高三数学试卷

考生注意：

1. 本试卷共 150 分. 考试时间 120 分钟.
2. 请将各题答案填写在答题卡上.
3. 本试卷主要考试内容：集合与常用逻辑用语，函数，导数，三角函数，解三角形，向量，数列，不等式，立体几何.

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x|\ln(x-2)\geqslant 0\}$，$B=\{x|2x^2-9x-5<0\}$，则 $A\cap B=$

A. $(2,5)$　　B. $[2,5)$　　C. $[3,5)$　　D. $(3,5)$

2. 在公比为 q 的正项等比数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1a_3=9$，$a_3+2q=10$，则 $q=$

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

3. 函数 $f(x)=1+\frac{1}{x}$ 的图象在点 $(\frac{1}{2},f(\frac{1}{2}))$ 处的切线斜率为

A. 4　　B. -4　　C. 2　　D. -2

4. 设 $x,y\in\mathbf{R}$，则“$x\geqslant 1$ 且 $y\geqslant 1$”是“$x^2+y^2\geqslant 1$”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件
C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

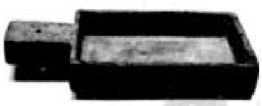
5. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，P 是正方形 CDD_1C_1 的中心，点 Q 在线段 AA_1 上，且 $AQ=\frac{1}{3}AA_1$，E 是 BC 的中点，则异面直线 PQ，DE 所成角的大小为

A. 30°　　B. 45°　　C. 60°　　D. 90°

6. 已知函数 $f(x)=\ln(\sqrt{ax^2+1}+2x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，则实数 a 的值是

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

7. 如图，战国商鞅铜方升是公元前 344 年商鞅督造的标准量器. 秦始皇统一中国后，仍以商鞅所规定的制度和标准统一全国的度量衡. 经测量，该铜方升内口（长方体）深 1 寸，内口长是宽的 1.8 倍，内口的表面积（不含上底面）为 33 平方寸，则该铜方升内口的容积为



A. 5.4 立方寸　　B. 8 立方寸
C. 16 立方寸　　D. 16.2 立方寸

8. 已知△ABC 所在的平面内一点 P（点 P 与点 A,B,C 不重合），且 $\overrightarrow{AP}=5\overrightarrow{PO}+2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}$，则△$ACP$ 与△BCP 的面积之比为

A. $2:1$　　B. $3:1$　　C. $3:2$　　D. $4:3$

二、选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 3 分.

9. 已知函数 $f(x)=\cos(\omega x+\varphi)(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$，其图象相邻两条对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{4}$，且直线 $x=\frac{\pi}{12}$ 是其中一条对称轴，则下列结论正确的是

A. 函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$

B. $f(\frac{3\pi}{8})=-\frac{1}{2}$

C. 函数 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{12}]$ 上单调递增

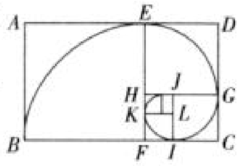
D. 点 $(-\frac{7\pi}{24},0)$ 是函数 $f(x)$ 图象的一个对称中心

10. 下列函数有两个零点的是

A. $f(x)=e^x-x-1$　　B. $f(x)=|x+1|-\frac{1}{2}x-1$

C. $f(x)=x^3+3x^2+3x-1$　　D. $f(x)=\ln x-x+2$

11. 斐波那契螺线又叫黄金螺线，广泛应用于绘画、建筑等，这种螺线可以按下列方法画出：如图，在黄金矩形 $ABCD(\frac{AB}{BC}=\frac{\sqrt{5}-1}{2})$ 中作正方形 $ABFE$，以 F 为圆心，AB 长为半径作弧 $\overset{\frown}{BE}$；然后在黄金矩形 $CDEF$ 中作正方形 $DEHG$，以 H 为圆心，DE 长为半径作弧 $\overset{\frown}{EG}$；……；如此继续下去，这些弧就连接成了斐波那契螺线. 记弧 $\overset{\frown}{BE}$，$\overset{\frown}{EG}$，$\overset{\frown}{GI}$ 的长度分别为 l,m,n，则下列结论正确的是



