

注意事项:

1. 本试卷满分 150 分,考试时间 120 分钟。
2. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
3. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其它答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效。
4. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的。

1. 复数 $z = \frac{i}{1+i}$ 在复平面上对应的点在

- A. 第一象限 $\frac{i+1}{2}$ B. 第二象限
C. 第三象限 D. 第四象限

2. 已知集合 $A = \{x | (2x+1)(x-1) > 0\}$, $B = \{x | y = \log_2(1-x)\}$, 则 $A \cap B$ 等于

- A. $(-\frac{1}{2}, 1)$ B. $(-\infty, -\frac{1}{2})$
C. $(1, +\infty)$ D. $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (1, +\infty)$

3. 已知双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$, 则该双曲线的离心率为

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. 4

4. “ $a = 1$ ”是“直线 $2x + ay + 4 = 0$ 与直线 $(a-1)x + y + 2 = 0$ 平行”的

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

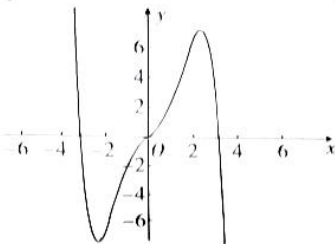
5. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 4x - \frac{1}{2}, & x < 1 \\ a^x, & x \geq 1 \end{cases}$, 若 $f[f(\frac{7}{8})] = 8$, 则 $a =$

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{3}{4}$ C. 1 D. 2

6. 已知两个等比数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的前 n 项积分别为 A_n, B_n , 若 $\frac{a_3}{b_3} = 3$, 则 $\frac{A_5}{B_5} =$

- A. 3 B. 27 C. 81 D. 243

7. 已知函数 $f(x) = e^{x-1}$, $g(x) = \sin x$, 某函数的部分图象如图所示, 则该函数可能是



A. $y = f(x) + g(x)$

B. $y = f(x) - g(x)$

C. $y = f(x)g(x)$

D. $y = \frac{g(x)}{f(x)}$

8. 将函数 $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{12}\right)$ 图象上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍 (纵坐标不变), 再把得到的曲线向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度, 得到函数 $g(x)$ 的图象, 则 $g(x)$ 图象的一条对称轴方程是

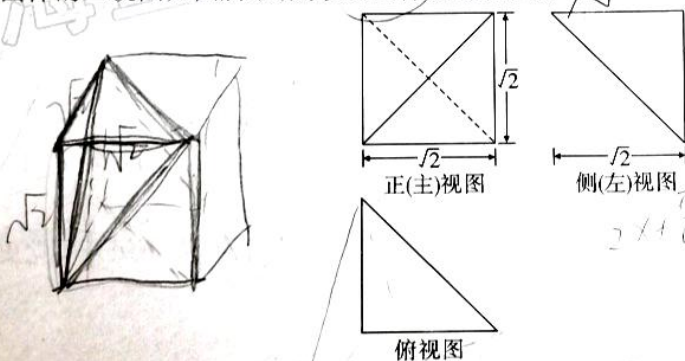
A. $x = \frac{\pi}{8}$

B. $x = -\frac{\pi}{8}$

C. $x = \frac{3\pi}{16}$

D. $x = \frac{5\pi}{16}$

9. 一个四面体的三视图如图所示, 则该四面体的表面积为



A. $2\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1$

B. $\sqrt{3} + 2\sqrt{2} + 1$

C. $\sqrt{3} + \sqrt{2} + 2$

D. $\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1$

10. 我国古代以天为主, 以地为从, 天和干相连叫天干, 地和支相连叫地支, 合起来叫天干地支. 天干有十个, 就是甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛、壬、癸, 地支有十二个, 依次是子、丑、寅、卯、辰、巳、午、未、申、酉、戌、亥. 古人把它们按照甲子、乙丑、丙寅……的顺序而不重复地搭配起来, 从甲子到癸亥共六十对, 叫做一甲子. 我国古人用这六十对干支来表示年、月、日、时的序号, 周而复始, 不断循环, 这就是干支纪年法 (即农历). 干支纪年历法, 是屹立于世界民族之林的科学历法之一. 今年 (2021 年) 是辛丑年, 也是伟大的中国共产党成立 100 周年, 则中国共产党成立的那一年是

