武昌区 2022-2023 学年度高二年级期末质量检测

数学参考答案及评分细则

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	B	C	B	D	D	B	A	ABD	ACD	AC	ACD

1．**解析**：选 A

2．**解析**：选 B

3．**解析**：设n年后该地的GDP会翻两番，则$(1+6.5\%)^n=4$，

$\therefore n=\log_{1.065}4=\frac{2\lg 2}{\lg 1.065}\approx\frac{2\times 0.301}{0.0273}\approx 22$.故选 C.

4．**解析**：设圆锥的母线为l，底面半径为R.圆锥的侧面展开图为扇形，该扇形的半径为l，弧长为$2\pi R$，由已知可得，$\pi l=2\pi R$，所以$l=2R$.所以，圆锥的表面积$S=\pi Rl+\pi R^2=3\pi R^2=a$，所以$R=\sqrt{\frac{a}{3\pi}}=\frac{\sqrt{3a\pi}}{3\pi}$，所以，这个圆锥的底面直径为$2R=\frac{2\sqrt{3a\pi}}{3\pi}$.故选 B.

5．**解析**：圆$O: x^2+y^2=4$的圆心为$O(0,0)$，半径$r=2$，若直线$y=x+m$与圆O交于 A，B 两点，且$\triangle AOB$为等边三角形，则圆心O到直线$y=x+m$的距离$d=\sqrt{3}$，

又由点到直线的距离公式可得$\frac{|m|}{\sqrt{2}}=\sqrt{3}$，解得$m=\pm\sqrt{6}$，故选 D.

6．**解析**：第一种策略：设每次购买这种物品的数量均为m,则平均价格为$\frac{mp_1+mp_2}{2m}=\frac{p_1+p_2}{2}$，故 A 不正确；第二种策略：设每次购买这种物品所花的钱为n，第一次能购得该物品的数量为$\frac{n}{p_1}$， 第二次能购得该物品的数量为$\frac{n}{p_2}$，则平均价格为$\frac{2n}{\frac{n}{p_1}+\frac{n}{p_2}}=\frac{2}{\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}}=\frac{2p_1p_2}{p_1+p_2}$，B 错误；

$\frac{p_1+p_2}{2}-\frac{2p_1p_2}{p_1+p_2}=\frac{(p_1+p_2)^2-4p_1p_2}{2(p_1+p_2)}=\frac{(p_1-p_2)^2}{2(p_1+p_2)}>0$ ，所以$\frac{p_1+p_2}{2}>\frac{2p_1p_2}{p_1+p_2}$，故选 D.

7．**解析**：$y=\sin\left(\frac{\pi}{3}+2x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}+2x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}+2x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}+2x\right)$

$=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{12}\right)$，当$2k\pi-\frac{\pi}{2}\le 2x+\frac{\pi}{12}\le 2k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in Z$，得$k\pi-\frac{7\pi}{24}\le x\le k\pi+\frac{5\pi}{24}$，$k\in$ **Z**，则函数单调递增区间为$\left[k\pi-\frac{7\pi}{24}, k\pi+\frac{5\pi}{24}\right]$，$k\in Z$，故选 B.

8．**解析**：因为$a-b=e^{0.02}-2e^{0.01}+1=\left(e^{0.01}-1\right)^2>0$，所以$a>b$.

设$f(x)=2\left(e^x-1\right)-\sin x-\tan x$，则$f'(x)=2e^x-\cos x-\frac{1}{\cos^2 x}$，

令$g(x)=f'(x)$，则$g'(x)=2e^x+\sin x-\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$.

当$x\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$时，$2e^x>2$，$\sin x>0$，$\frac{2\sin x}{\cos^3 x}<\frac{2\sin\frac{\pi}{6}}{\cos^3\frac{\pi}{6}}=\frac{8\sqrt{3}}{9}<2$，

所以$g'(x)>0$，所以当$x\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$时，$f'(x)>f'(0)=0$，所以$f(x)$在$x\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$上单调递增，

从而$f(x)>f(0)=0$，因此$f(0.01)>0$，即$b>c$．综上可得$a>b>c$．故选 A.