A. $l=m+n$　　B. $m^2=l\cdot n$

C. $2m=l+n$　　D. $\frac{1}{m}=\frac{1}{l}+\frac{1}{n}$

12. 设 $a=\log_{0.3}0.5$，$b=\log_4 0.5$，则下列结论正确的是

A. $ab<0$　　B. $a+b>0$

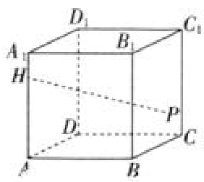
C. $2(ab+1)<a$　　D. $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}>6$

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

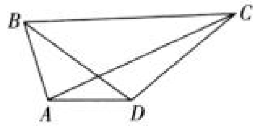
13. 已知正数 a,b 满足 $ab=1$，则 $4a+9b$ 的最小值为__▲__.

14. 在△ABC 中，$\angle C=90°$，$AC=3$，$BC=2$，D 为 BC 的中点，E,F 都在线段 AB 上，且 $AE=EF=FB$，则 $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{CF}=$__▲__.

15. 如图，已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 3，点 H 在棱 AA_1 上，且 $HA_1=1$，P 是侧面 BCC_1B_1 内一动点，$HP=\sqrt{13}$，则 CP 的最小值为__▲__.



16. 如图，在平面四边形 $ABCD$ 中，$AD=1$，$BD=\frac{2\sqrt{6}}{3}$，$AB\perp AC$，



$AC=\sqrt{2}AB$，则 CD 的最小值为____▲____.

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）

在①$a_{n+2}-a_n=4$，$S_2=6$，②$a_3+a_5=16$，$S_3+S_5=42$，③$2S_n=a_n+2n^2$ 这三个条件中任选一个补充在下面的问题中，并加以解答.

问题：设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，________，求数列$\{\frac{1}{S_n}\}$的前 n 项和.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

18.（12 分）

在△ABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c. 已知 $a\sin B=b(\cos A+1)$.

(1)证明：△ABC 是直角三角形.

(2)若 D 为 BC 的中点，且 $AD=6$，求△ABC 面积的最大值.

19.（12 分）

某单位招聘员工时，要求参加笔试的考生从 5 道 A 类题和 3 道 B 类题共 8 道题中任选 3 道作答.

(1)求考生甲至少抽到 2 道 B 类题的概率；

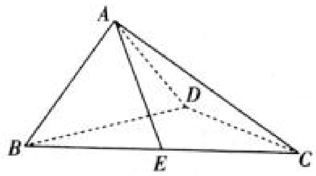
(2)若答对 A 类题每道计 1 分，答对 B 类题每道计 2 分，若不答或答错，则该题计 0 分. 考生乙抽取的是 1 道 A 类题，2 道 B 类题，且他答对每道 A 类题的概率为$\frac{2}{3}$，答对每道 B 类题的概率是$\frac{1}{2}$，各题答对与否相互独立，用 X 表示考生乙的得分，求 X 的分布列和数学期望.

20.(12分)

如图,在三棱锥 $A-BCD$ 中,$AB=AD=CD=\frac{1}{2}BC=2$,E 为 BC 的中点,$BD\perp CD$,且 $AE=\sqrt{2}$.

(1)证明:平面 $ACD\perp$ 平面 ABD.

(2)求平面 ABC 与平面 ACD 所成锐二面角的余弦值.



21.(12分)

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{3}=1(a>\sqrt{3})$ 的左、右顶点分别为 A_1,A_2,点 P 为椭圆 C 上异于 A_1,A_2 的一点,且直线 PA_1,PA_2 的斜率之积为 $-\frac{3}{4}$.

(1)求椭圆 C 的标准方程;

(2)直线 l 过右焦点 F_2 与椭圆 C 交于 M,N 两点(M,N 与 A_1 不重合),l 不与 x 轴垂直,若 $k_{A_1M}+k_{A_1N}=-k_{MN}$,求 $|MN|$.

