2020级高三模拟考试

数学答案

2023.02

一、单项选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1-4 DCDC　5-8BBBA

二、多项选择题：本大题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求的，全部选对得5分，选对但不全的得2分，有选错的得0分。

9.ABD　10. AC　11. ABC　12.AD

三、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 10　14. $\sqrt{3}$　15. $\frac{1}{3}$或$\sqrt{10}$　16. $\sqrt{2}-1$.

四、解答题：共70分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17.【解析】（1）解：因为$\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{3}+\frac{a_3}{4}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}=n^2+n$，①

则当$n=1$时，$\frac{a_1}{2}=2$，即$a_1=4$，　………………1分

当$n\geq 2$时，$\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{3}+\frac{a_3}{4}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{n}=n^2-n$，②

① －② 得$\frac{a_n}{n+1}=2n$，　所以$a_n=2n(n+1)$，………………4分

$a_1=4$也满足$a_n=2n(n+1)$，故对任意的$n\in \mathrm{N}^*$，$a_n=2n(n+1)$. ………………5分

（2）证明：$\frac{n}{(n+2)a_n}=\frac{n}{2n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})$，　………7分

$$\frac{1}{3a_1}+\frac{2}{4a_2}+\cdots+\frac{n}{(n+2)a_n}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right]<\frac{1}{4}$$　………………10分

18．(1)解：因为$a\sin\frac{A+C}{2}=b\sin A$，

所以由正弦定理边角互化得$\sin A\sin\frac{A+C}{2}=\sin B\sin A$，　………2分

因为$A\in(0,\pi),\sin A\neq 0,A+C=\pi-B$，

所以$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2}\right)=\sin B$，即$\cos\frac{B}{2}=\sin B$，所以$\cos\frac{B}{2}=2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$，　………4分

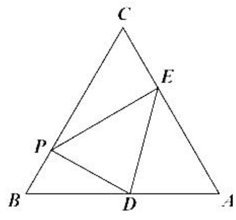
因为$B\in(0,\pi)$，所以$\frac{B}{2}\in(0,\frac{\pi}{2}),\cos\frac{B}{2}\neq 0$，

所以$\sin\frac{B}{2}=\frac{1}{2}$，所以$\frac{B}{2}=\frac{\pi}{6}$，即$B=\frac{\pi}{3}$　………6分

(2)解：因为$AC=BC$，$B=\frac{\pi}{3}$，

所以$\triangle ABC$为等边三角形，即$AC=BC=AB=1$，

如图，设$AD=m$，则$BD=1-m,PD=m$，



所以在△BPD 中，由余弦定理得 $\cos B=\frac{BP^2+BD^2-PD^2}{2BP\cdot BD}=\frac{BP^2+(1-m)^2-m^2}{2BP\cdot(1-m)}=\frac{1}{2}$，

整理得 $BP^2+(1-m)^2-m^2=BP\cdot(1-m)$，设 $BP=x,0\le x\le 1$，

所以 $m=\frac{x^2-x+1}{2-x}=\frac{(2-x)^2-3(2-x)+3}{2-x}=2-x+\frac{3}{2-x}-3$，　　　……….10 分

由于 $0\le x\le 1$，故 $1\le 2-x\le 2$

所以 $m=2-x+\frac{3}{2-x}-3\ge 2\sqrt{3}-3$，当且仅当 $2-x=\frac{3}{2-x}=\sqrt{3}$ 时等号成立，

此时 $x=2-\sqrt{3}$；

所以 AD 的最小值为 $2\sqrt{3}-3$.　　　……….12 分

19．解：由题可知：

$PO\perp$ 面ABC，分别取 AC，BC 的中点 M，N，连接 PM，OM，PN，ON，

则在圆 O 中，$OM\perp AC$；

因为 $PA=PC$，M 是 AC 中点，所以 $AC\perp PM$；

所以 $\angle PMO=\alpha$. 同理 $\angle PNO=\beta$.　　　……….3 分

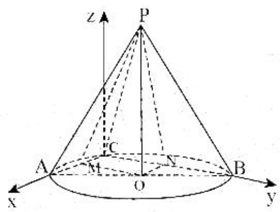
于是 $\frac{1}{\tan^2\alpha}+\frac{1}{\tan^2\beta}=(\frac{OM}{OP})^2+(\frac{ON}{OP})^2=(\frac{OC}{OP})^2=\frac{OC^2}{AP^2-OA^2}=\frac{1}{2}$ ……….6 分

