

肇庆市 2022—2023 学年第二学期高一年级期末教学质量检测
答案及评分标准(参考) 数学

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	A	A	A	D	B	B	B

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

题号	9	10	11	12
答案	CD	BC	ABD	AD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. $\frac{\pi}{6}$ (5 分) 14. $-\frac{1}{2}$ (5 分) 15. $\frac{3}{5}$ (5 分) 16. 9 (5 分)

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

解：(1) $\frac{1+bi}{1+2i} = \frac{(1+bi)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{(1+2b) + (b-2)i}{5} \in \mathbf{R}$, 2 分

则 $b-2=0$, 则 $b=2$. 所以 $z=1+2i$, 3 分

则 $|z| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$ 5 分

(2) $\bar{z}=1-2i$, 则 $(z+\bar{z})^2 + (z-\bar{z})^2 = 2^2 + (4i)^2 = 4-16 = -12$ 10 分

18. (12 分)

解：(1) 记抽到“5 元烧烤优惠券”为事件 A , 抽到“10 元烧烤优惠券”为事件 B , 抽到“谢谢惠顾”为事件 C , 且 $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ 2 分

故 $P(C) = 1 - P(A) - P(B) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ 4 分

(2) 记抽到总计 10 元烧烤优惠券为事件 D , 则可能一次抽到“10 元烧烤优惠券”、一次抽到“谢谢惠顾”, 记为事件 D_1 , 或者两次都抽到“5 元烧烤优惠券”, 记为事件 D_2 6 分

则 $P(D_1) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$, 8 分

$P(D_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, 10 分

$P(D) = P(D_1) + P(D_2) = \frac{1}{9} + \frac{1}{4} = \frac{13}{36}$

故该客人能抽到总计 10 元烧烤优惠券的概率为 $\frac{13}{36}$ 12 分

19. (12 分)

(1)证明:

$\left. \begin{array}{l} \text{平面 } ABCD \perp \text{平面 } EAB \\ \text{平面 } ABCD \cap \text{平面 } EAB = AB \\ AD \subset \text{平面 } ABCD \\ AD \perp AB \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} AD \perp \text{平面 } EAB \\ EF \subset \text{平面 } EAB \end{array} \right\} \Rightarrow EF \perp AD. \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

又 F 在以 AE 为直径的半圆上, 因此可以得到 $EF \perp AF$. $\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

$\left. \begin{array}{l} EF \perp AD \\ EF \perp AF \\ AD \cap AF = A \\ AD, AF \subset \text{平面 } ADF \end{array} \right\} \Rightarrow EF \perp \text{平面 } ADF. \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

(2)解: 过 F 在平面 $ABEF$ 内作 $FH \perp AB$ 交 BA 的延长线于点 H , 则 $FH \perp$ 平面 $ABCD$,
过 H 作 $GH \perp BD$ 交 BD 于点 G .

连接 FG . 易知 $FH \perp BD$, 又 $GH \perp BD$, $GH \cap FH = H$, $GH, FH \subset$ 平面 FGH ,
所以 $BD \perp$ 平面 FGH , 即 $BD \perp FG$. 又 $BD \perp GH$,
所以 $\angle FGH$ 就是所求的二面角 $F-BD-A$ 的平面角.

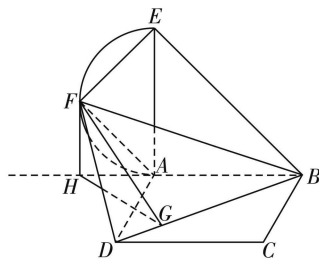
$\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

设正方形 $ABCD$ 的边长为 $2a(a > 0)$,

则 $HF = a$, $HB = 3a$, $HG = HB \sin 45^\circ = \frac{3\sqrt{2}a}{2}$. $\dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

在 $\text{Rt} \triangle FGH$ 中, $\tan \angle FGH = \frac{FH}{HG} = \frac{a}{\frac{3\sqrt{2}a}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

即二面角 $F-BD-A$ 的正切值为 $\frac{\sqrt{2}}{3}$. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$



20. (12 分)

解: (1)男生占样本总人数的 $\frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$, 所以 $n = \frac{20}{\frac{1}{3}} = 60$. $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

(2) $20 \times 60\% = 12$. 男生数学知识竞赛成绩从小到大排列为 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 9, 其中第 12 个数据为 6, 第 13 个数据为 7, 所以男生数学知识竞赛成绩的第 60 百分位数为 $\frac{6+7}{2} = 6.5$. $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

记男生数学知识竞赛成绩的平均数和方差分别为 $\bar{x}_{\text{男}}$, $s_{\text{男}}^2$.