9．**解析**：对于方程$x^2+y^2\cos\alpha=1(0\le\alpha\le\pi)$，

当$\alpha=0$时，$\cos\alpha=1$，方程为$x^2+y^2=1$表示圆心在原点，半径为1的圆；

当 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$时，$0<\cos\alpha<1$，此时方程$x^2+y^2\cos\alpha=1$表示焦点在y轴的椭圆；

当$\alpha=\frac{\pi}{2}$时，$\cos\alpha=0$，此时方程$x^2=1$，即$x=\pm1$，表示两条直线；

当$\frac{\pi}{2}<\alpha\le\pi$时，$-1\le\cos\alpha<0$，此时方程$x^2+y^2\cos\alpha=1$表示焦点在$x$轴的双曲线.

综上可得符合依题意的有 A、B、D.故选 ABD.

10. **解析**: A 选项，$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$，A 正确；B 选项，$2\vec{a}-\vec{b}=(2,6)-(-2,1)=(4,5)$，故$(2\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{b}=(4,5)\cdot(-2,1)=-8+5=-3\ne0$，故$2\vec{a}-\vec{b}$与$\vec{b}$不垂直，B 错误；

C 选项，$cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{(1,3)\cdot(-2,1)}{\sqrt{1+9}\times\sqrt{4+1}}=\frac{1}{5\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{10}>0$，故$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为锐角，C 正确；

D 选项，$\vec{a}$在$\vec{b}$上的投影向量为$\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}\cdot\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}=\frac{|(1,3)\cdot(-2,1)|}{\sqrt{4+1}}\cdot\frac{\vec{b}}{\sqrt{4+1}}=\frac{1}{5}\vec{b}$，D 正确.故选 ACD.

11．**解析**：记事件 D：选取的这个人患了流感，记事件 E：此人来自 A 地区，记事件 F：此人来自 B 地区，记事件 G：此人来自 C 地区，则$D=E\cup F\cup G$，且E,F,G彼此互斥，

由题意可得$P(E)=\frac{5}{20}=0.25$，$P(F)=\frac{7}{20}=0.35$，$P(G)=\frac{8}{20}=0.4$，

$P(D|E)=0.06$，$P(D|F)=0.05$，$P(D|G)=0.04$，

A.由全概率公式可得$P(D)=P(E)\cdot P(D|E)+P(F)\cdot P(D|F)+P(G)\cdot P(D|G)=0.25\times0.06+0.35\times0.05+0.4\times0.04=0.0485$；A 正确；

B.$P(E)=\frac{5}{20}=0.25$，$P(D|E)=0.06$，选自 A 地区且患流感的概率为 0.0150；B 错误；

C.由条件概率公式可得$P(E|D)=\frac{P(DE)}{P(D)}=\frac{P(E)\cdot P(D|E)}{P(D)}=\frac{0.25\times0.06}{0.0485}=\frac{30}{97}$，C 正确.

D.从这三个地区中任意选取一个人患流感的概率为 0.0485，任意选取 100 个人，患流感的人数设为 X，则$X\sim B(100,0.0485)$，即$E(X)=100\times0.0485=4.85$；D 错误.故选 AC.

12．**解析**：对于 A，由异面直线的定义知 A 正确；

对于 B，要求四面体$ABCD$体积的最大值，则$AC\perp$面ADB且$AB\perp BD$，

此时四面体$ABCD$体积的最大值$V=\frac{1}{3}S_{\triangle ADB}\cdot AC=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\times2=\frac{4}{3}$，故 B 不正确；

对于 C，在平面β内过 A 作 BD 的平行线 AE，且使得$AE=BD$，连接CE，ED，

四边形$AEDB$是一个矩形，$\angle CAE$是二面角$\alpha-l-\beta$的一个平面角，且$AB\perp$面 AEC，

所以$ED\perp$面 AEC，从而$CE=\sqrt{CD^2-ED^2}=\sqrt{CD^2-AB^2}=\sqrt{7^2-6^2}=\sqrt{13}$.

