

临沂市 2021 级普通高中学科素养水平监测试卷

数 学

2023.7

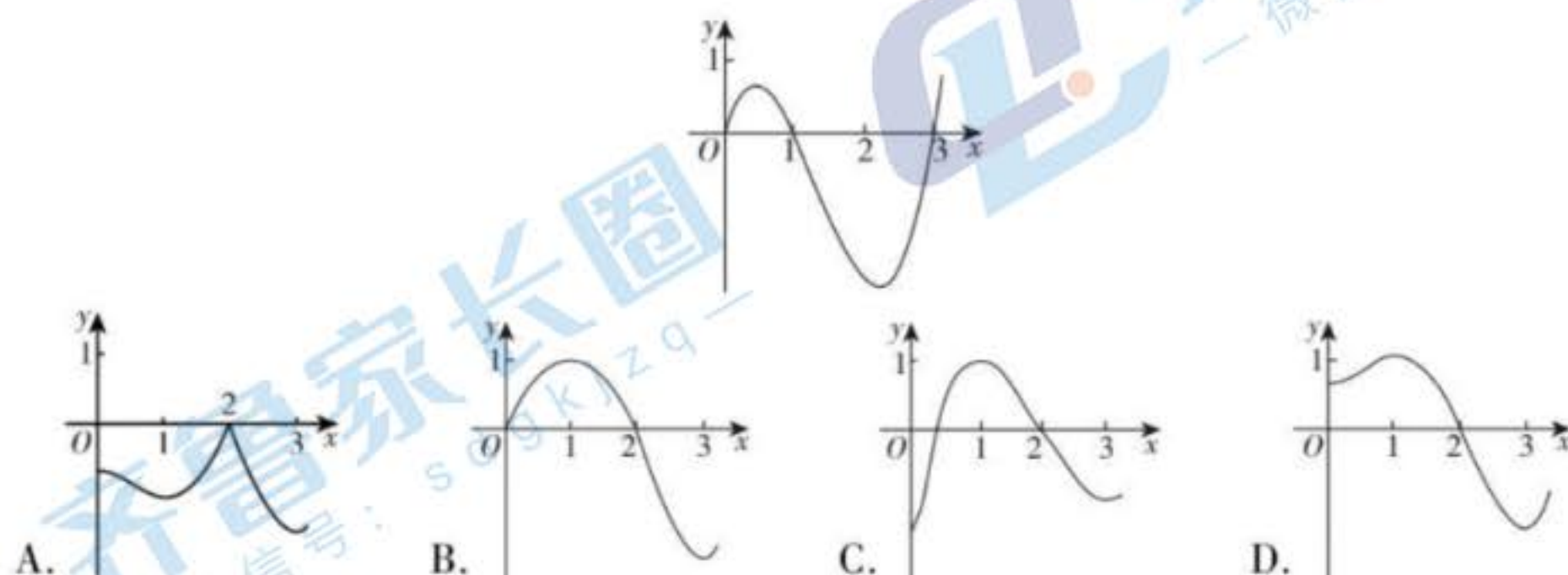
注意事项:

- 1.答卷前,考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上。
- 2.回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
- 3.考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

- 1.已知集合  $A = \{-1, 1, 2, 4\}$ ,  $B = \{x \mid |x-1| \leq 1\}$ , 则  $A \cap B =$   
A.  $\{-1, 2\}$                       B.  $\{1, 2\}$                       C.  $\{1, 4\}$                       D.  $\{-1, 4\}$
- 2.已知命题  $p: \forall x > 0, \ln(x+1) > 0$ , 则  $p$  的否定为  
A.  $\forall x > 0, \ln(x+1) \leq 0$                       B.  $\exists x > 0, \ln(x+1) \leq 0$   
C.  $\forall x < 0, \ln(x+1) \leq 0$                       D.  $\exists x \leq 0, \ln(x+1) \leq 0$
- 3.若  $2(x-1)^7 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_7x^7$ , 则  $a_1 + a_2 + \cdots + a_7 =$   
A. -2                      B. -1                      C. 1                      D. 2
- 4.函数  $f(x)$  的导函数为  $y = f'(x)$ , 则  $f'(x) = 0$  有解是  $f(x)$  有极值的  
A. 充要条件                      B. 充分不必要条件  
C. 必要不充分条件                      D. 既不充分也不必要条件
- 5.二维码与生活息息相关,我们使用的二维码主要是  $21 \times 21$  大小的,即 441 个点,根据 0 和 1 的二进制编码,一共有  $2^{441}$  种不同的码。假设我们 1 秒钟用掉 1 亿个二维码,1 万年约为  $3 \times 10^{11}$  秒,那么大约可以用(参考数据:  $\lg 2 \approx 0.3, \lg 3 \approx 0.5$ )  
A. 201 万年                      B.  $10^{201}$  万年                      C. 113 万年                      D.  $10^{113}$  万年
- 6.将六位数“724051”重新排列后得到不同的六位偶数的个数为  
A. 312                      B. 216                      C. 180                      D. 152