A. 辛酉年

B. 辛戌年

C. 壬酉年

D. 壬戌年

11. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $\tan A = -3\tan C, ac = 2$, 则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. 1

D. 2

12. 若 $\forall x \in (0, +\infty), \ln(ax) \leq \frac{e^x - 1}{a}$ 恒成立, 则 a 的最大值为

A. e^{-1}

B. 1

C. e

D. e^2

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分

13. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - y + 1 > 0 \\ x \leq 1 \end{cases}$, 则 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 的最小值为

14. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知点 D 满足 $BC = 3CD$, 若 $AD = mAB + \frac{1}{3}AC$, 则 $m =$

15. 已知点 P 为抛物线 $C: y = x^2$ 上的动点, 过点 P 作圆 $M: (x+1)^2 + (y-2)^2 = 1$ 的一条切线, 切点为 A , 则 $|PA| + |PM|$ 的最小值为

16. 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长等于 1, 点 P 为底面 $A_1B_1C_1D_1$ 的四条棱上任意一点, 则 $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PD}$ 的取值范围为

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分) 已知函数 $f(x) = \sin x \cos x + \sqrt{3} \cos^2 x - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

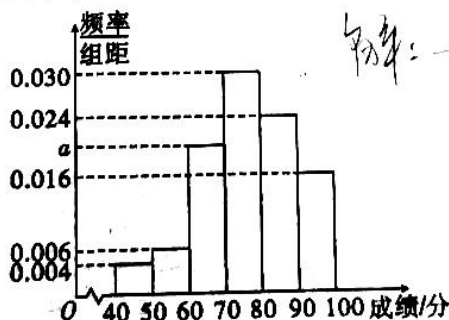
(1) 求 $f(x)$ 的单调递减区间;

(2) 设锐角 $\triangle ABC$ 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $f(A) = 0, a = 2\sqrt{3}$, 求 b 的取值范围.

$$f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x + \sqrt{3} \cos^2 x - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

18. (12 分) 为了讴歌中华民族实现伟大复兴的奋斗历程, 增进学生对党史的了解, 某班级开展党史知识竞赛活动, 现把 50 名学生的成绩绘制了如图所示的频率分布直方图.



(1) 求 a 的值并估计这 50 名学生的平均成绩 (同一组中的数据用该组区间的中点值为代表);

(2) 用分层抽样的方法从成绩在 $[80, 90)$, $[90, 100]$ 两组学生中抽取 5 人进行培训, 再从这 5 人中随机抽取 2 人参加校级党史知识竞赛, 求这 2 人来自不同小组的概率.

19. (12分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 满足 $a_1 = 1, S_n = \left(\frac{1}{2}n + t\right)n$ (t 为常数).

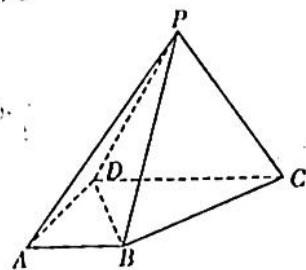
(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $b_n = (-1)^n \lg(a_n \cdot a_{n+1})$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n .

20. (12分) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AB \parallel CD, CD = 2AB = 2$.

(1) 在棱 PC 上是否存在点 E , 使得 $BE \parallel$ 平面 PAD ? 说明理由;

(2) 若平面 $PCD \perp$ 平面 $ABCD, BC = BD = \sqrt{2}, PC = PD = 2$, 求点 A 到平面 PBC 的距离.



21. (12分) 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的焦点为 $F_1(-1, 0), F_2(1, 0)$, 且点 $T\left(1, \frac{3}{2}\right)$ 在 E 上.

(1) 求 E 的方程;

(2) 已知过定点 $M(0, m)$ 的动直线 l 交 E 于 A, B 两点, 线段 AB 的中点为 N , 若 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}$ 为定值, 试求 m 的值.

2. (12分) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - a \ln x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $a > 0$, 关于 x 的方程 $f(x) = ax$ 有唯一解, 求 a 的值.