

2023 届高三年级 5 月份大联考

数学参考答案及解析

一、单选题

1. C 【解析】由 $z(1+2i) = |1+2\sqrt{6}i|$ 可得 $z =$

$$\frac{|1+2\sqrt{6}i|}{1+2i} = \frac{5}{1+2i} = \frac{5(1-2i)}{5} = 1-2i, \text{ 则 } z \text{ 的虚部}$$

为 -2. 故选 C.

2. C 【解析】因为 $A = \{x \in \mathbb{Z} | -1 < x < 3\} =$

$$\{0, 1, 2\}, B = \{x | 3x - a \geq 0\} = \{x | x \geq \frac{a}{3}\}, \text{ 因}$$

为 $A \cap (B) = \{1, 2\}$, 所以 $0 < \frac{a}{3} \leq 1$, 解得 a 的取值范围为 $(0, 3]$. 故选 C.

3. B 【解析】一组变量之间的相关系数为 $|r|$ 越大, 则

具有较强的线性相关关系, 例 $r_1 = 0.1 > -0.9 = r_2$, 则第二组变量比第一组的线性相关关系强, 故 A 不正确, B 正确; 残差平方和越小的模型, 拟合的效果越好, 故 C 不正确; 用决定系数 R^2 来刻画回归效果, R^2 越大说明拟合效果越好, 故 D 不正确, 故选 B.

4. C 【解析】因为 $f(x) = (\frac{2}{1+e^x} - 1) \cos x$ 为奇函数, 图象关于原点对称, 所以排除 A, D. 因为

$$f(\frac{\pi}{2}) = 0, \text{ 所以排除 B. 故选 C.}$$

5. A 【解析】 $\because b = 1, \cos A - a \cos B = a, \therefore b \cos A -$

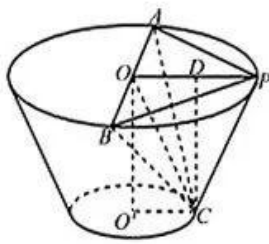
$a \cos B = a, \therefore$ 由正弦定理得, $\sin B \cos A - \sin A \cos B = \sin A, \therefore \sin(B - A) = \sin A, \therefore B - A = A$ 或 $B - A + A = \pi$, 解得: $B = 2A$ 或 $B = \pi$ (舍), 又 $\because \triangle ABC$ 为锐

$$\text{角三角形, 则 } C = \pi - A - B = \pi - 3A, \therefore \begin{cases} 0 < A < \frac{\pi}{2} \\ 0 < B < \frac{\pi}{2} \\ 0 < C < \frac{\pi}{2} \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} 0 < A < \frac{\pi}{2} \\ 0 < 2A < \frac{\pi}{2} \\ 0 < \pi - 3A < \frac{\pi}{2} \end{cases}, \text{ 解得: } \frac{\pi}{6} < A < \frac{\pi}{4}, \text{ 故选 A.}$$

6. A 【解析】设 O' 为下底面圆的圆心, 连接 OO', CO'

和 CO , 因为 $AP = BP$, 所以 $AB \perp OP$, 又因为 $AB \perp OO', OP \cap OO' = O, OP, OO' \subset \text{平面 } OO'P$, 所以 $AB \perp \text{平面 } OO'P$, 因为 PC 是该圆台的一条母线, 所以 O, O', C, P 四点共面, 且 $OC \parallel OP$, 又 $AB \subset \text{平面 } ABC$, 所以 $\text{平面 } ABC \perp \text{平面 } POC$, 又因为 $\text{平面 } ABC \cap \text{平面 } POC = PC$, 所以点 P 在平面 ABC 的射影在直线 OC 上, 则 OP 与平面 ABC 所成的角即为 $\angle POC = \angle OCO'$, 过点 C 作 $CD \perp OP$ 于点 D , 因为 $OP = 1 \text{ cm}, OC = 2 \text{ cm}$, 所以 $\tan \angle POC = \tan \angle OCO' = \frac{OO'}{OC} = 2$, 故选 A.