在$\triangle AEC$中，由余弦定理可知：$\cos\angle CAE=\frac{AC^2+AE^2-CE^2}{2AC\times AE}=\frac{3^2+4^2-13}{2\times3\times4}=\frac{1}{2}$，

所以$\angle CAE=\frac{\pi}{3}$.故 C 正确；对于 C 选项，还可以用向量的方法求解.

对于 D，在平面β内，过点 A 作 AE 平行且等于 BD，则四边形 $ABDE$ 为正方形，根据对称

性，过 A、B、C、D 的球即为四棱锥 $C\text{-}ABDE$ 的外接球.由题意知$\triangle AEC$为正三角形，设正方形 $ABDE$ 的中心为O_1，$\triangle AEC$的外心为O_2，球心为 O，则 $OO_1\perp$平面 $ABDE$，$OO_2\perp$平面 AEC，从而有 $R^2=3^2+(2\sqrt{3})^2$，解得 $R^2=21$，所以球的表面积为$S=4\pi R^2=84\pi$. 故 D 正确.

另解：因为二面角$\alpha-l-\beta$的大小为$\frac{\pi}{3}$，$AC=AB=BD=6$，$AC\perp l$，$BD\perp l$，所以平面ABC与平面 ABD 所成角的大小为$\frac{\pi}{3}$，$CA\perp AB, AB\perp BD$.

取AD的中点O_1，BC的中点O_2，O_1，O_2为$\triangle ABD$，$\triangle ABC$的外心，
取AB的中点M，连接MO_1，MO_2，则$O_2M\perp AB$，$O_1M\perp AB$,

所以$\angle O_2MO_1$是二面角$\alpha-l-\beta$的一个平面角，则$\angle O_2MO_1=\frac{\pi}{3}$,

过O_2作平面ABC的垂线和过O_1作平面 ABD 的垂线，交于点O，O即为外接球球心，
所以$OO_2\perp$面CAB，　$OO_1\perp$面DAB，　连接OM　，$O_1M=O_2M=3$　，

所以易证得：$\triangle O_1MO$与$\triangle O_2MO$全等，所以$\angle OMO_1=\angle OMO_2=\frac{\pi}{6}$,

所以在直角三角形O_1MO，$\tan 30^\circ=\frac{OO_1}{MO_1}=\frac{OO_1}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow OO_1=\sqrt{3}$,

$OD=R=\sqrt{{OO_1}^2+O_1D}=\sqrt{3+18}=\sqrt{21}$,

则过A、B、C、D四点的球的表面积为$S=4\pi R^2=84\pi$.故 D 正确.故选 ACD.

13．**解析**：对于$(1-x)^{10}$，其展开式的通式为$C_{10}^r(-x)^r=(-1)^rC_{10}^rx^r$，
则展开式中含x^4项的系数为$(-1)^4C_{10}^4+(-1)^3C_{10}^3+(-1)^2C_{10}^2=135$，答案为：135.

14．**解析**：甲、乙两班全部学生的平均体重为$\overline{x}=\frac{3}{5}\times 55+\frac{2}{5}\times 60=57$；

甲、乙两队全部学生的体重方差为$s^2=\frac{3}{5}[16+(57-55)^2]+\frac{2}{5}[21+(57-60)^2]=24$.

故答案为：24.

15．**解析**：点D的坐标为$(1,2)$，则$k_{OD}=2$，又$OD\perp AB$，且直线AB过点$D(1,2)$，

则直线AB的方程为$y-2=-\frac{1}{2}(x-1)$，整理得$2y+x-5=0$，

设点$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由$OA\perp OB$，得$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，即$x_1x_2+y_1y_2=0$，
$\because$直线AB的方程为$x=5-2y$，
$\therefore x_1x_2+y_1y_2=(5-2y_1)(5-2y_2)+y_1y_2=5y_1y_2-10(y_1+y_2)+25=0$，
$\therefore y_1y_2-2(y_1+y_2)+5=0$　　①，
联立$x=5-2y$与$y^2=2px(p>0)$，消去x得$y^2+4py-10p=0$，

则$\begin{cases}y_1+y_2=-4p\\ y_1y_2=-10p\end{cases}$　②，把②代入①，解得$p=\frac{5}{2}$,

故$|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{100+100}=10\sqrt{2}$，

又直线AB与x轴的交点为$(5,0)$，所以$S_{\triangle ABO}=\frac{1}{2}\times 5\times|y_1-y_2|=25\sqrt{2}$.答案为：$25\sqrt{2}$.

