保密★启用前

准考证号______________________________姓名_____

（在此卷上答题无效）

名校联盟全国优质校2022届高三大联考

数学试题

2022.2

本试卷共4页，考试时间120分钟，总分150分。

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若集合 $A=\{y|y=2^x,x\geq 0\}$，$B=\{x|y=\log_2(2-x)\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{x|1<x<2\}$　B. $\{x|x\geq 1\}$　C. $\{x|1\leq x<2\}$　D. $\{x|x<2\}$

2. 若复数 z 满足 $z=\frac{3-2i}{1+i}$，则 z 在复平面内对应的点在

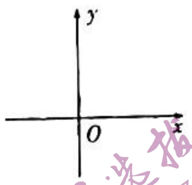
A. 第一象限　B. 第二象限　C. 第三象限　D 第四象限

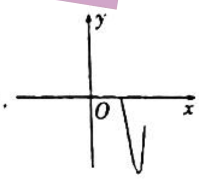
3. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，则“a_5,a_7 是方程 $x^2+2022x+1=0$ 的两实根”是“$a_6=1$，或 $a_6=-1$”的

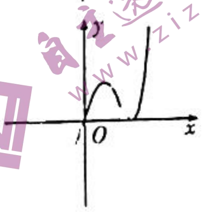
A. 充分不必要条件　B. 必要不充分条件

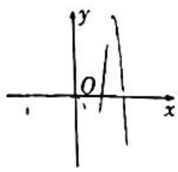
C. 充要条件　D. 既不充分也不必要条件

4. 函数 $f(x)=(3x-x^3)\sin x$ 的部分图象大致为

A


B.


C.


D.


5. 从4名男同学和3名女同学中任选2名同学，在选到的都是同性别同学的条件下，都是男同学的概率是

A. $\frac{3}{5}$　　B. $\frac{4}{7}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{2}{3}$

6. 已知 $a=2^{0.5}$，$b=\log_3 6$，$c=\log_4 8$，则 a，b，c 的大小关系是

A. $a>b>c$　　B. $b>c>a$　　C. $b>a>c$　　D. $c>a>b$

7. 若 $\cos 2\alpha = 1+2\cos\alpha$，则 $\sin^2\alpha+\sin^4\alpha$ 的值为

A. $\sqrt{5}-1$　　B. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$　　C. 1　　D. $\sqrt{2}$

8. 传说，意大利的西西里岛有个山洞是用来关押罪犯的，罪犯们曾多次密谋商议逃跑，但不管多完美的计划都会被狱卒发现. 原来山洞内的空间是一个椭球体，最大截面部分是一个椭圆面，罪犯和狱卒所待的地方正好是椭圆的两个焦点，罪犯们说的话经过洞壁的反射，最终都传向了狱卒所在的地方，即椭圆的另一个焦点，这里面蕴含着椭圆的光学性质. 请利用椭圆的该性质解决下列问题：已知 P 是椭圆 C：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 上的点，F_1，F_2 是椭圆 C 的左右焦点，$\cos\angle F_1PF_2=\frac{3}{4}$，$O$ 为坐标原点，O 到椭圆 C 在 P 处的切线的距离为

A. $\frac{3}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{14}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{14}}{3}$　　D. $\frac{5}{3}$

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。

9. 在研究某种产品的零售价 x（单位：元）与销售量 y（单位：万件）之间的关系时，根据所得数据得到如下所示的对应表：

x	12	14	16	18	20
y	17	16	14	13	11

利用最小二乘法计算数据，得到的回归直线方程为：$\hat{y}=\hat{b}x+26.2$，则下列说法中正确的是

A. $\hat{b}>0$

B. $\hat{b}<0$

C. 回归直线必过点（16，14.2）

D. 若该产品的零售价定为22元，则销售量一定是9.7万件

10. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-1,2)$，$\boldsymbol{b}=(1,m)$，则

A. 若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直，则 $m=\frac{1}{2}$　　B. 若 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$，则 m 的值为 -2

C. 若 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，则 $m=2$　　D 若 $m=3$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $45°$

11. 已知$\{a_n\}$是正项等差数列，其公差为d，若存在常数c，使得对任意正整数n均有$\frac{2}{a_{n+1}}=\frac{c}{a_n}+\frac{a_n}{c}$，则以下判断正确的是

