

1. 本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,共 150 分。考试时间 120 分钟
2. 请将各题答案填写在答题卡上。
3. 本试卷主要考试内容:集合与常用逻辑用语,函数,导数。

## 第 I 卷

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 命题“ $\forall x > 0, \ln(2x+1) > 0$ ”的否定是

- A.  $\forall x \leq 0, \ln(2x+1) \leq 0$                       B.  $\forall x > 0, \ln(2x+1) \leq 0$   
 C.  $\exists x \leq 0, \ln(2x+1) \leq 0$                       D.  $\exists x > 0, \ln(2x+1) \leq 0$

2. 已知集合  $U = \{-3, -1, 0, 1, 3\}$ ,  $A = \{x | x^2 - 2x - 3 = 0\}$ , 则  $\complement_U A =$

- A.  $\{-1, 0, 3\}$                       B.  $\{-3, 0, 1\}$                       C.  $\{-3, 1\}$                       D.  $\{-1, 3\}$

3. 若函数  $f(x) = x^3 - ax^2 + 4x - 8$  在  $x = 2$  处取得极小值, 则  $a =$

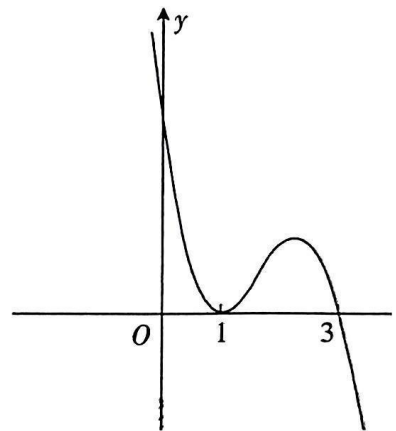
- A. 4                      B. 2                      C. -2                      D. -4

4. 已知函数  $f(x-2) = 2^x - x + 3$ , 则  $f(0) =$

- A. 2                      B. 4                      C. 5                      D. 7

5. 已知函数  $f(x)$ , 其导函数  $f'(x)$  的图象如图所示, 则

- A.  $f(x)$  有 2 个极值点  
 B.  $f(x)$  在  $x = 1$  处取得极小值  
 C.  $f(x)$  有极大值, 没有极小值  
 D.  $f(x)$  在  $(-\infty, 1)$  上单调递减



6. 已知甲的年龄大于乙的年龄, 则“丙的年龄大于乙的年龄”是“乙和丙的年龄之和大于甲的年龄的两倍”的

- A. 充要条件                      B. 必要不充分条件  
 C. 充分不必要条件                      D. 既不充分也不必要条件

7. 车厘子是一种富含维生素和微量元素的水果, 其味道甘美, 受到众人的喜爱. 根据车厘子直径大小, 可将其从小到大依次分为 6 个等级, 其等级  $x (x = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$  与其对应等级市场销售单价  $y$  (单位: 元/千克) 近似满足函数关系式  $y = e^{ax+b}$ . 若花同样的钱买到的 1 级与 5 级果多 3 倍, 且 3 级果的市场销售单价为 60 元/千克, 则 6 级果的市场销售单价最接近考数据:  $\sqrt{2} \approx 1.41, \sqrt{3} \approx 1.73, \sqrt[3]{2} \approx 1.26, \sqrt[3]{3} \approx 1.44$ )

- A. 130 元/千克                      B. 160 元/千克                      C. 170 元/千克                      D. 180 元/千克

8. 已知函数  $f(x) = x^5 + \tan x - 3$ , 且  $f(-m) = -2$ , 则  $f(m) =$

- A. -4                      B. -1                      C. 1                      D. 4

9. 已知命题  $p: \exists x \in (0, 2), x^3 - x^2 - x + 2 < 0$ ; 命题  $q: \text{若 } x + y > 4, \text{则 } x > 2, y > 2$ . 下列命题是真命题的是

- A.  $p \wedge (\neg q)$       B.  $(\neg p) \wedge (\neg q)$       C.  $p \wedge q$       D.  $(\neg p) \wedge q$

