高三数学试题参考答案

2022.1

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.C 2.B 3.D 4.A 5.C 6.D 7.A 8.A

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对得 5 分，部分选对得 2 分，有选错的得 0 分.

9.AC 10.BCD 11.ACD 12.ABD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. -1 14. $x+y=0$ 15. $\sqrt{2}$ 16. 24

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.(10 分)

解：(1)因为 $\cos A=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

又 $0<A<\pi$，…………………………………………………… 1 分

所以 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$. …………………………………… 2 分

由正弦定理，得 $\frac{2\sqrt{10}}{\frac{2\sqrt{5}}{5}}=\frac{5}{\sin B}$，

即 $\sin B=\frac{5\times\frac{2\sqrt{5}}{5}}{2\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，…………………………………… 3 分

又 $b<a$，所以 $B<A$，…………………………………… 4 分

所以 $B=\frac{\pi}{4}$. …………………………………… 5 分

(2)方法一：

由余弦定理，得 $40=25^2+c^2-2\times 5c\times\frac{\sqrt{5}}{5}$，

整理得 $c^2-2\sqrt{5}c-15=0$，…………………………………… 6 分

解得 $c=3\sqrt{5}$，或 $c=-\sqrt{5}$(舍去). …………………………………… 7 分

因为 $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AD}$，所以 $AD=\frac{1}{3}AB=\sqrt{5}$. …………………………………… 8 分

在$\triangle ACD$ 中，由余弦定理，

得 $CD^2=5^2+(\sqrt{5})^2-2\times 5\times\sqrt{5}\times\frac{\sqrt{5}}{5}=20$，…………………………………… 9 分

18.(12 分)

解：(1)根据频率分布直方图，得 $(a+b+2c+0.024+0.020+0.004)\times 10=1$ …… 1 分

又 $a+c=2b$，$c=2a$，…………………………………… 2 分

所以 $AC^2=AD^2+CD^2$，

故 $CD\perp AB$. ………………………………………………………………………… 10 分

方法二：

因为 $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$，

所以 $(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})^2=\overrightarrow{CB}^2$，………………………………………………… 6 分

又 $|\overrightarrow{CB}|=2\sqrt{10}$，$|\overrightarrow{AC}|=5$，$\cos A=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

所以 $|\overrightarrow{AB}|^2-2\sqrt{5}|\overrightarrow{AB}|-15=0$，………………………………………… 7 分

解得 $|\overrightarrow{AB}|=3\sqrt{5}$，或 $|\overrightarrow{AB}|=-\sqrt{5}$（舍去）. ……………………………… 8 分

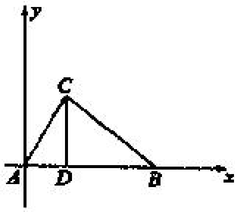
因为 $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$，

$$\begin{aligned}\text{所以 }\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB}&=(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AB}\\&=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\\&=\frac{1}{3}\times(3\sqrt{5})^2-3\sqrt{5}\times5\times\frac{\sqrt{5}}{5}=0.\end{aligned}$$ ……………………… 9 分

所以 $\overrightarrow{CD}\perp\overrightarrow{AB}$，即 $CD\perp AB$. ……………………………………………… 10 分

方法三：

如图，以 A 为坐标原点，AB 所在直线为 x 轴，建立如图所示的平面直角坐标系 xAy，



则 $B(c,0)$. ……………………………………………………… 6 分

因为 $b=5$，$\cos A=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

又 $0<A<\pi$，

所以 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2A}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$. ………………………………………………… 7 分