A. $d>0$　　B. $d=0$　　C. $c>1$　　D. $0<c\leqslant 1$

12. 已知A，B，C，D是表面积为20π的球体表面上四点，且$AB=2$，$CD=4$，则

A. 若$AB/\!/CD$，则平行直线AB与CD间距离的最大值为3

B. 若$AB/\!/CD$，则平行直线AB与CD间距离的最小值为$\sqrt{3}$

C. 若A，B，C，D四点能构成三棱锥，则该三棱锥体积的最大值为4

D. 若$AC=2\sqrt{5}$，则$AC\perp BD$

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 现有一个橡皮泥制作的实心圆柱，其底面半径、高均为1，将它重新制作成一个体积与高不变的圆锥，则该圆锥的底面积为______

14. 二项式$(\sqrt{x}-\sqrt[3]{x})^5$的展开式中含x^2的项的系数是________.（用数字作答）

15. 已知函数$f(x)=\begin{cases}x+1, x\leqslant 0\\ \ln x, x>0,\end{cases}$若$f(x_1)=f(x_2)$且$x_1<x_2$，则$x_2-2x_1$的最小值为______.

16. 已知函数$f(x)=2\sin(\omega x-\frac{\pi}{6})-1$，其中$\omega>0$，若$f(x)$在区间$(\frac{\pi}{4},\frac{2\pi}{3})$上恰有2个零点，则$\omega$的取值范围是________.

四、解答题：本题共6小题，共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. （本小题满分10分）

已知$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c且$2c-b=2a\cos B$.

（1）求角A；

（2）若$\frac{\sqrt{3}b}{2}\sin B+(c-\frac{b}{2})\cos B=\sqrt{7}$，$b-c=2$，求$BC$边上的高.

18. （本小题满分12分）

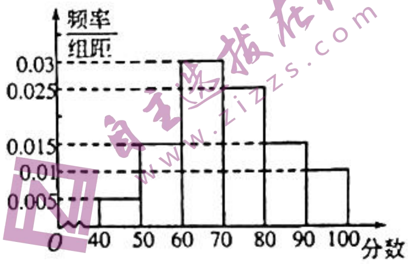
记S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，已知$4S_n=a_n^2+2a_n-3$，且$a_n>0$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式a_n；

（2）数列b_n依次为：a_1，2，a_2，2^2，2^3，a_3，2^4，2^5，2^6，a_4，2^7，2^8，2^9，2^{10}，…，规律是在a_k和a_{k+1}中间插入k项，所有插入的项构成以2为首项，2为公比的等比数列，求数列$\{b_n\}$的前50项的和.

19. （本小题满分 12 分）

为了买到包括星黛露毛绒玩具、达菲、雪莉玫和星黛露毛绒玩具钥匙圈等商品，12 月 29 日凌晨，约 5000 名游客在上海迪士尼外夜排长龙，此现象在网络上引发了广泛讨论．为了解广大市民对卡通玩偶的喜爱程度，某市一玩具商城随机抽取了 100 名市民，以分数表示对卡通玩偶的喜爱程度（喜爱程度越高，分数越高，满分为 100 分），得到如下频率分布直方图．

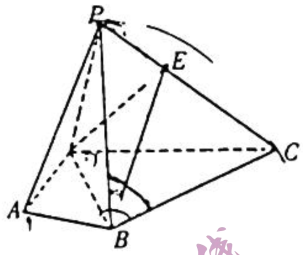


（1）试估计该市市民对卡通玩偶平均喜爱程度的分数值；

（2）用上述 100 名市民对玩偶喜爱程度分数值的频率分布估算所有排队游客分数值的概率分布，在所有游客中随机抽取 2 人，对分数值在区间 $[70,80)$ 内的游客赠送一个玩偶，分数值在区间 $[80,100]$ 内的游客赠送两个玩偶，分数值低于 70 分的游客不送玩偶，记总共送出的玩偶个数为 X，求 EX.

20. （本小题满分 12 分）

如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，$AD=AB=\sqrt{2}$，$CD=CB=\sqrt{5}$，$BD=2$，$PB=PD$，E 为线段 PC 上一点，$PA\,//$ 平面 BDE，平面 $PDB\perp$ 平面 $ABCD$.