22.(12分)

已知函数 $f(x)=e^x-ax^2$.

(1)设函数 $g(x)=f'(x)$,讨论 $g(x)$ 的单调性;

(2)当 $x\in(1,+\infty)$ 时,$f(x)>\frac{e}{2}$ 恒成立,求 a 的取值范围.

高三数学试卷参考答案

1. C 【解析】本题考查集合的运算，考查运算求解能力.

因为 $A=\{x|x\geqslant 3\}$，$B=\{x|-\frac{1}{2}<x<5\}$，所以 $A\cap B=\{x|3\leqslant x<5\}$.

2. A 【解析】本题考查等比数列的性质，考查运算求解能力.

因为 $a_1a_3=a_2^2=9$，所以 $a_2=3$. 又 $a_3+2q=10$，所以 $3q+2q=10$，解得 $q=2$.

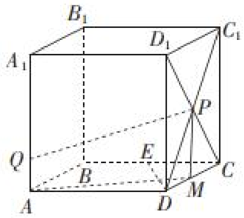
3. B 【解析】本题考查导数的几何意义，考查运算求解能力.

因为 $f(x)=1+\frac{1}{x}$，所以 $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$，$f'(\frac{1}{2})=-4$.

4. A 【解析】本题考查常用逻辑用语的知识，考查推理论证能力.

因为 $x\geqslant 1$ 且 $y\geqslant 1$，所以 $x^2\geqslant 1$ 且 $y^2\geqslant 1$，所以 $x^2+y^2\geqslant 2>1$；若 $x^2+y^2\geqslant 1$，可取 $x=0$，$y=-1$，不满足 $x\geqslant 1$ 且 $y\geqslant 1$，所以前者是后者的充分不必要条件，选 A.

5. D 【解析】本题考查异面直线所成角的大小，考查空间想象能力.



如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，PQ 在底面 $ABCD$ 上的射影为 AM，可证 $DE\perp$ 平面 $AMPQ$，而 $PQ\subset$ 平面 $AMPQ$，那么 $DE\perp PQ$，则异面直线 PQ，DE 所成角的大小为 $90°$.

6. D 【解析】本题考查函数的性质，考查运算求解能力.

由题知，$f(x)+f(-x)=0$ 对任意的实数 x 成立，即 $\ln(\sqrt{ax^2+1}+2x)+\ln(\sqrt{ax^2+1}-2x)=\ln(ax^2+1-4x^2)=0$ 对任意实数 x 成立，所以 $ax^2=4x^2$ 对任意实数 x 成立，从而可知 $a=4$.

7. D 【解析】本题考查数学文化与空间几何体的表面积与体积，考查空间想象能力.

设内口宽为 a 寸，则长为 $1.8a$ 寸，由 $2(a+1.8a)+1.8a^2=33$，整理得 $9a^2+28a-165=0$，解得 $a=3$（$a=-\frac{55}{9}$ 舍去），故所求的容积为 $3\times(1.8\times 3)\times 1=16.2$ 立方寸.

8. A 【解析】本题考查平面向量的线性表示，考查运算求解能力.

由 $\overrightarrow{AP}=5\overrightarrow{PO}+2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}$ 化简得 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，故 $\frac{S_{\triangle APC}}{S_{\triangle PBC}}=2$.

9. ACD 【解析】本题考查三角函数的性质，考查运算求解能力.

因为 $f(x)$ 图象相邻两条对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{4}$，即 $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{4}\times 2=\frac{\pi}{2}$，所以 $\omega=4$，即 $f(x)=\cos(4x+\varphi)$，A 正确；又直线 $x=\frac{\pi}{12}$ 是其中一条对称轴，所以 $\frac{\pi}{3}+\varphi=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，即 $\varphi=k\pi-\frac{\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$，由 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，得 $\varphi=-\frac{\pi}{3}$，所以 $f(x)=\cos(4x-\frac{\pi}{3})$，从而 $f(\frac{3\pi}{8})=\cos(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{3})=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 B 错误；由 $2k\pi-\pi\leqslant 4x-\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得单调递增区间为 $[\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{6},\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12}]$，$k\in\mathbf{Z}$，取 $k=0$ 可知 C 正确；由 $4x-\frac{\pi}{3}=k\pi-\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $x=\frac{k\pi}{4}-\frac{\pi}{24}$，$k\in\mathbf{Z}$，取 $k=-1$ 可知 D 正确.