则 $C(b\cos A,b\sin A)$，即 $C(\sqrt{5},2\sqrt{5})$. ………………………………………… 8 分

又 $a=2\sqrt{10}$，

所以 $\sqrt{(c-\sqrt{5})^2+(0-2\sqrt{5})^2}=2\sqrt{10}$，即 $c^2-2\sqrt{5}c-15=0$，

解得 $c=3\sqrt{5}$，或 $c=-\sqrt{5}$（舍去）. ……………………………………………… 9 分

因为 $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AD}$，

所以 $D(\sqrt{5},0)$，

所以 $CD\perp AB$. ……………………………………………………………………… 10 分

又 E 是 BC 的中点，

所以 $DE\perp BC$，……………………………………………………………………… 2 分

又 $AD/\!/BC$，

所以 $AD\perp DE$，………………………………………………………………………

解得 $c=3\sqrt{5}$，或 $c=-\sqrt{5}$（舍去）. ……

因为 $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AD}$，所以 $AD=\frac{1}{3}AB=\sqrt{5}$. …… 8分

在△ACD 中，由余弦定理，

得 $CD^2=5^2+(\sqrt{5})^2-2\times5\times\sqrt{5}\times\frac{\sqrt{5}}{5}=20$， …… 9分

18.（12分）

解：(1)根据频率分布直方图，得 $(a+b+2c+0.024+0.020+0.004)\times10=1$ …… 1分

…… 2分

又 $a+c=2b$，$c=2a$， …… 3分

解得 $a=0.008$，$b=0.012$，$c=0.016$，

故数学成绩的平均分

$\bar{x}=85\times0.04+95\times0.12+105\times0.16+115\times0.20+125\times0.24+$

$135\times0.16+145\times0.08$ …… 4分

$=117.8$， …… 5分

所以数学成绩的平均分为117.8分.

(2)由题意知，数学成绩为"优"的学生有4人，物理成绩为"优"的学生有5人，

因为数学或物理成绩中至少有一科为"优"的学生总数为6，故数学和物理两科成绩都是"优"的人数为3，

故 X 的取值为0，1，2，3， …… 6分

$P(X=0)=\frac{C_3^3}{C_6^3}=\frac{1}{20}$， …… 7分

$P(X=1)=\frac{C_3^1C_3^2}{C_6^3}=\frac{9}{20}$， …… 8分

$P(X=2)=\frac{C_3^2C_3^1}{C_6^3}=\frac{9}{20}$， …… 9分

$P(X=3)=\frac{C_3^3}{C_6^3}=\frac{1}{20}$. …… 10分

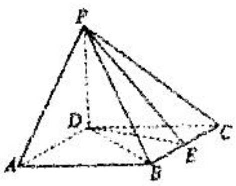
所以 X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$

…… 11分

故 $E(X)=0\times\frac{1}{20}+1\times\frac{9}{20}+2\times\frac{9}{20}+3\times\frac{1}{20}=\frac{3}{2}$. …… 12分

19.（12分）



(1)证明：方法一：

连接 DE，BD，因为底面 $ABCD$ 是菱形，且∠$BAD=60°$，

所以 $BD=CD=BC$， …… 1分

又 E 是 BC 的中点，

所以 $DE\perp BC$，…………………………………… 2 分

又 $AD/\!/BC$，

所以 $AD\perp DE$，…………………………………… 3 分

因为 $PD\perp$ 底面 $ABCD$，

$AD\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $PD\perp AD$. …………………………………… 4 分

又 $PD\cap DE=D$，$PD\subset$ 平面 PDE，$DE\subset$ 平面 PDE，

所以 $AD\perp$ 平面 PDE，…………………………………… 5 分

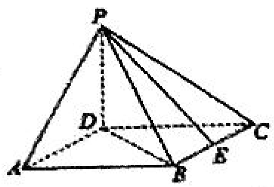
又 $PE\subset$ 平面 PDE，

所以 $AD\perp PE$. …………………………………… 6 分.