16．**解析**：由题可得$f(x)\ge mx+\ln x$对任意$x\in(0,+\infty)$恒成立，等价于$m\le\frac{xe^{2x}-\ln x-}{x}$对任意$x\in(0,+\infty)$恒成立，令$g(x)=\frac{xe^{2x}-\ln x-1}{x}$，则$g'(x)=\frac{2x^2e^{2x}+\ln x}{x^2}$,

令$h(x)=2x^2e^{2x}+\ln x$，则$h'(x)=4(x^2+x)e^{2x}+\frac{1}{x}>0$，$\therefore h(x)$在$(0,+\infty)$单调递增，

$\because h\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{\sqrt{e}}{8}-2\ln 2<0, h\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{e}{2}-\ln 2>0$，

$\therefore h(x)$存在唯一零点x_0，且$x_0\in\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$，使得$2x_0^2e^{2x_0}+\ln x_0=0$，

$\therefore g(x)$在$(0, x_0)$单调递减，在$(x_0,+\infty)$单调递增，$\therefore g(x)_{\min}=g(x_0)=\frac{x_0e^{2x_0}-\ln x_0-1}{x_0}$，

$\because 2x_0^2e^{2x_0}+\ln x_0=0$，即$2x_0e^{2x_0}=-\frac{\ln x_0}{x_0}=\frac{1}{x_0}\ln\frac{1}{x_0}=\ln\frac{1}{x_0}\cdot e^{\ln\frac{1}{x_0}}$，

令$\varphi(x)=xe^x$，显然$\varphi(x)$在$(0,+\infty)$单调递增，则$2x_0=\ln\frac{1}{x_0}$，即$\frac{1}{x_0}=e^{2x_0}$，

则$g(x_0)=\frac{x_0\cdot\frac{1}{x_0}+2x_0-1}{x_0}=\frac{2x_0}{x_0}=2$，$\therefore m\le 2$.

17.**解析**:（1）连接C_1E，在上底面过点E作直线$l\perp C_1E$即可，则$l\perp CE$.

理由： $\because CC_1\perp$平面$A_1B_1C_1D_1$，且$l\subset$平面$A_1B_1C_1D_1$， $\therefore CC_1\perp l$

又$\because l\perp C_1E$，$C_1E\cap CC_1=C_1$，$\therefore l\perp$平面CC_1E，

$\because CE\subset$平面CC_1E，$\therefore l\perp CE$. ……………………………………（5 分）

（2）以D为坐标原点，DA、DC、DD_1所在直线分别为x轴，y轴，z轴，建立如图所示空间直角坐标系，设正方体的棱长为 2，则$C(0,2,0)$，$E(\frac{2}{3},\frac{4}{3},2)$ $\therefore \overrightarrow{CE}=(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},2)$.

又$F(2,0,1)$，$B_1(2,2,2)$，$D_1(0,0,2)$，则$\overrightarrow{FB_1}=(0,2,1)$，$\overrightarrow{FD_1}=(-2,0,1)$.

设平面FB_1D_1的一个法向量为$\vec{m}=(x,y,z)$,则$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{FB_1}=0,\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{FD_1}=0,\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}2y+z=0,\\ -2x+z=0,\end{cases}$ $\therefore \vec{m}=(1,-1,2)$.