10. BD 【解析】本题考查函数的零点，考查数形结合的数学思想.

对于选项 A，函数 $y=e^x$ 与 $y=x+1$ 的图象相切于点 $(0,1)$，因此 $f(x)=e^x-x-1$ 只有一个零点；对于选项 B，画出 $y=|x+1|$ 和 $y=\frac{1}{2}x+1$ 的图象（图略），可知它们有两个交点；对于选项 C，$f'(x)=3x^2+6x+3=$

$3(x+1)^2\geqslant 0$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上最多只有一个零点；对于选项 D，因为 $f'(x)=\frac{1-x}{x}$，易知 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，所以 $f(x)_{\max}=f(1)=1$，所以 $f(x)$ 有两个零点. 故答案为 BD.

11. AB **【解析】本题考查弧长的计算，考查运算求解能力.**

不妨设 $AB=\sqrt{5}-1$，则 $BC=2$，所以 $l=\frac{1}{4}\times 2\pi\times(\sqrt{5}-1)=\frac{(\sqrt{5}-1)\pi}{2}$. 因为 $ED=3-\sqrt{5}$，所以 $m=\frac{1}{4}\times 2\pi\times(3-\sqrt{5})=\frac{(3-\sqrt{5})\pi}{2}$. 同理可得 $n=\frac{1}{4}\times 2\pi\times(2\sqrt{5}-4)=\frac{(2\sqrt{5}-4)\pi}{2}$. 所以 $l=m+n$，$m^2=l\cdot n$，$2m\neq l+n$，$\frac{1}{m}\neq\frac{1}{l}+\frac{1}{n}$，所以 A，B 正确，C，D 错误.

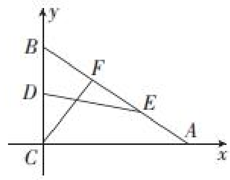
12. ABD **【解析】本题考查指数、对数的运算及比较大小，考查推理论证能力.**

易知 $a>0$，$b<0$，所以 A 正确；因为 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\log_{0.5}0.3+\log_{0.5}4=\log_{0.5}1.2<0$，即 $\frac{a+b}{ab}<0$，又 $ab<0$，所以 $a+b>0$，B 正确；又 $\frac{1}{a}=\log_{0.5}0.3>1$，$b=\log_4 0.5=-\frac{1}{2}$，所以 $\frac{1}{a}+b=\frac{1}{a}-\frac{1}{2}>\frac{1}{2}$，从而 $2(ab+1)>a$，C 错误；又 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=(\log_{0.5}0.3)^2+(\log_{0.5}4)^2>4\log_2\frac{10}{3}>\log_2 2^6=6$，可知 D 正确. 综上，A，B，D 正确，C 错误.

13. 12 **【解析】本题考查均值不等式的知识，考查运算求解能力.**

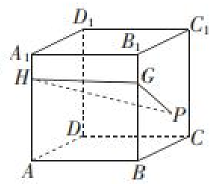
$4a+9b\geqslant 2\sqrt{4a\cdot 9b}=2\sqrt{36}=12$.

14. $\frac{14}{9}$ **【解析】本题考查平面向量的数量积，考查运算求解能力.**



如图，建立直角坐标系 xCy，则 $D(0,1)$，$E(2,\frac{2}{3})$，$F(1,\frac{4}{3})$，$\overrightarrow{DE}=(2,-\frac{1}{3})$，$\overrightarrow{CF}=(1,\frac{4}{3})$，所以 $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{CF}=2-\frac{4}{9}=\frac{14}{9}$.