7. 如图是函数  $f(x)$  的导函数的图象, 则  $f(x)$  的图象大致为



8. 若  $a > 0, b > 0$ , 且  $(4a-1)(b-1) = 4$ , 则

A.  $ab$  的最小值为  $\frac{5}{2}$

B.  $ab$  的最大值为  $\frac{9}{4}$

C.  $4a+b$  的最小值为 6

D.  $a+b$  的最大值为  $\frac{7}{2}$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知随机变量  $X \sim N(10, 5^2)$ ,  $Y \sim N(12, 3^2)$ , 则

A.  $P(X \leq 15) = P(Y \leq 15)$

B.  $P(X \leq 20) > P(Y \leq 20)$

C.  $P(X \geq 0) > P(Y \geq 9)$

D.  $P(X \geq 25) > P(Y \geq 25)$

10. 已知随机变量  $X \sim B(n, \frac{1}{3})$ , 则下列结论正确的是

A. 若  $n=8$ , 则  $E(X) = \frac{8}{3}$

B. 若  $n=9$ , 则  $E(X+1) = 6$

C. 若  $D(2X+1) = 8$ , 则  $n=9$

D. 若  $D(X+2) = 6$ , 则  $n=18$

11. 已知事件  $A, B$  满足  $P(A) = 0.6, P(B) = 0.3$ , 则下列结论正确的是

A. 若  $B \subseteq A$ , 则  $P(AB) = 0.6$

B. 若  $A$  与  $B$  互斥, 则  $P(A \cup B) = 0.9$

C. 若  $P(B|A) = 0.3$ , 则  $A$  与  $B$  相互独立

D. 若  $A$  与  $B$  相互独立, 则  $P(A \bar{B}) = 0.8$

12. 对  $\forall x \in \mathbf{R}$ ,  $[x]$  表示不超过  $x$  的最大整数, 例如:  $[-3.5] = -4, [2.1] = 2, [1] = 1$ , 且有性质

①  $\forall x \in \mathbf{R}, 0 \leq x - [x] < 1$ , 性质②  $[x+1] = [x] + 1$ , 性质③  $[x] + [-x] = -1 (x \notin \mathbf{Z})$ . 十八世纪, 函数  $y = [x]$  被“数学王子”高斯采用, 因此得名为高斯函数, 人们更习惯称之为“取整函数”.

已知函数  $f(x) = (x - 4 \left[ \frac{x+2}{4} \right])^2 - 1$ , 则

A.  $f(x)$  为偶函数

B.  $f(x)$  的值域为  $[-1, 3]$

C.  $f(x)$  在  $[0, 4]$  单调

D.  $\forall x \in \mathbf{R}, f(x+4) = f(x)$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 若  $(x-a)(1+2x)^5$  的展开式中  $x^3$  的系数为 60, 则  $a =$  \_\_\_\_\_.

14. 从 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 中任取两个不同的数, 事件  $A$  为“取到的两个数的和为偶数”, 事件  $B$

为“取到的两个数均为偶数”,则  $P(B|A) =$  \_\_\_\_\_.

15. 核桃与扁桃、腰果、榛子并称为世界著名的“四大干果”,它的种植面积很广,但因地域不一样,种植出来的核桃品质也有所不同.现已知甲、乙两地盛产核桃,甲地种植的核桃空壳率为 4%,乙地种植的核桃空壳率为 6%.将两地种植出来的核桃混放在一起,已知甲地和乙地核桃数分别占总数的 45%,55%,从中任取一个核桃,则该核桃是空壳的概率为 \_\_\_\_\_.

16. 若函数  $f(x)$  满足  $f(x) = f(x + \frac{5\pi}{3})$  且  $f(\frac{\pi}{6} + x) = f(\frac{\pi}{6} - x)$ , 则称  $f(x)$  为  $M$  函数. 已知  $h(x)$ ,  $g(x)$  均为  $M$  函数, 当  $x \in [\frac{\pi}{6}, \pi]$  时,  $h(x) = \sin x$ ,  $g(x) = (\frac{e}{3})^x$ , 则方程  $h(x) = g(x)$  在  $[-\frac{2\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}]$  上所有根的和为 \_\_\_\_\_. (参考数据:  $\ln 2 \approx 0.693$ ,  $\ln 3 \approx 1.099$ )

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

某食品加工厂拟购买一批智能机器人生产花生油, 以提高生产效率, 降低生产成本. 已知购买  $x$  台机器人的总成本为  $f(x) = \frac{1}{12}x^2 + x + 3$  (单位: 万元).