方法二：

连接 BD，因为底面 ABCD 是菱形，且 $\angle BAD=60^\circ$，

所以 $BD=CD$. …………………………………… 1 分



又 $PD\perp$ 底面 $ABCD$，

$BD\subset$ 底面 $ABCD$，$CD\subset$ 底面 $ABCD$，

所以 $PD\perp BD$，$PD\perp CD$，…………………………………… 2 分

所以 $\triangle PBD\cong\triangle PCD$，

所以 $PB=PC$. …………………………………… 3 分

又 E 是 BC 的中点，

所以 $BC\perp PE$. …………………………………… 4 分

又 $AD/\!/BC$，…………………………………… 5 分

所以 $AD\perp PE$. …………………………………… 6 分

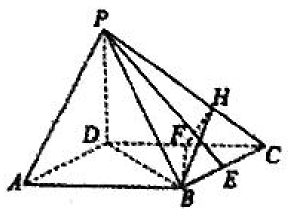
(2)方法一：

取 CD 的中点 F，连接 BF，过 F 作 $FH\perp PC$，垂足为 H，

连接 BH. 因为 $BF\perp CD$，$BF\perp PD$，

所以 $BF\perp$ 平面 PCD，所以 $PC\perp BF$， …………………… 7 分

又 $FH\cap BF=F$，所以 $PC\perp$ 平面 BFH，



所以 $PC\perp BH$，故 $\angle BHF$ 是二面角 B-PC-D 的平面角. …………………… 8 分

因为 $PA=PC$，$AC=2\sqrt{3}$，

又 $PA\perp PC$，

所以 $PA=\sqrt{6}$，…………………………………………………………………… 9 分

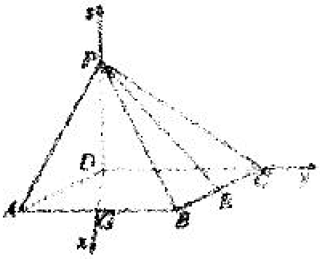
所以 $PD=\sqrt{PA^2-AD^2}=\sqrt{2}$，……………………………………………………… 10 分

因为 $BF=\sqrt{3}$，$FH=\frac{\sqrt{3}}{3}$，在 Rt$\triangle BFH$ 中，$BH=\frac{\sqrt{30}}{3}$，则 $\cos\angle BHF=\frac{FH}{BH}=\frac{\sqrt{10}}{10}$，

…………………………………………………………………………………… 11 分

所以二面角 B-PC-D 的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$．…………………………………………… 12 分

方法二：



取 AB 的中点 G，连接 DG，则 $DG\perp DC$，

由题意知，$PD\perp DG$，$PD\perp DC$，

故以 D 为坐标原点，[illegible]，DP 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的[illegible]直角坐标系 D-xyz，则

$A(\sqrt{3},-1,0)$，$C(0,2,0)$．

设 $P(0,0,a)(a>0)$，则 $\overrightarrow{AP}=$[illegible]$1,a)$，$\overrightarrow{CP}=(0,-2,a)$，

因为 $PA\perp PC$，

所以 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{CP}=0$，即 $-2+a^2=0$，

解得 $a=\sqrt{2}$．…………………………………………………………………………… 7 分

所以 $P(0,0,\sqrt{2})$，又 $B(\sqrt{3},1,0)$，

所以 $\overrightarrow{CP}=(0,-2,\sqrt{2})$，$\overrightarrow{CB}=(\sqrt{3},-1,0)$．

设 $n_1=(x,y,z)$ 是平面 PBC 的法向量，则

$\begin{cases}n_1\cdot\overrightarrow{CP}=0,\\ n_1\cdot\overrightarrow{CB}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-2y+\sqrt{2}z=0,\\ \sqrt{3}x-y=0,\end{cases}$ …………………………………………… 8 分

取 $x=1$，则 $y=\sqrt{3}$，$z=\sqrt{6}$，于是 $n_1=(1,\sqrt{3},\sqrt{6})$ 是平面 PBC 的一个法向量．…… 9 分

因为 x 轴垂直于平面 PCD，所以 $n_2=(1,0,0)$ 是平面 PCD 的一个法向量． …… 10 分

则 $\cos\langle n_1,n_2\rangle=\frac{n_1\cdot n_2}{|n_1||n_2|}=\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$，……………………………………… 11 分

所以二面角 B-PC-D 的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$．…………………………………………… 12 分

20.(12分)

解：(1)由题意，得$\begin{cases}a_1+a_2+a_3=7, & ①\\ a_4+a_5+a_6=56, & ②\end{cases}$ ………………………… 2分