（1）求 $\dfrac{PE}{PC}$；

（2）若三棱锥 $P-BDE$ 体积为 $\dfrac{2}{3}$，求二面角 $E-BC-D$ 的余弦值.

21. （本小题满分 12 分）

设抛物线 $E:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，抛物线上一点 $P(x_0,2)$ 满足 $|PF|=2$.

（1）求抛物线 E 的方程；

（2）两不同直线 l_1，l_2 均过点 F，且 l_1 交抛物线 E 于 A，C 两点，l_2 交抛物线 E 于 B、D 两点．设直线 AB 和 CD 分别与 x 轴交于点 $M(x_1,0)$ 和点 $N(x_2,0)$，求 $x_1\cdot x_2$ 的值.

22. （本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=(x-k)(\ln x-k)$，其中 $k\geq 0$.

（1）若定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数 $g(x)$ 满足 $g'(x)=f(x)$，求 $g(x)$ 的单调区间；

（2）证明：$f(x)$ 有唯一极值点 x_0，且 $f(x_0)\leq -\dfrac{1}{4}$.

名校联盟全国优质校 2022 届高三大联考
数学试题参考答案与评分细则

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。

1-4：C D A B　　　5-8：D B C B

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

9.BC　　10.ABD　　11.BD　　12.ACD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

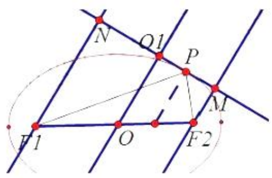
13.3π　　14.-10　　15.$4-2\ln 2$　　16.$(\frac{7}{2},4)\cup(\frac{9}{2},\frac{13}{2}]$

选填、填空部分题解析：

7. $\cos^2\alpha-\cos\alpha-1=0$，故 $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=-\cos\alpha$，

$\sin^4\alpha=\cos^2\alpha$，

则 $\sin^2\alpha+\sin^4\alpha=-\cos\alpha+\cos^2\alpha=1$



8. 分别过 F_1,O,F_2 作 P 处的切线的垂线，垂足分别为：N,O_1,M

$\angle F_1PF_2=\theta$，则 $\angle PF_1N=\angle PF_2M=\theta$，

$\because \cos 2\theta=\frac{3}{4}$，$\therefore \cos\theta=\frac{\sqrt{14}}{4}$

$$d=OO_1=\frac{F_1N+F_2M}{2}=\frac{1}{2}(F_1P\cdot\cos\theta+F_2P\cdot\cos\theta)=\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot\cos\theta=\frac{\sqrt{14}}{2}$$

11. 由 $a_n>0$，得 $c>0$．$\frac{2}{a_{n+1}}=\frac{c}{a_n}+\frac{a_n}{c}\ge 2$，故 $0<a_{n+1}\le 1$，

又根据 $\{a_n\}$ 是等差数列，且 a_n 有界，则 $\{a_n\}$ 必为常数列．

设 $a_n=x$，$\frac{2}{x}=\frac{c}{x}+\frac{x}{c}$，得 $c(c-2)=x^2\in(0,1]$，解得 $0<c<2$．

12. 取 AB 中点 P，CD 中点 Q．

当 AB 和 CD 平行时，PQ 则为其距离．

设 AB 和 CD 所在截面的距离为 r，由题意 $2\le r\le\sqrt{5}$

$PQ\le\sqrt{r^2-1}+\sqrt{r^2-4}\le\sqrt{4}+\sqrt{1}=3$

$PQ\ge\sqrt{r^2-1}-\sqrt{r^2-4}=\frac{3}{\sqrt{r^2-1}-\sqrt{r^2-4}}\ge\frac{3}{\sqrt{4}+\sqrt{1}}=1$

设 AB 和 CD 公垂线段长度为 d，则 $d\le PQ\le OP+OQ=2+1=3$

当 AB 和 CD 夹角为 θ 时，$V=\frac{1}{6}AB\cdot CD\cdot d\cdot\sin\theta\le\frac{1}{6}\cdot 2\cdot 4\cdot 3=4$

当 AC 为直径时，$AB=AD$，$CB=CD$，若 A,B,C,D 四点共面，则显然 $AC\perp BD$，否则，取 BD 中点 E，则 $BD\perp$ 平面 ACE，故 $BD\perp AC$．