(1) 要使所购买的机器人的平均成本最低, 应购买多少台机器人?

(2) 现将按 (1) 所求得的数量购买的机器人全部投入生产, 并安排  $m$  名工人操作这些机器人 (每名工人可以同时操作多台机器人). 已知每名工人操作水平无差异, 但每台机器人每日生产花生油的质量  $Q$  (单位: 吨) 与操作工人的人数有关, 且满足关系

式:  $Q(m) = \begin{cases} \frac{1}{4}m(12-m), & 1 \leq m \leq 6 \\ 9, & m > 6 \end{cases}$ . 求引进机器人后, 每台机器人日生产量达到最大值时,

操作工人的人数  $m$  的最小值.

18. (12 分)

近几年, 大健康产业快速兴起, 现已成为国民经济新的增长点, 受益于人们对健康认识的增强和新媒体的发展, 很多健康产业迎来了史无前例的发展与机遇. 某按摩椅厂家的一个经销商进行网络直播带货, 通过 5 次试销得到销量  $y$  (单位: 台) 与销售单价  $x$  (单位: 千元) 的数据如下:

|     |    |     |     |     |     |
|-----|----|-----|-----|-----|-----|
| $x$ | 6  | 6.2 | 6.4 | 6.6 | 6.8 |
| $y$ | 20 | 15  | 15  | 10  | 5   |

(1) 根据以上数据, 求  $y$  关于  $x$  的经验回归方程;

(2) 若使每次直播带货销量不低于 41 台, 预估销售单价最多是多少?

参考公式: ①  $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$ ; ②  $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$ . 参考数据:  $\sum_{i=1}^5 x_i y_i = 409$ ,  $\sum_{i=1}^5 x_i^2 = 205.2$ .

19. (12 分)

已知函数  $f(x) = xe^{x-1}$ .

(1) 判断  $f(x)$  的单调性, 并求  $f(x)$  的极值;

(2) 若函数  $g(x) = f(x) - a$  ( $a \in \mathbf{R}$ ), 求  $g(x)$  的零点个数.

20. (12 分)

为了了解某班学生喜欢下中国象棋是否与性别有关, 现对本班 50 名同学问卷调查分析, 得到如下的  $2 \times 2$  列联表:

|    | 喜欢 | 不喜欢 | 合计 |
|----|----|-----|----|
| 男  | 20 |     | 25 |
| 女  |    | 15  |    |
| 合计 |    |     |    |

(1) 补全  $2 \times 2$  列联表, 根据小概率值  $\alpha = 0.001$  的独立性检验, 能否认为喜欢下中国象棋与性别有关联?

(2) 现从该班喜欢下中国象棋的同学中, 按性别采用比例分配的分层抽样的方法抽取 6 人, 然后从这 6 人中随机抽取 2 人, 记这 2 人中喜欢下中国象棋的女同学人数为  $X$ , 求  $X$  的分布列和数学期望.

$$\text{附 } \chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, n = a+b+c+d$$

| $\alpha$        | 0.100 | 0.050 | 0.010 | 0.005 | 0.001  |
|-----------------|-------|-------|-------|-------|--------|
| $\chi_{\alpha}$ | 2.706 | 3.841 | 6.635 | 7.879 | 10.828 |

21. (12 分)

已知函数  $f(x) = \ln x - x$ .

(1) 求  $f(x)$  的图象在  $x=1$  处的切线方程;

(2) 证明:  $\exists \xi \in (a, b)$  (其中  $a > 0$ ), 使得  $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{1}{\xi} - 1$ .

22. (12 分)

甲、乙两人组团参加答题挑战赛, 规定: 每一轮甲、乙各答一道题, 若两人都答对, 该团队得 1 分; 只有一人答对, 该团队得 0 分; 两人都答错, 该团队得 -1 分. 假设甲、乙两人答对任何一道题的概率分别为  $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}$ .

(1) 记  $X$  表示该团队一轮答题的得分, 求  $X$  的分布列及数学期望  $E(X)$ ;

(2) 假设该团队连续答题  $n$  轮, 各轮答题相互独立, 记  $P_n$  表示“没有出现连续三轮每轮得 1 分”的概率.

① 求  $P_3, P_4$  的值;

② 若  $P_n = aP_{n-1} + bP_{n-2} + cP_{n-3}$  ( $n \geq 4$ ), 求  $a, b, c$ .