7. C 【解析】由八卦图可知, 八卦中全为阳线和全为阴

线的卦各有一个, 两阴一阳和三阴一阳的卦各有三个, 所以 $P(AB) = \frac{C_1^1 C_1^1}{C_3^3} = \frac{9}{28}, P(B) = \frac{C_1^1 + C_2^1 C_1^1}{C_3^3} =$

$$\frac{9}{14}, \text{ 所以 } P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{1}{2}, \text{ 故选 C.}$$

8. D 【解析】设轧辊的半径为 r , 则 $\pi r^2 = \frac{640\,000}{\pi}$, 所以

$$r = \frac{800}{\pi}, \text{ 所以轧辊的周长为 } 2\pi r = 1\,600 \text{ mm, 设输入}$$

数学

参考答案及解析

第一对面带的厚度为 β mm, 宽度为 γ mm, 因为第 k 对轧辊出口处相邻疵点间距离为轧辊周长, 所以在第 k 对出口处的两疵点间面带的体积为 $1600\beta(1-0.2)^k\gamma$ (mm³), 而在揩面机出口处两疵点间面带的体积为 $L_k\beta(1-0.2)^{10}\gamma$ (mm³), 因宽度相等, 且无损耗, 由体积相等得, $1600\beta(1-0.2)^k\gamma = L_k\beta(1-0.2)^{10}\gamma$, 所以 $L_k = 1600 \times 0.8^{k-10}$ mm. 故选 D.

二、多选题

9. BC 【解析】A. 因为 $a \cdot n_1 = 0$, 所以 $l \parallel a$ 或 $l \subset a$, 所以 A 错误; B. 因为 $n_1 \cdot n_2 = 0$, 所以 $a \perp \beta$, 所以 B 正确; C. 显然 $a \parallel b$ 不成立, 所以 l 与 m 为相交直线或异面直线, 所以 C 正确; D. a 在 b 向量上的投影向量为 $\frac{a \cdot b}{|b|^2} \cdot b = -\frac{4}{5} \times (0, 1, -2) = (0, -\frac{4}{5}, \frac{8}{5})$, 所以 D 错误. 故选 BC.

10. ABD 【解析】因为 $a^2 + b^2 = c^2$, $a < b$, 所以 $a < b < c$, 且 a, b, c 为一个直角三角形的三边, 所以 $a + b > c$, $2a < b + c$, 所以 $\frac{a+b}{c} > 1$, $\frac{b+c}{a} > 2$, 所以 A, B 成立; 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的一条斜率为正的渐近线方程为 $y = \frac{b}{a}x$, 因为点 $P(2, 3)$ 在渐近线 $y = \frac{b}{a}x$ 的右侧, 所以 $\frac{b}{a} > \frac{3}{2}$, 所以 $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{1 + (\frac{b}{a})^2} > \frac{\sqrt{13}}{2}$, 所以 C 不成立, D 成立. 故选 ABD.

11. AB 【解析】由二项式定理得, $f(x) = (x-1)^5$, 所以 $f(x)$ 可以被 $(x-1)^5$ 整除, 所以 A 正确; $f(x+y+1) = (x+y)^5$ 可以被 $(x+y)^5$ 整除, 所以 B 正确; C. $f(30) = 29^5 = (27+2)^5 = 27^5 + C_5^1 \times 27^4 \times 2 + \dots + C_5^4 \times 27 \times 2^4 + C_5^5 \times 2^5$, 所以 $f(30)$ 被 27 除的余数即为 2^5 被 27 除的余数为 5, 所以 C 错

误; D. $f(29) = 28^5$, 而 28^5 与 8^5 的个位数相同, 所以 $f(29)$ 的个位数为 8, 故 D 错误. 故选 AB.

