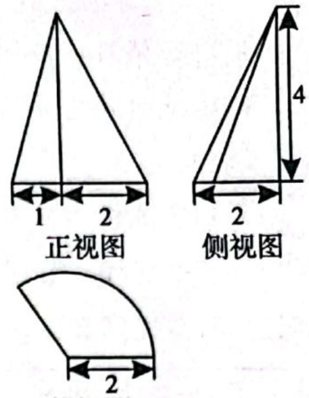
8. $\triangle ABC$ 中 $AB=7, BC=3, C=\frac{2\pi}{3}$，则$\triangle ABC$ 的面积为

A. $\frac{15\sqrt{3}}{4}$ B. $\frac{21\sqrt{3}}{4}$ C. $4\sqrt{3}$ D. $6\sqrt{3}$

9. 某几何体的三视图如图所示，其中俯视图为扇形，则该几何体的体积为

A. $\frac{2\pi}{9}$ B. $\frac{2\pi}{3}$

C. $\frac{16\pi}{3}$ D. $\frac{16\pi}{9}$



正视图 侧视图

俯视图

10. 已知函数 $f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(x)$为奇函数，$f(x+1)$为偶函数，且$\sum\limits_{k=1}^{22} f(k)=1$，则 $f(1)=$

A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

11. 等腰直角三角形 ABC 的直角顶点 A 在 x 轴的正半轴上，点 B 在 y 轴的正半轴上，点 C 在第一象限，O 为坐标原点，若$|AB|=1, \angle BAO=\frac{\pi}{8}$，则 $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=$

A. $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}$ B. $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}$ D. $\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}$

12. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，P 为棱 A_1D_1 的中点，则四棱锥 $P-ABCD$ 的外接球表面积为

A. $\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$ B. 3π C. $\frac{41\pi}{16}$ D. $\frac{41\pi}{64}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,-2)$，写出一个与 $\boldsymbol{a}$ 垂直的向量的坐标________.

14. 两条直线 $y=kx$ 和 $y=-kx$ 分别与抛物线 $y^2=2px(p>0)$相交于不同于原点的 A，B 两点，若直线 AB 经过抛物线的焦点，则 $|k|=$________.

15. 已知点 $A(1,0)$，$B(2,0)$，过点 B 作圆$(x-3)^2+(y-2)^2=5$ 的切线与 y 轴交于点 P，则 $\tan\angle APB=$________.

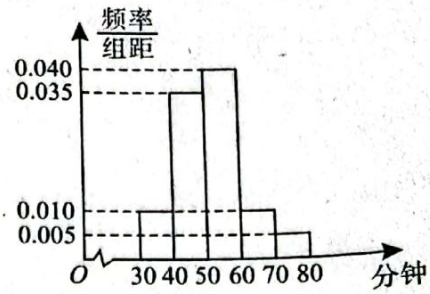
16. 若数列$\{a_n\}$满足 $a_n^2-a_{n-1}^2=p$，$(n\geqslant 2, n\in\mathbf{N}^*$，$p$ 为常数)，则称$\{a_n\}$为“等方差数列”. 记 S_n 为正项数列$\{a_n\}$的前 n 项和，已知$\{S_n\}$为“等方差数列”，且 $S_2+S_4=2+\sqrt{2}$，$a_3+a_4=2-\sqrt{2}$，则 $a_4+S_4=$________.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

(一)必考题：共 60 分.

17.(12 分)



某校为了解学生每天的校内体育锻炼情况，随机选取了 100 名学生进行调查，其中男生有 50 人. 下面是根据调查结果绘制的学生日均校内体育锻炼时间(单位：分钟)的频率分布直方图. 将日均校内体育锻炼时间在[60,80]内的学生评价为“锻炼时间达标”，已知样本中“锻炼时间达标”的学生中有 5 名女生.