②÷①，得 $q^3=8$，解得 $q=2$，所以 $a_1=1$。 ………………………… 3分

所以 $a_n=2^{n-1}$。 ………………………… 4分

(2)由(1)知，$a_i=2^{i-1}$，$a_{i+1}=2^i$， ………………………… 5分

又 $a_i, m_1, m_2, m_3, \cdots, m_i, a_{i+1}$ 成等差数列，

所以 $a_i+m_1+m_2+m_3+\cdots+m_i+a_{i+1}=\dfrac{(i+2)(2^{i-1}+2^i)}{2}$ ………………………… 7分

$=(i+2)(2^{i-2}+2^{i-1})=3(i+2)2^{i-2}$。 ………………………… 8分

若 a_i 和 $a_{i+1}(i\in N^*)$ 之间插入的 i 个数为一组数，则在数列$\{b_n\}$的前21项中，就是在 a_1 到 a_6 每两项之间各插入一组数，共插入5组。

所以 $T_{21}=3(3\times2^{-1}+4\times2^0+5\times2^1+6\times2^2+7\times2^3)-(2^1+2^2+2^3+2^4)$ ……… 10分

$=\dfrac{9}{2}+282-30$ ………………………… 11分

$=\dfrac{513}{2}$。 ………………………… 12分

21.(12分)

解：(1)由题意，得$\begin{cases}c=2,\\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{6}}{3},\end{cases}$ ………………………… 2分

解得 $a=\sqrt{6}$。又 $a^2=b^2+c^2$，解得 $b^2=2$， ………………………… 3分

所以椭圆 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{2}=1$。 ………………………… 4分

(2)由 $P(3,m)(m>0)$，则直线 PF 的斜率为 $k_{PF}=\dfrac{m-0}{3-2}=m$，

方法一：

设直线 AB 的斜率为 k，则 $k=-\dfrac{1}{m}$，直线 AB 的方程为 $y=-\dfrac{1}{m}(x-2)$，………… 5分

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

由$\begin{cases}y=-\dfrac{1}{m}(x-2),\\ \dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{2}=1\end{cases}$ 消去 y，得 $(m^2+3)x^2-12x+12-6m^2=0$。 ………………………… 6分

22.(12分)

解：(1)要证 $\ln b-\ln a<\dfrac{b-a}{\sqrt{ab}}$，

$\Delta=(-12)^2-4(m^2+3)(12-6m^2)=24m^2(m^2+1)>0$, ………………………… 7 分

$x_1+x_2=\frac{12}{m^2+3}, x_1x_2=\frac{12-6m^2}{m^2+3}$.

则 $|AB|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\sqrt{1+\frac{1}{m^2}}\times\frac{\sqrt{\Delta}}{m^2+3}=\frac{2\sqrt{6}(m^2+1)}{m^2+3}$. ……………… 8 分

原点 O 到直线 AB 的距离 $d=\frac{2}{\sqrt{m^2+1}}$, ………………………………………… 9 分

所以 $S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{6}(m^2+1)}{m^2+3}\times\frac{2}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{2\sqrt{6}\sqrt{m^2+1}}{m^2+3}$. ………………………… 10 分

令 $t=\sqrt{m^2+1}(t>1)$，所以 $m^2=t^2-1$,

$S_{\triangle OAB}=\frac{2\sqrt{6}t}{t^2+2}=\frac{2\sqrt{6}}{t+\frac{2}{t}}\leqslant\frac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}=\sqrt{3}$（当且仅当 $t=\frac{2}{t}$，即 $t=\sqrt{2}$ 时，上式等号成立）.