12. ABC 【解析】设该直线与 $f(x)$ 相切于点 $(x_1, x_1^3 - x_1)$, 因为 $f'(x) = 3x^2 - 1$, 所以 $f'(x_1) = 3x_1^2 - 1$, 所以该切线方程为 $y - (x_1^3 - x_1) = (3x_1^2 - 1)(x - x_1)$, 即 $y = (3x_1^2 - 1)x - 2x_1^3$. 设该直线与 $g(x)$ 相切于点 $(x_2, x_2^2 - a^2 + a)$, 因为 $g'(x) = 2x$, 所以 $g'(x_2) = 2x_2$, 所以该切线方程为 $y - (x_2^2 - a^2 + a) = 2x_2(x - x_2)$, 即 $y = 2x_2x - x_2^2 - a^2 + a$. 所以 $\begin{cases} 3x_1^2 - 1 = 2x_2 \\ -2x_1^3 = -x_2^2 - a^2 + a \end{cases}$, 所以 $-a^2 + a = x_2^2 - 2x_1^3 = (\frac{3x_1^2 - 1}{2})^2 - 2x_1^3 = \frac{9}{4}x_1^4 - 2x_1^3 - \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{1}{4}$, 令 $h(x) = \frac{9}{4}x^4 - 2x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}$, $\therefore h'(x) = 9x^3 - 6x^2 - 3x = 3x(3x + 1)(x - 1)$, $\therefore$ 当 $x \in (-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (0, 1)$ 时, $h'(x) < 0$; 当 $x \in (-\frac{1}{3}, 0) \cup (1, +\infty)$ 时, $h'(x) > 0$; $\therefore h(x)$ 在 $(-\infty, -\frac{1}{3})$, $(0, 1)$ 上单调递减; 在 $(-\frac{1}{3}, 0)$, $(1, +\infty)$ 上单调递增; 又 $h(-\frac{1}{3}) = \frac{5}{27}$, $h(1) = -1$, 所以 $h(x) \in [-1, +\infty)$, 所以 $-a^2 + a \geq -1$, 解得, $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq a \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, 所以 a 的取值范围为 $[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}]$, A 显然正确; B. $-\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{2\sqrt{2} - (2+\sqrt{2})}{4} > 0$, 所以 $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < -\frac{\sqrt{2}}{4} < 0$, 所以 B 正确; C. 因为 $0 < \log_2 \sqrt{7} < \log_2 2\sqrt{2} = \frac{3}{2} < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, 所以 C 正确; D. 因为 $\frac{\sqrt{e}}{\pi} + \frac{\pi}{\sqrt{e}} > 2\sqrt{\frac{\sqrt{e}}{\pi} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{e}}} = 2 >$

参考答案及解析

数学

$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, 所以 D 不正确, 故选 ABC.

三、填空题

13. 充分不必要 【解析】 $D \Leftrightarrow B \Rightarrow A \Rightarrow C$, 所以 $D \Rightarrow C$, 但 A 不能推出 B, 且 C 不能推出 A, 所以 D 是 C 的充分不必要条件, 故答案为充分不必要.

14. -265 【解析】由 $S_5 = 55$ 得, $5a_3 = 55$, 所以 $a_3 = 11$, 所以公差 $d = a_4 - a_2 = -3$, 所以 $a_n = a_2 + (n-2)d = 20 - 3(n-2)$, 所以 $a_{2n-1} = 23 - 9n$, 所以数列 $\{a_{2n-1}\}$ 的前 10 项的和为 $\frac{10 \times (14 - 67)}{2} = -265$.
故答案为 -265.

15. $\frac{\sqrt{10}}{10}$ 【解析】根据题意, O 是 BC 中点, 所以 AO 是 $\triangle ABC$ 的中线, 又 BD 是中线, 所以 F 为 $\triangle ABC$ 的重心, 所以 $AO = 3FO$, 所以 $b = 3c$, 所以 $b^2 = 9c^2$, $a^2 - c^2 = 9c^2$, $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{10}}{10}$, 故答案为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$.