15. 设 $f(x_1)=f(x_2)=t(t\le 1)$，则 $x_1=t-1$，$x_2=e^t$，

则 $x_2-2x_1=e^t-2t+2$，求导可知，$t=\ln 2$ 时，$(x_2-2x_1)_{\min}=4-2\ln 2$

16. $\sin(\omega x-\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$，则 $\omega x-\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{\pi}{6}$ 或 $2k\pi+\frac{5\pi}{6},k\in Z$

$\frac{\pi}{4}<x<\frac{2\pi}{3}$ 时，$\frac{\pi}{4}\omega-\frac{\pi}{6}<\omega x-\frac{\pi}{6}<\frac{2\pi}{3}\omega-\frac{\pi}{6}$，

情况①：$\begin{cases}2k\pi+\dfrac{\pi}{6}\le\dfrac{\pi}{4}\omega-\dfrac{\pi}{6}<2k\pi+\dfrac{5\pi}{6}\\2k\pi+\dfrac{13\pi}{6}<\dfrac{2\pi}{3}\omega-\dfrac{\pi}{6}\le2k\pi+\dfrac{17\pi}{6}\end{cases}$，即 $\begin{cases}8k+\dfrac{4}{3}\le\omega<8k+4\\3k+\dfrac{7}{2}<\omega\le3k+\dfrac{9}{2}\end{cases}$

解得 $k=0$ 时，$\dfrac{7}{2}<\omega<4$

情况②：$\begin{cases}2k\pi-\dfrac{7\pi}{6}\le\dfrac{\pi}{4}\omega-\dfrac{\pi}{6}<2k\pi+\dfrac{\pi}{6}\\2k\pi+\dfrac{5\pi}{6}<\dfrac{2\pi}{3}\omega-\dfrac{\pi}{6}\le2k\pi+\dfrac{13\pi}{6}\end{cases}$，即 $\begin{cases}8k-4\le\omega<8k+\dfrac{4}{3}\\3k+\dfrac{3}{2}<\omega\le3k+\dfrac{7}{2}\end{cases}$

解得 $k=1$ 时，$\dfrac{9}{2}<\omega\le\dfrac{13}{2}$

综上所述，ω 的取值范围是 $(\dfrac{7}{2},4)\cup(\dfrac{9}{2},\dfrac{13}{2}]$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.

17.解：

（1）$2\sin C-\sin B=2\sin A\cos B$，--1 分

则有 $2\sin(A+B)-2\sin A\cos B=\sin B$.--2 分

即 $2\cos A\sin B=\sin B$，--3 分

又 $\sin B\neq0$，所以 $\cos A=\dfrac{1}{2}$.--4 分

由于 $0<A<\pi$，所以 $A=\dfrac{\pi}{3}$.--5 分

（2）由 $\dfrac{\sqrt{3}b}{2}\sin B+(c-\dfrac{b}{2})\cos B=\sqrt{7}$ 可得 $b\cos(\dfrac{2\pi}{3}-B)+c\cos B=\sqrt{7}$，----------------6 分

又 $\because A=\dfrac{\pi}{3}$，$\therefore b\cos C+c\cos B=\sqrt{7}$，--7 分

$\therefore a=\sqrt{7}$.--8 分

由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，$\therefore 7=b^2+c^2-bc$，$\therefore 7=(b-c)^2+bc$，

$\because b-c=2$，$\therefore 7=4+bc$，$\therefore bc=3$.--9 分

设 BC 边上的高为 h .

$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times3\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$，$\because S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ah$，$\dfrac{1}{2}\times\sqrt{7}\times h=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$，

$\therefore h=\dfrac{3\sqrt{21}}{14}$.--10 分

18.解：

（1）当 n>1 时，$4S_n=a_n^2+2a_n-3$，$4S_{n-1}=a_{n-1}^2+2a_{n-1}-3$

所以 $(a_n-a_{n-1})(a_n+a_{n-1})=2(a_n+a_{n-1})$.--2 分

$\because a_n>0$，$\therefore a_n-a_{n-1}=2$.--3 分

当 n=1 时，$4S_1=a_1^2+2a_1-3$，得 $a_1=3$ 或 $a_1=-1$（舍）.--4 分

故 $\{a_n\}$ 是以 3 为首项，2 为公差的等差数列，$a_n=3+2(n-1)=2n+1$.------------5 分

（2）数列 $\{b_n\}$ 中对应的项 a_{k+1} 之前总项数为 $2+3+4+\ldots+(k+1)=\dfrac{k(k+3)}{2}$，-------6 分