15. $\sqrt{13}-2$ **【解析】本题考查立体几何的有关知识，考查空间想象能力.**



如图，作 $HG\perp BB_1$ 交 BB_1 于点 G，则 $B_1G=1$. 因为 $HP=\sqrt{13}$，所以 $GP=2$，所以点 P 的轨迹是以 G 为圆心，2 为半径的圆弧，所以 CP 的最小值为 $CG-2=\sqrt{13}-2$.

16. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **【解析】本题考查解三角形的知识，考查运算求解能力.**

设 $\angle ADB=\theta$，在 $\triangle ABD$ 中，由正弦定理得 $\frac{AB}{\sin\theta}=\frac{BD}{\sin\angle BAD}$，即 $\frac{AB}{\sin\theta}=\frac{\frac{2\sqrt{6}}{3}}{\sin\angle BAD}$，

整理得 $AB\cdot\sin\angle BAD=\frac{2\sqrt{6}}{3}\sin\theta$.

由余弦定理得 $AB^2=AD^2+BD^2-2\cdot AD\cdot BD\cdot\cos\theta=\frac{11}{3}-\frac{4\sqrt{6}}{3}\cos\theta$，

因为 $AB\perp AC$，所以 $\angle BAD=\frac{\pi}{2}+\angle DAC$.

在 $\triangle ACD$ 中，由余弦定理得 $CD^2=AD^2+AC^2-2AD\cdot AC\cdot\cos\angle DAC=1+2AB^2-2\sqrt{2}AB\cdot\sin\angle BAD=\frac{25}{3}-\frac{8\sqrt{6}}{3}\cos\theta-\frac{8\sqrt{3}}{3}\sin\theta=\frac{25}{3}-8\sin(\theta+\varphi)$（其中 $\tan\varphi=\sqrt{2}$），

所以当 $\sin(\theta+\varphi)=1$ 时，$CD_{\min}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

17. 解：选①

由 $a_{n+2}-a_n=4$，可知数列 $\{a_n\}$ 的公差为 2，…………………………………… 2 分

又 $S_2=6$，可得 $a_1+a_1+2=6$，得 $a_1=2$，…………………………………… 4 分

所以 $a_n=2n$，$S_n=n^2+n$，…………………………………… 6 分

可知 $\frac{1}{S_n}=\frac{1}{n^2+n}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，…………………………………… 8 分

数列 $\{\frac{1}{S_n}\}$ 的前 n 项和为 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$. …………………………………… 10 分

选②

设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则由 $a_3+a_5=16$，$S_3+S_5=42$，得 $\begin{cases}2a_1+6d=16,\\8a_1+13d=42,\end{cases}$ …………………………………… 2 分

解得 $\begin{cases}a_1=2,\\d=2,\end{cases}$ …………………………………… 4 分，

所以 $a_n=2n$，$S_n=n^2+n$，…………………………………… 6 分

可知 $\frac{1}{S_n}=\frac{1}{n^2+n}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，…………………………………… 8 分

数列 $\{\frac{1}{S_n}\}$ 的前 n 项和为 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$. …………………………………… 10 分

选③

当 $n=1$ 时，$a_1=2$，…………………………………… 2 分

当 $n=2$ 时，$2S_2=a_2+8$，解得 $d=2$，…………………………………… 4 分

所以 $a_n=2n$，$S_n=n^2+n$，…………………………………… 6 分

可知 $\frac{1}{S_n}=\frac{1}{n^2+n}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，…………………………………… 8 分

数列 $\{\frac{1}{S_n}\}$ 的前 n 项和为 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$. …………………………………… 10 分

评分细则：

(1)不管补充的条件是哪个，只要算出 $a_n=2n$，$S_n=n^2+n$ 这一步都得 6 分；写出 $\frac{1}{S_n}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ 累计得 8 分，直到算出最后的正确答案得 10 分.

(2)其他解法根据评分标准依步骤给分.