16. $[\frac{1}{2}, \sqrt{3}]$ 【解析】由正弦函数的性质可知, 当 $f(x)$ 在 $[a, a + \frac{\pi}{3}]$ 上单调时, $N - M$ 取得最大值,
 $N - M = \left| f(a + \frac{\pi}{3}) - f(a) \right| = \left| \sin(2a + \frac{\pi}{3}) - \sin(2a - \frac{\pi}{3}) \right| = \left| \sqrt{3} \cos 2a \right| \leq \sqrt{3}$; 当 $f(x)$ 在 $[a, a + \frac{\pi}{3}]$ 上不单调, 且当 $f(x)$ 在 $[a, a + \frac{\pi}{3}]$ 上的图象具有对称性时, 即 $f(x)$ 在 $x = \frac{a + a + \frac{\pi}{3}}{2} = a + \frac{\pi}{6}$ 取得最大值或最小值时, $N - M$ 取得最小值, 此时有 $2(a + \frac{\pi}{6}) - \frac{\pi}{3} = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$, 即 $a = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$, 则 $N - M = \left| f(a) - f(a + \frac{\pi}{6}) \right| = \left| \sin(2a - \frac{\pi}{3}) - \sin 2a \right| = \left| \sin(2a + \frac{\pi}{3}) \right| =$

$\left| \sin(k\pi + \frac{5\pi}{6}) \right| = \frac{1}{2}$, 以 $N - M$ 的取值范围是

$[\frac{1}{2}, \sqrt{3}]$, 故答案为 $[\frac{1}{2}, \sqrt{3}]$.

四、解答题

17. 解: (1) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q .

因为 $a_1, 3a_2, a_3$ 成等差数列, 所以 $6a_2 = a_1 + a_3 \cdot q \neq 1$, 所以 $6a_1 q^2 = a_1 + a_1 q$.

所以 $6q^2 = 1 + q$, 又 $q > 0$, 所以 $q = \frac{1}{2}$.

因为 $S_4 = \frac{15}{8}$, 所以 $\frac{a_1(1 - q^4)}{1 - q} = \frac{15}{8}$, 所以 $a_1 = 1$.

$a_n = (\frac{1}{2})^{n-1}$. (3分)

所以 $S_n = \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - (\frac{1}{2})^n$.

$S_n - 2 = -(\frac{1}{2})^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^+$, 所以 $\frac{S_{n+1} - 2}{S_n - 2} = \frac{1}{2}$.

又 $S_1 - 2 = -1$, 所以数列 $\{S_n - 2\}$ 是首项为 -1, 公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列. (5分)

(2) 由 (1) 得, $a_n = (\frac{1}{2})^{n-1}$, 所以 $b_n = (\frac{1}{2})^{n-1}$.

$\left[\log_2 \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} - 1 \right] = -n \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$. (6分)

所以 $-T_n = 1 \times \left(\frac{1}{2} \right)^0 + 2 \times \left(\frac{1}{2} \right)^1 + 3 \times \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \dots + n \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$ ①.

$-\frac{1}{2} T_n = 1 \times \left(\frac{1}{2} \right)^1 + 2 \times \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \dots + (n-1) \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} + n \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^n$ ②. (8分)

① - ② 得, $-\frac{1}{2} T_n = \left(\frac{1}{2} \right)^0 + \left(\frac{1}{2} \right)^1 + \dots + \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} - n \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^n$. (9分)

$= \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} - n \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^n = 2 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^n - n \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^n$.