令 $\dfrac{k(k+3)}{2}\le50$，解得 $k\le8$，--7 分

此时 $\frac{k(k+3)}{2}=44$，

故 $\{b_n\}$ 第 50 项在 a_9 和 a_{10} 之间.-- 8 分

所以 $\{b_n\}$ 前 50 项的和为：

$(a_1+a_2+...+a_9)+(2+2^2+...+2^{41})=\frac{9(a_1+a_9)}{2}+\frac{2(2^{41}-1)}{2-1}=2^{42}+97$-------12 分

19.解：

（1）设平均喜爱程度为 $\bar{x}$，

则 $\bar{x}=45\times0.05+55\times0.15+65\times0.3+75\times0.25+85\times0.15+95\times0.1=71$----------------4 分

（2）每人分数值在区间 $[70,80)$ 内的概率 $p_1=\frac{1}{4}$，在区间 $[80,100]$ 内的概率 $p_2=\frac{1}{4}$，

--5 分

由题意，X 的可能取值为 0，1，2，3，4--6 分

$P(X=0)=(1-p_1-p_2)^2=\frac{1}{4}$；--7 分

$P(X=1)=C_2^1p_1(1-p_1-p_2)=\frac{1}{4}$；--8 分

$P(X=2)=p_1^{\ 2}+C_2^1p_2(1-p_1-p_2)=\frac{5}{16}$；-------------------------------------9 分

$P(X=3)=C_2^1p_1p_2=\frac{1}{8}$；---10 分

$P(X=4)=p_2^{\ 2}=\frac{1}{16}$；--11 分

故 $EX=1\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{5}{16}+3\cdot\frac{1}{8}+4\cdot\frac{1}{16}=\frac{3}{2}$---12 分

解法 2：每人分数值在区间 $[70,80)$ 内的概率 $p_1=\frac{1}{4}$，在区间 $[80,100]$ 内的概率 $p_2=\frac{1}{4}$，

--5 分

设抽取一名游客赠送玩偶的个数为 Y，Y 的可能取值为 0，1，2，3，4------------6 分

$P(Y=0)=1-p_1-p_2=\frac{1}{2}$；--7 分

$P(Y=1)=p_1=\frac{1}{4}$；---8 分

$P(Y=2)=p_2=\frac{1}{4}$；---9 分

故 $EY=1\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$---10 分

由随机抽取 2 人是相互独立的，则有 $EX=2EY=\frac{3}{2}$-----------------------------------12 分

20.解：

（1）连接 AC 交 BD 于点 O，由 $AD=BD$，$CD=CB$，得 $AC\perp BD$，-------------------------1 分

故 $AO=\sqrt{AB^2-(\frac{1}{2}BD)^2}=1$，---2 分

$CO=\sqrt{CB^2-(\frac{1}{2}BD)^2}=2$，--3 分

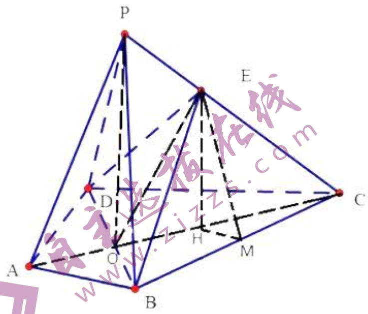
由 PA // 平面 BDE，$PA\subset$ 平面 PAC，且平面 $PAC\cap$ 平面 $BDE=OE$，故 PA // OE，

--5 分

所以 $\frac{PE}{PC}=\frac{AO}{AC}=\frac{1}{3}$--6 分

解法 1：(2) 由 $PB=PD$，故 $PO\perp BD$，又平面 $PDB\perp$ 平面 $ABCD$，

且交线为 BD，故 $PO\perp$ 平面 $ABCD$.----------------------------



由 $\frac{PE}{PC}=\frac{1}{3}$，故 $V_{P-BDE}=\frac{1}{3}V_{P-ABCD}=\frac{2}{3}$，

得 $V_{P-ABCD}=2$.---

所以 $\frac{1}{3}PO\cdot\frac{1}{2}\cdot BD\cdot CO=2$，解得：$PO=3$.-----------------

在线段 CO 上取点 H，使得 $\frac{OH}{OC}=\frac{1}{3}$，则 EH∥PO，

此时 EH⊥平面 ABCD.