所以 $\triangle OAB$ 面积的最大值为 $\sqrt{3}$. ……………………………………………………… 12 分

方法二：

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，直线 AB 的方程为 $x=ny+2$，其中 $\frac{1}{n}=-\frac{1}{m}$，即 $n=-m$，

…………………………………………………………………………………………… 5 分

由 $\begin{cases}x=ny+2,\\ \frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1\end{cases}$ 消去 x，得 $(n^2+3)y^2+4ny-2=0$, ……………………………… 6 分

$\Delta=(4n)^2-4\times(n^2+3)\times(-2)=24(n^2+1)>0$, ……………………………… 7 分

$y_1+y_2=\frac{-4n}{n^2+3}, y_1y_2=\frac{-2}{n^2+3}$,

$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}|OF|\cdot|y_1-y_2|=\frac{1}{2}\times2\times\frac{\sqrt{\Delta}}{n^2+3}=\frac{2\sqrt{6}\sqrt{n^2+1}}{n^2+3}$, ……………………… 10 分

令 $t=\sqrt{n^2+1}(t>1)$，所以 $n^2=t^2-1$,

$S_{\triangle OAB}=\frac{2\sqrt{6}t}{t^2+2}=\frac{2\sqrt{6}}{t+\frac{2}{t}}\leqslant\frac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}=\sqrt{3}$（当且仅当 $t=\frac{2}{t}$，即 $t=\sqrt{2}$ 时，上式等号成立）.

所以 $\triangle OAB$ 面积的最大值为 $\sqrt{3}$. ……………………………………………………… 12 分

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,

由 $\begin{cases} y=-\dfrac{1}{m}(x-2), \\ \dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{2}=1 \end{cases}$ 消去 y,得 $(m^2+3)x^2-12x+12-6m^2=0$, ………………… 6分

22.(12分)

解:(1)要证 $\ln b-\ln a<\dfrac{b-a}{\sqrt{ab}}$,

只需证 $\ln\dfrac{b}{a}<\dfrac{\frac{b}{a}-1}{\sqrt{\frac{b}{a}}}$,即证 $\ln\dfrac{b}{a}-\dfrac{\frac{b}{a}-1}{\sqrt{\frac{b}{a}}}<0$. ………………………… 2分

令 $\dfrac{b}{a}=t$,则 $t>1$.

只需证 $\ln t-\dfrac{t-1}{\sqrt{t}}<0$. ………………………… 3分

设 $h(t)=\ln t-\dfrac{t-1}{\sqrt{t}}(t>1)$,

则 $h'(t)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{\sqrt{t}-\frac{t-1}{2\sqrt{t}}}{t}=-\dfrac{(\sqrt{t}-1)^2}{2t\sqrt{t}}<0$. ………………………… 4分

所以 $h(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递减.

所以 $h(t)<h(1)=0$,命题得证. ………………………… 5分

(2)因为存在 $x_1>x_2>0$,使 $f(x_1)=f(x_2)$,

所以 $\ln x_1+\dfrac{1}{2}\sin x_1-x_1-1=\ln x_2+\dfrac{1}{2}\sin x_2-x_2-1$,

所以 $x_1-x_2-\dfrac{1}{2}(\sin x_1-\sin x_2)=\ln x_1-\ln x_2$. ………………………… 6分

设 $g(x)=x-\sin x$,则 $g'(x)=1-\cos x\geqslant 0$,

所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增, ………………………… 7分

所以 $g(x_1)>g(x_2)$,即 $x_1-\sin x_1>x_2-\sin x_2$,

所以 $x_1-x_2>\sin x_1-\sin x_2$, ………………………… 8分

所以 $x_1-x_2-\dfrac{1}{2}(\sin x_1-\sin x_2)>x_1-x_2-\dfrac{1}{2}(x_1-x_2)=\dfrac{1}{2}(x_1-x_2)$, ………… 9分

所以 $\dfrac{1}{2}(x_1-x_2)<\ln x_1-\ln x_2$, ………………………… 10分

由(1)知 $\ln x_1-\ln x_2<\dfrac{x_1-x_2}{\sqrt{x_1x_2}}$,

所以 $\dfrac{1}{2}(x_1-x_2)<\dfrac{x_1-x_2}{\sqrt{x_1x_2}}$, ………………………… 11分

所以 $\sqrt{x_1x_2}<2$,即 $x_1x_2<4$. ………………………… 12分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。