数学

参考答案及解析

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n = 2 - (2+n) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

$$\text{整理得: } T_n = (n+2) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 4. \quad (10 \text{ 分})$$

18. 解: (1) 由题中数据可得:

$$\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = \frac{15}{5} = 3, \quad \bar{y} = \frac{1.2+1.8+2.5+3.2+3.8}{5} = \frac{12.5}{5} = 2.5,$$

$$\therefore \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = (-2) \times (-1.3) + (-1) \times (-0.7) + 0 + 1 \times 0.7 + 2 \times 1.3 = 6.6,$$

$$\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 = 10, \quad \sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2 = 4.36, \quad (2 \text{ 分})$$

$$r = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{6.6}{\sqrt{10} \times \sqrt{4.36}} = \frac{6.6}{\sqrt{43.6}} \approx \frac{6.6}{6.603} > 0.75,$$

$$\therefore \hat{a} = \bar{y} - \bar{b}\bar{x} = 2.5 - 0.66 \times 3 = 0.52.$$

$$\therefore y \text{ 关于 } x \text{ 的线性回归方程为 } \hat{y} = 0.66x + 0.52. \quad (6 \text{ 分})$$

故 2023 年 1-5 月份 x 与接待游客人数 y 之间有较强的线性相关程度.

$$\text{由上可知 } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2} = \frac{6.6}{10} = 0.66.$$

0.66.

$$\therefore \hat{a} = \bar{y} - \bar{b}\bar{x} = 2.5 - 0.66 \times 3 = 0.52.$$

$$\therefore y \text{ 关于 } x \text{ 的线性回归方程为 } \hat{y} = 0.66x + 0.52. \quad (6 \text{ 分})$$

(2) 零假设为

H_0 : 游客对本地景区满意度与报团游或自助游无关联.

依题意, 完善表格如下:

	报团游	自助游	合计
满意	15	3	18
不满意	5	7	12
合计	20	10	30

(8 分)

根据列联表中的数据, 经计算得到

$$\chi^2 = \frac{30 \times (15 \times 7 - 5 \times 3)^2}{20 \times 10 \times 18 \times 12} = 5.625 > 3.841 = \chi_{0.05}^2,$$

(10 分)

根据小概率值 $\alpha = 0.05$ 的独立性检验, 推断 H_0 不成立, 即认为游客对本地景区满意度与报团游或自助游有关联. (12 分)

$$19. \text{ 解: (1) 由题意得 } S_1 = \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2, \quad S_2 =$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} b^2, \quad S_3 = \frac{\sqrt{3}}{4} c^2, \text{ 则 } S_1 - S_2 + S_3 = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} b^2 +$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} c^2 = \frac{\sqrt{6}}{2}, \text{ 即 } a^2 + c^2 - b^2 = 2\sqrt{2}. \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{由余弦定理得 } \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \text{ 整理得 } ac \cos B =$$

$$\sqrt{2}. \quad (4 \text{ 分})$$

$$\text{因为 } \cos B = \frac{5}{13}, \text{ 所以 } \sin B = \frac{12}{13}. \quad (4 \text{ 分})$$

$$\text{所以 } ac = \frac{\sqrt{2}}{\cos B} = \frac{13\sqrt{2}}{5}. \quad (5 \text{ 分})$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{6\sqrt{2}}{5}. \quad (6 \text{ 分})$$

$$(2) \text{ 因为 } \cos A = \frac{3}{5}, \text{ 所以 } \sin A = \frac{4}{5},$$

$$\sin C = \sin(A+B) = \frac{4}{5} \cos B + \frac{3}{5} \sin B = \frac{56}{65}, \quad (8 \text{ 分})$$

$$\text{由正弦定理得, } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

$$\text{所以 } \frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C} = \sqrt{\frac{ac}{\sin A \sin C}}, \quad (10 \text{ 分})$$