过 H 作 HM⊥CB 交 CB 于 M，

此时，BC⊥HM，BC⊥EH，$HM\cap EH=H$，

故 $BC\perp$ 平面 EHM，有 $BC\perp EM$，则 $\angle EMH$ 为二面角 E-BC-D 的平面角.---------10 分

$EH=\frac{2}{3}PO=2$，又 $\frac{HM}{\frac{2}{3}OC}=\frac{OB}{BC}$，

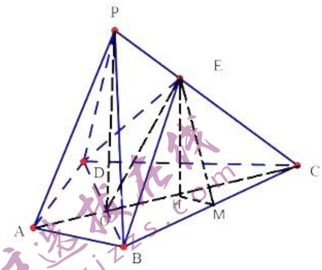
解得：$HM=\frac{4\sqrt{5}}{15}$，$EM=\sqrt{EH^2+HM^2}=\frac{14\sqrt{5}}{15}$，--------------------------------11 分

$\cos\angle EMH=\frac{HM}{EM}=\frac{2}{7}$，故二面角 $E-BC-D$ 的余弦值为 $\frac{2}{7}$.--------------------12 分

解法 2：建系

（2）由 $PB=PD$，故 $PO\perp BD$，又平面 $PDB\perp$ 平面 $ABCD$，

且交线为 BD，故 $PO\perp$ 平面 $ABCD$.------------------------------------



由 $\frac{PE}{PC}=\frac{1}{3}$，故 $V_{P-BDE}=\frac{1}{3}V_{P-ABCD}=\frac{2}{3}$，得 $V_{P-ABCD}=2$.-----------

所以 $\frac{1}{3}PO\cdot\frac{1}{2}\cdot BD\cdot CO=2$，解得：$PO=3$.----------------------------

又 PO，BO，CO 两两互相垂直，依题意可建立如图所示空间直角坐标系 $O-xyz$，

$B(1,0,0)$ ，$D(-1,0,0)$ ，$C(0,2,0)$ ，$P(0,0,3)$ ，$E(0,\frac{2}{3},2)$ ，

$\overrightarrow{BC}=(-1,2,0)$，$\overrightarrow{EC}=(0,\frac{4}{3},-2)$

设平面 EBC 的一个法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$

由 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{BC}=-x_1+2y_1=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{EC}=\frac{4}{3}y_1-2z_1=0\end{cases}$，取 $z_1=2$，可得 $\vec{m}=(6,3,2)$，------------------------------10 分

易知平面 BCD 的一个法向量为 $\vec{n}=(0,0,1)$---11 分

$\cos<\vec{m},\vec{n}>=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{2}{7}$，故二面角 $E-BC-D$ 的余弦值为 $\frac{2}{7}$.-----------------------12 分

21. 解：

（1）由题意，点 $F(\frac{p}{2},0)$，由 $|PF|=2$，则 $(x_0-\frac{p}{2})^2+(2-0)^2=2^2$，----------------1 分

故有 $x_0=\frac{p}{2}$.--2 分

将点 $P(\frac{p}{2},2)$ 带入抛物线方程得：$4=2p\cdot\frac{p}{2}$，-- 3 分

解得：$p=2$.故抛物线 E 的方程为 $y^2=4x$.-- 4 分

（2）设直线 AC 的方程为：$x=my+1$，--5 分

与 $y^2=4x$ 联立，得 $y^2-4my-4=0$.

设 $A(x_A,y_A)$，$C(x_C,y_C)$，有 $y_Ay_C=-4$，--6 分

不妨设 $A(t_1^2,2t_1),B(t_2^2,2t_2),C(t_1^{-2},-2t_1^{-1}),D(t_2^{-2},-2t_2^{-1})$.