(1)若该校共有 1000 名学生，请估计该校“锻炼时间达标”的学生人数；

(2)根据样本数据完成下面的 2×2 列联表，并据此判断是否有 90% 的把握认为“锻炼时间达标”与性别有关？

是否达标 性别	锻炼时间达标	锻炼时间未达标	合计
男			
女			
合计			

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

$P(K^2\geqslant k_0)$	0.10	0.050	0.010	0.001
k_0	2.706	3.841	6.635	10.828

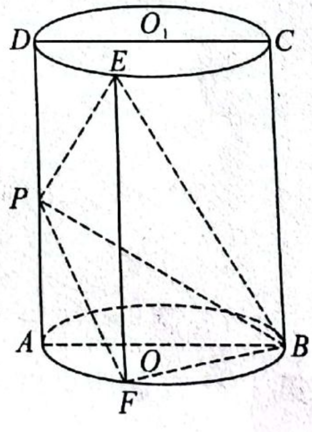
18.(12 分)

记△ABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，已知 a,b,c 成公差为 2 的等差数列，且 $\cos B=\dfrac{11}{16}$.

(1)求 b；

(2)若 D 是 AB 的中点，求 CD 的长.

19.(12 分)



如图，四边形 $ABCD$ 是圆柱 OO_1 的轴截面，EF 是圆柱的母线，P 是线段 AD 的中点，已知 $AB=4$，$BC=6$.

(1)证明：$BF\perp$平面 EPF；

(2)若直线 AB 与平面 EPF 所成角为 60°，求三棱锥 $B-EPF$ 的体积.

20.(12 分)

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，离心率为 $\frac{1}{2}$，P 为椭圆 C 上一点(除左、右顶点)，直线 PF_1,PF_2 与椭圆 C 的另一个交点分别为 A,B，且 $\overrightarrow{PF_1}=m\overrightarrow{F_1A}$，$\overrightarrow{PF_2}=n\overrightarrow{F_2B}$，当 $m=1$ 时，$|PA|=3$.

(1)求椭圆 C 的标准方程；

(2)试判断 $m+n$ 是否为定值，若是求出定值，若不是说明理由.

21.(12 分)

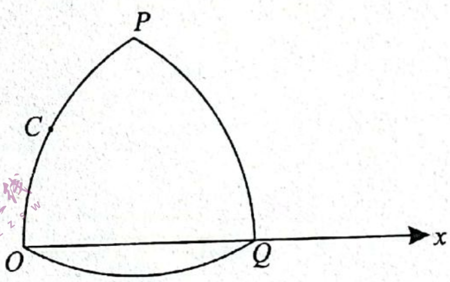
已知函数 $f(x)=\ln x+ax(a\in\mathbf{R})$.

(1)讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

(2)若 $a\geqslant 0$，且存在 $0<m<n$，使得 $f(x)$ 在 $[m,n]$ 上的值域 $B\subseteq[m,n]$，求实数 a 的取值范围.

(二)选考题：共 10 分. 请考生在 22、23 题中任选一题作答. 如果多做，则按所做的第一题计分.

22.[选修 4－4：坐标系与参数方程](10 分)



以等边三角形的每个顶点为圆心，以其边长为半径，在另两个顶点间作一段圆弧，三段圆弧围成的曲边三角形被称为勒洛三角形. 如图，在极坐标系 Ox 中，曲边三角形 OPQ 为勒洛三角形，且 $P\left(2,\frac{\pi}{3}\right)$，$Q$ 在极轴上，C 为 $\overset{\frown}{OP}$ 的中点. 以极点 O 为直角坐标原点，极轴 Ox 为 x 轴正半轴建立平面直角坐标系 xOy.

(1)求 $\overset{\frown}{OQ}$ 所在圆 P 的直角坐标方程与直线 CQ 的极坐标方程；

(2)过 O 引一条射线，分别交圆 P，直线 CQ 于 A,B 两点，证明：$|OA|\cdot|OB|$ 为定值.

23.[选修 4－5：不等式选讲](10 分)

已知函数 $f(x)=|x-a|+|x-b|$.

(1)若 $|a-b|>c$，解不等式 $f(x)>c$；

(2)若 $b=1$，且不等式 $f(x)<2-|a-2|$ 的解集非空，求 a 的取值范围.