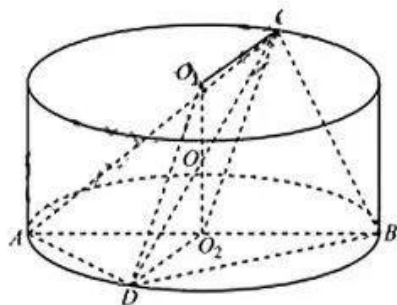
$$\text{所以 } a+b+c = (\sin A + \sin B + \sin C) \sqrt{\frac{ac}{\sin A \sin C}}.$$



$$= \frac{168}{65} \sqrt{\frac{13\sqrt{2}}{5}} = \frac{3}{5} \sqrt{70\sqrt{2}},$$

$$\text{所以 } (a+b+c)^2 = \frac{126\sqrt{2}}{5}, \text{ (12分)}$$

20. 解: (1) 连接 O_1C, O_2C, O_1D, O_2D , 如图所示,



因为线段 CD 与线段 O_1O_2 交于 O 点, 所以 C, O_1, D, O_2 四点共面, 又因为圆柱 O_1O_2 的上下底面平行, 所以 $O_1C \parallel O_2D$. (2分)

因为 $O_1C = O_2D$, 所以四边形 CO_1DO_2 为平行四边形.

所以 $OO_1 = OO_2$, 即 O 为线段 O_1O_2 的中点. (4分)

(2) 设圆柱的底面半径和高分别为 r, h .

因为圆柱 O_1O_2 的体积和侧面积都为 8π , 所

$$\text{以 } \begin{cases} \pi r^2 h = 8\pi \\ 2\pi r h = 8\pi \end{cases},$$

所以 $r = h = 2$. (5分)

延长 DO_1 交 $\odot O_2$ 于点 E , 连接 CE , 因为 E 在 $\odot O_2$ 上, AB 为 $\odot O_2$ 的直径,

所以 $AE \perp BE$, 因为 $O_1C = O_2E, O_1C \parallel O_2E$, 所以四边形 CO_1O_2E 为平行四边形.

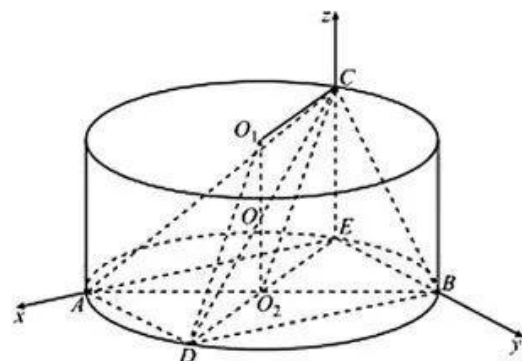
所以 $O_1O_2 \parallel CE$, 所以 $CE \perp$ 平面 ABE . (6分)

所以 $\angle CAE$ 为直线 AC 与下底面所成的角, 所以 $\angle CAE = \frac{\pi}{6}$.

因为 $CE = 2$, 所以 $AE = 2\sqrt{3}$, 所以 $BE = 2$. (7分)

因为 EA, EB, EC 两两垂直, 如图所示, 以 E 为坐标原点, $\vec{EA}, \vec{EB}, \vec{EC}$ 的方向分别为 x 轴, y 轴, z 轴的

正方向, 建立空间直角坐标系 $E-xyz$.



所以 $A(2\sqrt{3}, 0, 0), B(0, 2, 0), C(0, 0, 2),$

$D(2\sqrt{3}, 2, 0)$.

所以 $\vec{AD} = (0, 2, 0), \vec{CD} = (2\sqrt{3}, 2, -2),$

$\vec{BD} = (2\sqrt{3}, 0, 0)$.

设平面 ACD 的法向量为 $n_1 = (x, y, z)$,

$$\begin{cases} n \cdot \vec{AD} = 0 \\ n \cdot \vec{CD} = 0 \end{cases}$$

$$\text{则 } \begin{cases} 2y = 0 \\ 2\sqrt{3}x + 2y - 2z = 0 \end{cases}, \text{不妨取 } n_1 = (1, 0, \sqrt{3}).$$

(9分)

同理可求平面 BCD 的法向量为 $n_2 = (0, 1, 1)$.