则 $\bar{x}_{\text{男}} = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} x_i = 6$, $s_{\text{男}}^2 = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} x_i^2 - \bar{x}_{\text{男}}^2 = 3.4$. $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

(3)记女生数学知识竞赛成绩的平均数和方差分别为 $\bar{x}_{\text{女}}$, $s_{\text{女}}^2$.

则样本总平均数 $\bar{z} = \frac{1}{3} \bar{x}_{\text{男}} + \frac{2}{3} \bar{x}_{\text{女}} = 4$, $\dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

$$\text{样本总方差 } s^2 = \frac{1}{3}[s_{\text{男}}^2 + (\bar{x}_{\text{男}} - \bar{z})^2] + \frac{2}{3}[s_{\text{女}}^2 + (\bar{x}_{\text{女}} - \bar{z})^2] = 10. \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

21. (12 分)

解: (1) 设扇形半径为 r m, 则 $\frac{1}{6}\pi r^2 = \frac{5\,000}{3}\pi$, 所以 $r = 100$. $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

连接 OC , OC_1 , 因为长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $C_1C \perp$ 平面 $ABCD$, 所以 $\angle C_1DC$ 是 OC_1 与地面 OPQ 所成角, 所以 $\tan \angle C_1OC = \frac{CC_1}{OC}$;

因为 OC_1 与地面 OPQ 所成的角最大为 $\frac{\pi}{4}$,

所以 $(CC_1)_{\max} = OC(\tan \angle C_1OC)_{\max} = 100 \tan \frac{\pi}{4} = 100 \text{ m}$. $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

(2) 由(1)知 $\angle COP = \theta$, $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$, 则 $BC = 100 \sin \theta$, $OB = 100 \cos \theta$. 因为 $\tan \frac{\pi}{3} = \frac{AD}{OA} = \sqrt{3}$,

所以 $OA = \frac{AD}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}AD = \frac{\sqrt{3}}{3}BC = \frac{100\sqrt{3}}{3}\sin \theta$, $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

$AB = OB - OA = 100 \cos \theta - \frac{100\sqrt{3}}{3}\sin \theta$, $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

矩形 $ABCD$ 的面积 $S = AB \cdot BC = \left(100 \cos \theta - \frac{100\sqrt{3}}{3}\sin \theta\right) \cdot 100 \sin \theta$

$$= 10\,000 \left(\frac{1}{2} \sin 2\theta - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right)$$

$$= 5\,000 \left(\sin 2\theta + \frac{\sqrt{3}}{3} \cos 2\theta - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) = \frac{10\,000\sqrt{3}}{3} \sin \left(2\theta + \frac{\pi}{6} \right) - \frac{5\,000\sqrt{3}}{3}. \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

又 $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$, 所以 $2\theta + \frac{\pi}{6} \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$,

当 $2\theta + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, 即 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 时, $S_{\max} = \frac{5\,000\sqrt{3}}{3}$, $\dots\dots\dots 11 \text{ 分}$

故这座高楼的体积最大值 $V_{\max} = S_{\max} \cdot (CC_1)_{\max} = \frac{5\,000\sqrt{3}}{3} \times 100 = \frac{500\,000\sqrt{3}}{3} \text{ m}^3$. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

22. (12 分)

(1) 证明: 因为 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$,

所以 $b \cos A + 2a \cos B = 3a \cos C$,

$$\text{即 } bc \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + 2ac \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = 3ab \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab},$$

化简得 $a^2 + 2b^2 = 3c^2$. $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

(2) 解: 若 $\sin(B - A) + \sin C = 7 \sin A$, 则 $\sin(B - A) + \sin(B + A) = 7 \sin A$,

$$\text{即 } \sin B \cos A - \cos B \sin A + \sin B \cos A + \cos B \sin A = 7 \sin A,$$

化简得 $2 \sin B \cos A = 7 \sin A$,

所以 $\cos A = \frac{7\sin A}{2\sin B}$, 即 $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{7a}{2b}$, 化简得 $b^2 + c^2 - a^2 = 7ac$, ①. 7 分

又 $a^2 + 2b^2 = 3c^2$, ②

联立①②解得 $c = 3a$ 或 $c = -\frac{1}{5}a$ (舍去). 9 分

代入可得 $b^2 = 13a^2$ 10 分

所以 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{13a^2 + 9a^2 - a^2}{2\sqrt{13}a \cdot 3a} = \frac{7\sqrt{13}}{26}$ 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线