18. (1)证明：因为 $a\sin B=b(\cos A+1)$，所以 $\sin A\sin B=\sin B(\cos A+1)$. …………………………………… 1 分

因为 $0<B<\pi$，所以 $\sin B\neq 0$，所以 $\sin A=\cos A+1$. …………………………………… 2 分

所以 $\sin A-\cos A=1$，即 $\sqrt{2}\sin(A-\frac{\pi}{4})=1$. 所以 $\sin(A-\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$. …………………………………… 4 分

因为 $0<A<\pi$，所以 $-\frac{\pi}{4}<A-\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}$. 所以 $A-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$，…………………………………… 5 分

故 $A=\frac{\pi}{2}$，即 $\triangle ABC$ 是直角三角形. …………………………………… 6 分

(2)解：因为 $A=\frac{\pi}{2}$，且 $AD=6$，所以 $a=12$，所以 $b^2+c^2=a^2=144$. …………………………………… 8 分

因为 $b^2+c^2\geqslant 2bc$（当且仅当 $b=c$ 时，等号成立），所以 $2bc\leqslant 144$，即 $bc\leqslant 72$. …………………………………… 10 分

故 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}bc\leqslant 36$，即 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 36. …………………………………… 12 分

评分细则：

(1)第一问中，应用正弦定理得出 $\sin A=\cos A+1$，得 2 分，计算出 $\sin(A-\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$，累计得 4 分，第一问解答全部正确得 6 分；

(2)第二问中，写到 $b^2+c^2=144$ 累计得 8 分，写出 $bc\leqslant 72$，累计得 10 分，本题解答完全正确得 12 分；

(3)其他情况根据评分标准依步骤给分.

19. 解：(1)设“考生甲至少抽到 2 道 B 类题”为事件 A，则 $P(A)=\frac{C_3^2C_5^1+C_3^3}{C_8^3}=\frac{2}{7}$. …………………… 3 分

(2)X 的所有可能取值为 0，1，2，3，4，5. …………………… 4 分

所以 $P(X=0)=(1-\frac{2}{3})\times(1-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{12}$， …………………… 5 分

$P(X=1)=\frac{2}{3}\times(1-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{6}$， …………………… 6 分

$P(X=2)=(1-\frac{2}{3})\times C_2^1\times(1-\frac{1}{2})\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$， …………………… 7 分

$P(X=3)=\frac{2}{3}\times C_2^1\times(1-\frac{1}{2})\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$， …………………… 8 分

$P(X=4)=(1-\frac{2}{3})\times C_2^2\times(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{12}$， …………………… 9 分

$P(X=5)=\frac{2}{3}\times(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{6}$. …………………… 10 分

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$

…………………… 11 分

所以 $EX=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{3}+4\times\frac{1}{12}+5\times\frac{1}{6}=\frac{8}{3}$. …………………… 12 分

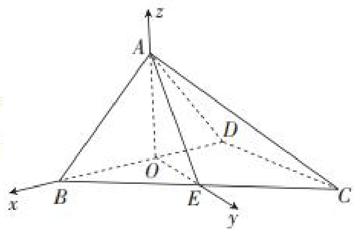
评分细则：

(1)第一问全部正确解完得 3 分；

(2)第二问中，写出 X 的所有可能取值为 0，1，2，3，4，5，得 1 分，每计算出一个概率得 1 分，写出分布列得 1 分，写出期望得 1 分；

(3)其他情况根据评分标准酌情给分.

20. (1)证明：取 BD 的中点为 O，连接 OA，OE.