(10分)

设平面 ACD 与平面 BCD 所成的锐角为 θ ,

$$\text{所以 } \cos \theta = \frac{|n_1 \cdot n_2|}{|n_1| |n_2|} = \frac{\sqrt{3}}{2 \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{4},$$

即平面 ACD 与平面 BCD 所成锐角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

(12分)

21. 解: (1) 设动点 P 的坐标为 (x, y) , 由已知得,

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = |x| + 1,$$

$$\text{化简得: } y^2 = \begin{cases} 4x, x \geq 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}, \text{故曲线 } C \text{ 的方程为 } y^2 =$$

$$\begin{cases} 4x, x \geq 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}; \quad (2分)$$

数学

参考答案及解析

(2) 因为点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 分别为曲线 C 上的第一象限和第四象限的点, 所以当直线 AB 的斜率为 0 时, 不适合题意; 当直线 AB 的斜率不为 0 时, 设直线 AB 的方程为 $x = ay + t$.

$$\text{由 } \begin{cases} x = ay + t \\ y^2 = 4x \end{cases} \text{ 得, } y^2 - 4ay - 4t = 0, \Delta = 16a^2 + 16t > 0,$$

> 0 ,

$$\text{所以 } \begin{cases} y_1 + y_2 = 4a \\ y_1 y_2 = -4t \end{cases} \quad (4 \text{ 分})$$

由 $y_1 y_2 = -4t < 0$, 得 $t > 0$.

因为 $x_1 x_2 + y_1 y_2 = \frac{9}{4}$, 所以 $(ay_1 + t)(ay_2 + t) + y_1 y_2 = \frac{9}{4}$, 所以 $(a^2 + 1)y_1 y_2 + at(y_1 + y_2) + t^2 = \frac{9}{4}$.

所以 $(a^2 + 1)(-4t) + at \cdot 4a + t^2 = \frac{9}{4}$.

解得 $t = \frac{9}{2}$ 或 $t = -\frac{1}{2}$ (舍去). (6 分)

当 $t = \frac{9}{2}$ 时, 直线 AB 的方程为 $x = ay + \frac{9}{2}$, 直线 AB 过定点 $(\frac{9}{2}, 0)$, 且满足 $\Delta > 0$, 且 $y_1 y_2 = -4t = -18$. (8 分)

$$\text{所以 } S_{\triangle AOB} + S_{\triangle ABO} = \frac{1}{2} \times \frac{9}{2} \times |y_1 - y_2| + \frac{1}{2} y_1 = \frac{11}{4} y_1 - \frac{9}{4} y_2 \geq 2 \sqrt{\frac{11}{4} y_1 \cdot (-\frac{9}{4} y_2)} = \frac{3}{2} \sqrt{-11 y_1 y_2} = \frac{9}{2} \sqrt{22}.$$
(11 分)

当且仅当 $\frac{11}{4} y_1 = -\frac{9}{4} y_2$, 即 $y_1 = \frac{9\sqrt{22}}{11}$, $y_2 = -\sqrt{22}$ 时取等号, 故最小值为 $\frac{9}{2}\sqrt{22}$. (12 分)

22. 解: (1) 当 $a = 2$ 时, $f(x) = -2\ln x + x - \frac{1}{x}$, $x \in [1, +\infty)$.

所以 $f'(x) = -\frac{2}{x} + 1 + \frac{1}{x^2} = \frac{(x-1)^2}{x^2} \geq 0$, 当且仅当 $x=1$ 时取等号,

所以 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $f(x) \geq f(1) = 0$, 所以结论成立: (2 分)

$$(2) f'(x) = \frac{(x-1)[x-(a-1)]}{x^2} (x > 0).$$

① 当 $a-1 \leq 0$, 即 $a \leq 1$ 时, $x-(a-1) > 0$.

所以当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减;

当 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增.

故 $f(x) \geq f(1) = -a + 2 > 0$, 因此函数 $f(x)$ 没有零点: (3 分)

② 当 $a-1 > 1$, 即 $a > 2$ 时, 令 $f'(x) > 0$, 得 $0 < x < 1$ 或 $x > a-1$; 令 $f'(x) < 0$, 得 $1 < x < a-1$.