设CE与平面FB_1D_1所成角为θ，则$\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{CE},\vec{m}\rangle|=\left|\frac{\overrightarrow{CE}\cdot\vec{m}}{|\overrightarrow{CE}||\vec{m}|}\right|=\frac{8}{\sqrt{66}}$，

$\therefore CE$与平面FB_1D_1所成角的正切值为$4\sqrt{2}$. ……………………………………（10 分）

18. **解析**：（1）若选①：整理得$1-\tan A\tan C=-\sqrt{3}(\tan A+\tan C)$，因为$A+B+C=\pi$，

所以$\tan B=-\tan(A+C)=-\frac{\tan A+\tan C}{1-\tan A\tan C}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，因为$B\in(0,\pi)$，所以$B=\frac{\pi}{6}$;

若选②：因为$(2c-\sqrt{3}a)\cos B=\sqrt{3}b\cos A$，由正弦定理得$(2\sin C-\sqrt{3}\sin A)\cos B=\sqrt{3}\sin B\cos A$

则$2\sin C\cos B=\sqrt{3}\sin(A+B)=\sqrt{3}\sin C$，$\sin C>0$, 则 $\cos B=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 因为$B\in(0,\pi)$, 所以$B=\frac{\pi}{6}$;

若选③：由正弦定理得$a^2+c^2-b^2=\sqrt{3}ac$，所以$\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

即 $\cos B=\frac{\sqrt{3}}{2}$，因为$B\in(0,\pi)$，所以$B=\frac{\pi}{6}$. ……………………………………（6 分）

（2）将$c=b+1$代入正弦定理$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，得$\frac{b}{\sin B}=\frac{b+1}{\sin C}$，所以 $\sin C=\frac{b+1}{2b}$.

因为$B=\frac{\pi}{6}$，角A的解只有一个，所以角C的解也只有一个，所以$0<\sin C<\frac{1}{2}$或$\sin C=1$，

即$0<\frac{b+1}{2b}<\frac{1}{2}$或$\frac{b+1}{2b}=1$，又$b>0$，所以$b=1$. ……………………………………（12 分）

19. **解析**：（1）由题意，数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}+a_n=3\cdot 2^n$，即$a_{n+1}=-a_n+3\cdot 2^n$，

则$\frac{a_{n+1}-2^{n+1}}{a_n-2^n}=\frac{-a_n+3\cdot 2^n-2^{n+1}}{a_n-2^n}=\frac{2^n-a_n}{a_n-2^n}=-1$，又由$a_1=1$，可得$a_1-2^1=-1$，

所以数列$\{a_n-2^n\}$表示首项为-1，公比为-1的等比数. ……………………（4 分）

（2）由（1）知$a_n-2^n=-1\times(-1)^{n-1}=(-1)^n$，所以$a_n=(-1)^n+2^n$.

所以$S_n=2^1+2^2+\cdots+2^n+(-1)+1+\cdots+(-1)^n$，

当n为偶数时，可得$S_n=\frac{2(1-2^n)}{1-2}+0=2^{n+1}-2$；

当n为奇数时，可得$S_n=\frac{2(1-2^n)}{1-2}-1=2^{n+1}-3$.

综上可得，$S_n=\begin{cases}2^{n+1}-2, n\text{为偶数},\\ 2^{n+1}-3, n\text{为奇数}.\end{cases}$ ……………………………………（12 分）

20. **解析**：（1）根据散点图判断，其变化趋势不是线性的，而是曲线的，因此，选②$y=d\cdot c^x+25$更适宜此散点的回归方程. ……………………………………（2 分）

（2）由$y=d\cdot c^x+25$有：$y-25=d\cdot c^x$，两边取自然对数得：

$\ln(y-25)=\ln(d\cdot c^x)=\ln d+x\cdot \ln c$，设$\omega=\ln(y-25)$，$a=\ln d$， $b=\ln c$，

则$\ln(y-25)=\ln d+x\cdot\ln c$化为：$\omega=bx+a$，又$\bar{x}=3$，$\sum_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})^2=28$，

$\therefore b=\frac{\sum_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})(\omega_i-\bar{\omega})}{\sum_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{-2.24}{28}=-0.08$，$\therefore a=\bar{\omega}-b\bar{x}=3.85+0.08\times 3=4.09$，

由$b=-0.08=\ln c$，得$c=e^{-0.08}\approx 0.92$，由$a=4.09=\ln d$，得$d=e^{4.09}\approx 60$.