则直线 AB 的斜率 $k_{AB}=\frac{2}{t_1+t_2}$，--- 7 分

直线 AB 的方程为：$y-2t_2=\frac{2}{t_1+t_2}(x-t_2^2)$，--- 8 分

令 $y=0$，得：$x_1=-t_1t_2$，--- 9 分

同理：$x_2=-\frac{1}{t_1t_2}$.-- 11 分

所以 $x_1x_2=1$.--- 12 分

22.解：

（1）当 $k=0$ 时，$g'(x)=x\ln x$，

当 $0<x<1$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 递减；当 $x>1$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 递增；

-- 1 分

当 $k>0$ 时，令 $g'(x)=0$，得 $x=k$ 或 $x=e^k$.

构造函数 $s(x)=x-\ln x$，$s'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$，

故 $0<x<1$ 时，$s(x)$ 递减；$x>1$ 时，$s(x)$ 递增. 故 $s(x)\geq s(1)=1$.

即 $x>\ln x$，故 $e^x>x$，有 $e^k>k$.-- 3 分

故 $0<x<k$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 递增；

故 $k<x<e^k$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 递减；

故 $x>e^k$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 递增；-- 4 分

综上所述：$k=0$ 时，$g(x)$ 的减区间是 $(0,1)$，增区间是 $(1,+\infty)$；$k>0$ 时，$g(x)$ 的增区间是 $(0,k)$ 和 $(e^k,+\infty)$，减区间是 (k,e^k) .-- 5 分

（2）当 $k=0$ 时，$f'(x)=1+\ln x$，令 $f'(x)=0$，得 $x_0=\frac{1}{e}$，

当 $0<x<\frac{1}{e}$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)<0$ 递减；当 $x>\frac{1}{e}$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)<0$ 递增；

故 $f(x)$ 有唯一极值点 $x_0=\frac{1}{e}$，此时 $f(x_0)=f(\frac{1}{e})=-\frac{1}{e}<-\frac{1}{4}$.--------------------- 6 分

当 $k>0$ 时，

$f'(x)=(\ln x-k)+(x-k)\cdot\frac{1}{x}=\ln x-\frac{k}{x}-k+1$，由 $k>0$，显然 $f'(x)$ 递增；

由（1）中结论，$k>\ln k$ 和 $e^k>k$ 得：$f'(k)=\ln k-k<0$，$f'(e^k)=1-\frac{k}{e^k}>0$

故存在唯一 $x_0\in(k,e^k)$，使得 $f'(x_0)=0$.此时 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 递减，$(x_0,+\infty)$ 递增.

因此，x_0 是 $f(x)$ 的唯一极值点.-- 7 分

由 $f'(x_0)=0$，则 $\ln x_0-\dfrac{k}{x_0}-k+1=0$，$k=\dfrac{x_0(1+\ln x_0)}{1+x_0}$，由 $k>0$，得 $x_0>\dfrac{1}{e}$.

$f(x_0)=(x_0-k)(\ln x_0-k)=\dfrac{-x_0(x_0-\ln x_0)^2}{(x_0+1)^2}$ -- 8 分

故 $f(x_0)\le -\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x_0}(x_0-\ln x_0)}{x_0+1}\ge\dfrac{1}{2}$，-- 9 分

令 $\sqrt{x_0}=t\ (t>\sqrt{\dfrac{1}{e}})$

上式等价于 $\dfrac{t(t^2-2\ln t)}{t^2+1}\ge\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow 2t^2-4\ln t-t-\dfrac{1}{t}\ge 0$ ------------------------------- 10 分

令 $h(t)=2t^2-4\ln t-t-\dfrac{1}{t}(t>\sqrt{\dfrac{1}{e}})$，-- 11 分

$h'(t)=4t-\dfrac{4}{t}-1+\dfrac{1}{t^2}=\dfrac{4t^3-t^2-4t+1}{t^2}=\dfrac{(t+1)(4t-1)(t-1)}{t^2}$

由 $t>\sqrt{\dfrac{1}{e}}>\dfrac{1}{4}$，故 $0<t<1$ 时，$h'(t)<0$，$h(t)$ 递减；$t>1$ 时，$h'(t)>0$，$h(t)$ 递增；

因此 $h(t)\ge h(1)=0$，故原式得证.-- 12 分

综上所述，$f(x_0)\le-\dfrac{1}{4}$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。