10. 若  $a = \log_3 \frac{1}{2}, b = \log_4 10, c = \log_2 \frac{1}{3}$ , 则

- A.  $b < a < c$       B.  $b < c < a$       C.  $a < b < c$       D.  $a < c < b$

11. 已知函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ ,  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ , 且  $f(1) = 1$ , 则  $f(2023) =$

- A. 0      B. 2022      C. 2023      D. 2024

12. 已知实数  $x, y$  满足  $y \ln y = e^{2x} - y \ln(2x)$ , 则  $y$  的最小值为

- A.  $\frac{1}{e}$       B.  $e$       C.  $\frac{1}{e^2}$       D.  $e^2$

## 第 II 卷

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 函数  $f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x-3}} + \ln(5-x)$  的定义域是           ▲          .

14. 某校有 62 名同学参加数学、物理、化学竞赛, 若同时参加数学、物理竞赛的同学有 21 名, 同时参加数学、化学竞赛的同学有 16 名, 同时参加物理、化学竞赛的同学有 18 名, 且没有同学同时参加数学、物理、化学竞赛, 则该校只参加一项竞赛的同学有           ▲           名.

15. 若命题“ $\exists x \in [1, 2], x^2 + a \leq ax - 3$ ”是真命题, 则  $a$  的取值范围是           ▲          .

16. 已知函数  $f(x)$  的定义域是  $(-5, 5)$ , 其导函数为  $f'(x)$ , 且  $f(x) + xf'(x) > 2$ , 则不等式  $(2x-3)f(2x-3) - (x-1)f(x-1) > 2x-4$  的解集是           ▲          .

三、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

已知集合  $A = \{x | x^2 - 5x - 6 < 0\}, B = \{x | 2a - 1 \leq x < a + 5\}$ .

(1) 当  $a = 0$  时, 求  $A \cap B$ ;

(2) 若  $A \cup B = A$ , 求  $a$  的取值范围.

18. (12分)

已知函数  $f(x) = \frac{1}{2^x + 1} - a$  是奇函数.

(1) 求  $a$  的值;

(2) 求  $f(x)$  在  $[-1, 3]$  上的值域.

19. (12分)

已知函数  $f(x) = 3\ln x + \frac{1}{2}x^2 - 4x + 1$ .

(1) 求  $f(x)$  的图象在  $x=2$  处的切线方程;

(2) 讨论函数  $g(x) = f(x) - m$  的零点个数.

20. (12分)

某企业计划对甲、乙两个项目共投资 200 万元,且每个项目至少投资 10 万元. 依据前期市场调研可知,甲项目的收益  $p(t)$  (单位:万元)与投资金额  $t$  (单位:万元)满足关系式  $p(t) = at^3 + 21t$ ;乙项目的收益  $g(t)$  (单位:万元)与投资金额  $t$  (单位:万元)满足关系式  $g(t) = -2a(t-b)^2$  ( $b < 200$ ). 设对甲项目投资  $x$  万元,两个项目的总收益为  $f(x)$  (单位:万元),且当对甲项目投资 30 万元时,甲项目的收益为 180 万元,乙项目的收益为 120 万元.

(1) 求  $f(x)$  的解析式.

(2) 试问如何安排甲、乙这两个项目的投资金额,才能使总收益  $f(x)$  最大? 并求出  $f(x)$  的最大值.

21. (12分)

已知函数  $f(x) = \sqrt{4-x} + \sqrt{x-1}$ .

(1) 求  $f(x)$  的定义域;

(2) 证明:  $f(x)$  在区间  $[a, a+1)$  上存在最大值的充要条件是  $\frac{3}{2} < a \leq 3$ .

22. (12分)

已知函数  $f(x) = \ln x - 3x$

(1) 求  $f(x)$  的单调区间;

(2) 若  $\forall x \in (0, +\infty), f(x) \leq x(ae^x - 4) + b$ , 证明:  $a + b \geq 0$