$\therefore$回归方程为：$y=d\cdot c^x+25=e^{4.09}\cdot e^{-0.08}+25=e^{4.09-0.08}+25=60\times 0.92^x+25$，

即$y=60\times 0.92^x+25$. ……………………………………（8 分）

（3）当$y=60$时，代入回归方程$y=60\times 0.92^x+25$中，得$0.92^x=\frac{7}{12}$，

所以$x=\log_{0.92}\frac{7}{12}=\frac{\ln 7-\ln 12}{\ln\ .92}=\frac{\ln 7-\ln 3-2\ln 2}{-0.08}\approx 7.5$.

$\therefore$大约需要放置 7.5 分钟才能达到最佳饮用口感. ……………………………………（12 分）

21. **解析**：（1）由题意，$\begin{cases}\frac{2b^2}{a}=3,\\ \frac{c}{a}=\frac{1}{2},\\ a^2-b^2=c^2,\end{cases}$ 解得$a^2=4$，$b^2=3$，

所以椭圆的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ……………………………………（4 分）

（2）由（1）得$F_1(-1,0)$，若直线l_1的斜率为 0，则l_2为$x=-1$与直线$x=1$无交点，不满足条件.

设直线l_1：$x=my-1$，若$m=0$，则$\lambda=1$，则不满足$\overrightarrow{QA}=\lambda\overrightarrow{QB}$，所以$m\neq 0$.

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$Q(x_0,y_0)$，

由$\begin{cases}3x^2+4y^2=12,\\ x=my-1,\end{cases}$ 得$(3m^2+4)y^2-6my-9=0$，所以$y_1+y_2=\frac{6m}{3m^2+4}$，$y_1y_2=-\frac{9}{3m^2+4}$.

因为$\begin{cases}\overrightarrow{AF_1}=\lambda\overrightarrow{F_1B},\\ \overrightarrow{QA}=\lambda\overrightarrow{QB},\end{cases}$ 即$\begin{cases}(-1-x_1,-y_1)=\lambda(x_2+1,y_2),\\ (x_1-x_0,y_1-y_0)=\lambda(x_2-x_0,y_2-y_0),\end{cases}$

所以$-y_1=\lambda y_2$，$y_1-y_0=\lambda(y_2-y_0)$，

所以$\lambda=-\frac{y_1}{y_2}=\frac{y_1-y_0}{y_2-y_0}$，解得$y_0=\frac{2y_1y_2}{y_1+y_2}=-\frac{3}{m}$，则$x_0=-4$，即$Q\left(-4,-\frac{3}{m}\right)$，

直线l_2：$x=-\frac{1}{m}y-1$，联立$\begin{cases}x=-\frac{1}{m}y-1,\\ x=1,\end{cases}$ 解得$P(1,-2m)$.

$\therefore|PQ|=\sqrt{5^2+\left(-\frac{3}{m}+2m\right)^2}\geq 5$，当且仅当$m=\frac{\sqrt{6}}{2}$或$m=-\frac{\sqrt{6}}{2}$时等号成立，

$\therefore|PQ|$的最小值为 5. ……………………………………（12 分）

22.**解析**:（1）由$f(x)=a\sin x-x+\frac{1}{x+1}(x>-1)$，则$f'(x)=a\cos x-1-\frac{1}{(x+1)^2}$，

因为 0 为$f(x)$的一个极值点，所以$f'(0)=a-2=0$，所以$a=2$.

当$a=2$时，$f'(x)=2\cos x-1-\frac{1}{(x+1)^2}$.

当$-1<x<0$时，因为函数$f'(x)$在$(-1,\ 0)$上单调递增，

所以$f'(x)<2-1-1=0$，即$f(x)$在$(-1,\ 0)$上单调递减；

当$0<x<\frac{\pi}{2}$时，$g(x)=2\cos x-1-\frac{1}{(x+1)^2}$，则$g'(x)=-2\sin x+\frac{2}{(x+1)^3}$.

因为函数$g'(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递减，且$g'(0)=2>0$，$g'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-2+\frac{2}{\left(\frac{\pi}{2}+1\right)^3}<0$，

由零点存在定理，存在$x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，使得$g'(x)=0$，

且当$x\in(0,x_0)$时，$g'(x)>0$，即$f'(x)$单调递增，

又因为$f'(0)=0$，所以$\forall x\in(0,x_0)$，$f'(x)>0$，$f(x)$在$(0,x_0)$上单调递增；.