因为 $BD\perp CD$，$BC=4$，$CD=2$，

所以 $BD=2\sqrt{3}$，$OB=\sqrt{3}$. …………………… 1 分

又 $AB=AD=2$，所以 $BD\perp AO$，且 $AO=1$. …………………… 2 分

在 $\triangle AOE$ 中，$EO=\frac{1}{2}CD=1$，$AE=\sqrt{2}$，

所以 $AO^2+OE^2=AE^2$，即 $OE\perp AO$，从而 $CD\perp AO$. …………………… 3 分

又 $CD\perp BD$，$BD\cap AO=O$，所以 $CD\perp$平面 ABD. …………………… 4 分

因为 $CD\subset$平面 ACD，所以平面 $ACD\perp$平面 ABD. …………………… 5 分

(2)解：由(1)知 OB，OE，OA 两两垂直，如图，分别以$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OE}$，$\overrightarrow{OA}$的方向为 x，y，z 轴正方向建立空间直角坐标系 $O-xyz$，则 $B(\sqrt{3},0,0)$，$C(-\sqrt{3},2,0)$，$D(-\sqrt{3},0,0)$，$A(0,0,1)$，$\overrightarrow{AC}=(-\sqrt{3},2,-1)$，$\overrightarrow{BC}=(-2\sqrt{3},2,0)$ …… 6 分

设 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$ 是平面 ABC 的法向量，可得 $\begin{cases}-\sqrt{3}x+2y-z=0,\\-2\sqrt{3}x+2y=0,\end{cases}$ 令 $x=1$，得 $\boldsymbol{m}=(1,\sqrt{3},\sqrt{3})$. ········ 8 分

设 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$ 是平面 ACD 的法向量，因为 $\overrightarrow{DC}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{AC}=(-\sqrt{3},2,-1)$，

则 $\begin{cases}2y_1=0,\\-\sqrt{3}x_1+2y_1-z_1=0,\end{cases}$ 令 $x_1=1$，得 $\boldsymbol{n}=(1,0,-\sqrt{3})$. ········ 10 分

设平面 ABC 与平面 ACD 所成的锐二面角为 θ，则 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\left|\dfrac{1-3}{\sqrt{7}\times 2}\right|=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$，即平面 ABC 与平面 ACD 所成锐二面角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{7}}{7}$. ········ 12 分

评分细则：

(1)第一问中，也可以先建立空间直角坐标系，用向量方法证明，不管用哪种方法，证出得 5 分；

(2)第二问中，建立空间直角坐标系，写出相关点的坐标，得 1 分，计算出相关向量坐标，得 1 分，计算出平面的法向量各得 2 分，整个题完全正确得满分；

(3)若用传统做法，作出二面角的平面角得 1 分，简单证明得 2 分，整个题解答完全正确得满分.

21. 解：(1)设 $P(x_0,y_0)$，由题设知 $A_1(-a,0)$，$A_2(a,0)$， ········ 1 分

因为 $k_{PA_1}\cdot k_{PA_2}=\dfrac{y_0}{x_0+a}\cdot\dfrac{y_0}{x_0-a}=\dfrac{y_0^2}{x_0^2-a^2}=\dfrac{3(1-\frac{x_0^2}{a^2})}{x_0^2-a^2}=-\dfrac{3}{a^2}$， ········ 3 分

所以 $-\dfrac{3}{a^2}=-\dfrac{3}{4}$，解得 $a^2=4$， ········ 4 分

所以椭圆 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. ········ 5 分

(2)根据题意，设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，直线 MN：$x=my+1(m\neq 0)$，

由 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1,\\x=my+1,\end{cases}$ 消去 x 并整理，得 $(3m^2+4)y^2+6my-9=0$， ········ 6 分

则 $\Delta=36m^2+36(3m^2+4)>0$，即 $y_1+y_2=-\dfrac{6m}{3m^2+4}$，$y_1y_2=-\dfrac{9}{3m^2+4}$. ········ 7 分

因为 $k_{A_1M}=\dfrac{y_1}{x_1+2}$，$k_{A_1N}=\dfrac{y_2}{x_2+2}$，

所以 $k_{A_1M}+k_{A_1N}=\dfrac{y_1(x_2+2)+y_2(x_1+2)}{(x_1+2)(x_2+2)}=\dfrac{y_1(my_2+3)+y_2(my_1+3)}{(my_2+3)(my_1+3)}=\dfrac{2my_1y_2+3(y_1+y_2)}{m^2y_1y_2+3m(y_1+y_2)+9}=-m$，

········ 9 分

又 $k_{MN}=\dfrac{1}{m}$，由 $k_{A_1M}+k_{A_1N}=-k_{MN}$，得 $\dfrac{1}{m}-m=0$，解得 $m^2=1$， ········ 10 分

所以 $|y_1+y_2|=\dfrac{6}{7}$，$y_1y_2=-\dfrac{9}{7}$.