所以 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, a-1)$ 上单调递减, 在 $(a-1, +\infty)$ 上单调递增.

故 $f(x)$ 的极大值 $f(1) = -a + 2 < 0$, $f(e^a) = e^a - a^2 - \frac{a}{e^a} + \frac{1}{e^a}$. (4 分)

令 $F(x) = e^x - x^2 - x (x > 2)$, 则 $F'(x) = e^x - 2x - 1$.

令 $\varphi(x) = e^x - 2x - 1 (x > 2)$, 则 $\varphi'(x) = e^x - 2 > 0$.

所以 $F'(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $F'(x) > F'(2) = e^2 - 5 > 0$, 来源: 高三答案公众号

所以 $F(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增, $F(x) > F(2) = e^2 - 6 > 0$, 即 $e^x - x^2 > x (x > 2)$.

因此 $A(e^a) = e^a - a^2 - \frac{a}{e^a} + \frac{1}{e^a} > a - \frac{a}{e^a} + \frac{1}{e^a} = a(1 - \frac{1}{e^a}) + \frac{1}{e^a} > 0$, 又 $e^a > 1$, 故函数 $f(x)$ 只有一个零点: (6 分)

③ 当 $a-1 = 1$, 即 $a = 2$ 时, $f'(x) \geq 0$, $f(x)$ 在

参考答案及解析

数学

$(0, +\infty)$ 上单调递增.

又 $f(1) = -a + 2 = 0$, 故函数 $f(x)$ 只有一个零点:

(7 分)

④ 当 $0 < a - 1 < 1$, 即 $1 < a < 2$ 时, 令 $f'(x) > 0$, 得 $0 < x < a - 1$ 或 $x > 1$; 令 $f'(x) < 0$, 得 $a - 1 < x < 1$.

所以 $f(x)$ 在 $(0, a - 1)$ 上单调递增, 在 $(a - 1, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 故 $f(x)$ 的最小值 $f(1) = -a + 2 > 0$.

(8 分)

令 $h(x) = \ln x - \sqrt{x}$, 则 $h'(x) = \frac{2 - \sqrt{x}}{2x}$.

易知当 $x = 4$ 时, $h(x)$ 取得最大值, 所以 $h(x) \leq$

$h(4) = \ln 4 - \sqrt{4} = 2(\ln 2 - 1) < 0$,

所以 $\ln x < \sqrt{x}$, 令 $m = \frac{(a-1)^2}{4a^2} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{a}\right)^2$, 则

$0 < m < \frac{1}{16} < 1$, (9 分)

所以 $f(m) = -a \ln m + m + \frac{1-a}{m} = a \ln \frac{1}{m} + \frac{1-a}{m} +$

m . 由 $m = \frac{(a-1)^2}{4a^2}$ 得 $\sqrt{m} = \frac{a-1}{2a}$, 所以 $f(m) <$

$a \sqrt{\frac{1}{m}} + \frac{1-a}{m} + m = \frac{a \sqrt{m} + 1 - a}{m} + m <$

$a \cdot \frac{\frac{a-1}{2a} + 1 - a}{m} + 1 = \frac{m - \frac{a-1}{2}}{m}$,

由 $\frac{a-1}{2a} < \frac{a-1}{2} < 1$ 得, $m = \frac{(a-1)^2}{4a^2} < \frac{a-1}{2}$, 所以

$f(m) < \frac{m - \frac{a-1}{2}}{m} < 0$,

所以函数 $f(x)$ 只有一个零点, (11 分)

综上, 当 $a \leq 1$ 时, 函数 $f(x)$ 没有零点; 当 $a > 1$ 时, 函数 $f(x)$ 只有一个零点. (12 分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京, 旗下拥有网站 (网址: www.zizzs.com) 和微信公众平台等媒体矩阵, 用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长, 在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南, 请关注自主选拔在线官方微信号: **zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线