综上所述，$f(x)$在$(-1,0)$上单调递减，在$(0,x_0)$上单调递增，

所以 0 为$f(x)$的一个极值点，故$a=2$. ……………………………………（4 分）

（2）①当$-1<x\leq 0$时，$f'(x)\leq 2-1-1=0$，所以$f(x)$单调递减，

所以对$\forall x\in -1,\ 0)$，有$f(x)\geq f(0)=1$，此时函数$f(x)$无零点；

当$0<x<\frac{\pi}{2}$时，设$g(x)=2\cos x-1-\frac{1}{(x+1)^2}$，则$g'(x)=-2\sin x+\frac{2}{(x+1)^3}$.

因为函数$g'(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递减，且$g'(0)=2>0$，$g'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-2+\frac{2}{\left(\frac{\pi}{2}+1\right)^3}<0$，

由零点存在定理，存在$x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，使得$g'(x)=0$，

且当$x\in(0,x_0)$时，$g'(x)>0$，即$f'(x)$单调递增，

当$x\in\left(x_0,\frac{\pi}{2}\right)$时，$g'(x)<0$，即$f'(x)$单调递减.

又因为$f'(0)=0$，所以$\forall x\in(0,x_0)$，$f'(x)>0$，$f(x)$在$(0,x_0)$上单调递增；

因为$f'(x_0)>0$，$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1-\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}+1\right)^2}<0$，所以存在$x_1\in\left(x_0,\frac{\pi}{2}\right)$，

当$x\in(x_0,x_1)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，当$x\in\left(x_1,\frac{\pi}{2}\right)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减.

所以，当$x\in(0,x_1)$时，$f(x)$单调递增，$f(x)>f(0)=1$；

当$x\in\left(x_1,\frac{\pi}{2}\right)$时，$f(x)$单调递减，$f(x)>f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\frac{\pi}{2}+1}>0$，

此时$f(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上无零点；

当$x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$时，$f'(x)=2\cos x-1-\frac{1}{(x+1)^2}<0$，所以$f(x)$在$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$单减，

又$f\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$，$f(\pi)=0-\pi+\frac{1}{\pi+1}<0$，

由零点存在定理，函数$f(x)$在$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$上存在唯一零点；

当$x\geq\pi$时，$f(x)=2\sin x-x+\frac{1}{x+1}<2-\pi+1<0$，此时函数无零点；

综上所述，$f(x)$在区间$(-1,+\infty)$上存在唯一零点. ……………………………………（8 分）

②因为$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}-1-\frac{1}{\left(\frac{\pi}{4}+1\right)^2}>0$，由（1）中$f(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上的单调性分析，知$x_1>\frac{\pi}{4}$，

所以$f(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$单增，所以对$\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，有$f(x)>f(0)=1$，

即$2\sin x-x+\frac{1}{x+1}>1$，所以 $\sin x>\frac{1}{2}\left(x+1-\frac{1}{x+1}\right)$.

令$x=\frac{1}{k^2}(k\geq 2)$，则 $\sin\frac{1}{k^2}>\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2+1}\right)>\frac{1}{k^2+1}>\frac{1}{k^2+k}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$，

所以$\sum_{k=2}^{n}\sin\frac{1}{k^2}>\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}$.

设$h(x)=\sin x-x$，$x\in\left(0,\frac{1}{4}\right]$，则$h'(x)=\cos x-1<0$，

所以函数$h(x)=\sin x-x$在$x\in\left(0,\frac{1}{4}\right]$上单调递减，

则$h(x)=\sin x-x<h(0)=0$，即$\sin x<x$，$x\in\left(0,\frac{1}{4}\right]$，

所以 $\sin\frac{1}{k^2}<\frac{1}{k^2}<\frac{1}{(k-1)k}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$，

所以$\sum_{k=2}^{n}\sin\frac{1}{k^2}<\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{n}<1$，

所以$\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}<\sum_{k=2}^{n}\sin\frac{1}{k^2}<1$.　　……………………………………（12 分）