故 $|MN|=\sqrt{1+m^2}\,|y_1-y_2|=\sqrt{2}\cdot\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\dfrac{24}{7}$. ········ 12 分

评分细则：

(1)第一问中，写出左、右顶点的坐标，得 1 分，求出 $k_{PA_1}\cdot k_{PA_2}=-\dfrac{3}{a^2}$，得 2 分，正确求出标准方程共得 5 分；

(2)第二问中，做到 $(3m^2+4)y^2+6my-9=0$ 这一步累计得 6 分，写出韦达定理和判别式累计得 7 分，写出 $k_{A_1M}+k_{A_1N}=-m$ 的表达式，累计得 9 分，全部正确做完得满分；

(3)第二问中，也可用其他方法，参照上述步骤给分.

22. 解：(1)由已知得 $g(x)=f'(x)=e^x-2ax$，所以 $g'(x)=e^x-2a$. ………………………… 1分

①当 $a\leqslant 0$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增. ………………………… 2分

②当 $a>0$ 时，令 $g'(x)>0$，则 $x>\ln 2a$；令 $g'(x)<0$，则 $x<\ln 2a$.

所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,\ln 2a)$ 上单调递减，在 $(\ln 2a,+\infty)$ 上单调递增.

综上所述，当 $a\leqslant 0$ 时，$g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增；

当 $a>0$ 时，$g(x)$ 在 $(-\infty,\ln 2a)$ 上单调递减，在 $(\ln 2a,+\infty)$ 上单调递增. ………………………… 4分

(2) $f'(x)=e^x-2ax=2x(\frac{e^x}{2x}-a)$，$x\in(1,+\infty)$.

令 $f'(x)=0$，得 $a=\frac{e^x}{2x}$. ………………………… 5分

设 $h(x)=\frac{e^x}{2x}$，则 $h'(x)=\frac{(x-1)e^x}{2x^2}$. ………………………… 6分

当 $x>1$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $h(x)$ 的值域是 $(\frac{e}{2},+\infty)$. ………………………… 7分

当 $a\leqslant\frac{e}{2}$ 时，$f'(x)=0$ 没有实根，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f(x)>f(1)=e-a\geqslant\frac{e}{2}$，符合题意. ………………………… 9分

当 $a>\frac{e}{2}$ 时，$h(1)=\frac{e}{2}<a$，

所以 $h(x)=a$ 有唯一实根 $x_0(x_0>1)$，即 $f'(x)=0$ 有唯一实根 x_0， ………………………… 10分

当 $x\in(1,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(1,x_0)$ 上单调递减，

所以 $f(x)<f(1)=e-a<\frac{e}{2}$，不符合题意. ………………………… 11分

综上所述，$a\leqslant\frac{e}{2}$，即 a 的取值范围是 $(-\infty,\frac{e}{2}]$. ………………………… 12分

评分细则：

(1)第一问中，求出 $g'(x)=e^x-2a$ 得 1 分，正确讨论 $a\leqslant 0$ 的情形得 1 分，正确讨论 $a>0$ 的情形累计得 4 分；

(2)第二问中，只要得到 $h'(x)=\frac{(x-1)e^x}{2x^2}$，得 2 分，求出 $h(x)$ 的值域是 $(\frac{e}{2},+\infty)$，得 1 分，讨论 $a\leqslant\frac{e}{2}$ 的情形，累计得 9 分，讨论 $a>\frac{e}{2}$ 的情形，累计得 11 分，正确解完本题得满分；

(3)采用其他方法，参照本评分标准依步骤给分.

关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于**中国拔尖人才培养**的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95%以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承“专业、专注、有态度”的创办理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网“年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的**新高考拔尖人才培养**服务平台。