（2）因为 $\tan\beta=\sqrt{3}\tan\alpha$，即 $\frac{OP}{ON}=\sqrt{3}\frac{OP}{OM}$，$OM=\sqrt{3}ON$

所以 $BC=\sqrt{3}AC$，又 $BC^2+AC^2=AB^2=16$，

解得 $AC=2$，$BC=2\sqrt{3}$　　　……….8 分

在圆 O 中，$CA\perp CB$，以点 C 为坐标原点，CA 所在直线为 x 轴，CB 所在直线为 y 轴，过 C 且垂直于平面 ABC 的直线为 z 轴建立空间直角坐标系 $C-xyz$，



则 $C(0,0,0)$，$A(2,0,0)$，$B(0,2\sqrt{3},0)$，又因为 $PO\perp$ 面ABC，

所以 $OP//z$ 轴，从而 $P(1,\sqrt{3},2\sqrt{2})$.

则 $\overrightarrow{CA}=(2,0,0)$，$\overrightarrow{CB}=(0,2\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{CP}=(1,\sqrt{3},2\sqrt{2})$，

设平面 PAC 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CA}=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CP}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}2x=0\\ x+\sqrt{3}y+2\sqrt{2}z=0\end{cases}$

不妨取 $y=2\sqrt{2}$，则 $x=0$，$z=-\sqrt{3}$，此时 $\boldsymbol{m}=(0,2\sqrt{2},-\sqrt{3})$

同理，平面 PBC 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(-2\sqrt{2},0,1)$　　　……….10 分

所以 $\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{11}\times 3}=-\frac{\sqrt{33}}{33}$

又二面角 $A-PC-B$ 为钝二面角，

所以二面角 $A-PC-B$ 的余弦值为 $-\frac{\sqrt{33}}{33}$.　　　……….12 分

20．解析：（1）由已知抛物线 E 的焦点 $F(\frac{a}{2},0)$，

设与圆 G 相切的直线 l 方程为：$y-0=\frac{2\sqrt{5}}{5}(x-\frac{a}{2})$，即 $2x-\sqrt{5}y-a=0$ …2 分

所以由点到直线的距离 $\frac{|2\cdot 2-0-a|}{\sqrt{4+5}}=1$，得 $a=1$ 或 $a=7$

因为 $0<a<2$,所以 $a=1$,则抛物线 E 的方程 $y^2=2x$．　　　…………5 分

（2）设 $E(x_0,\frac{x_0^{\ 2}}{4})$，则 $Q(x_0,\ t)$，

当 $x_0\neq 0$ 时，$k_{OQ}=\frac{t}{x_0}$，

由 $y=\frac{1}{4}x^2$ 可得 $y'=\frac{1}{2}x$，所以切线 l 的斜率为 $k_l=\frac{1}{2}x_0$，　　　…………6 分

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，线段 AB 的中点 $M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$，

由 $\begin{cases}\frac{x_1^{\ 2}}{4}+\frac{y_1^{\ 2}}{2}=1\\ \frac{x_2^{\ 2}}{4}+\frac{y_2^{\ 2}}{2}=1\end{cases}$，可得 $\frac{x_1^{\ 2}-x_2^{\ 2}}{4}+\frac{y_1^{\ 2}-y_2^{\ 2}}{2}=0$，

所以 $\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{4}+\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{2}=0$，　　　…………9 分

整理可得：$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=-\frac{1}{2}$，即 $k_l\cdot k_{OM}=-\frac{1}{2}$，所以 $\frac{1}{2}x_0\cdot k_{OM}=-\frac{1}{2}$，

可得 $k_{OM}=-\frac{1}{x_0}$，又因为 $k_{OQ}=k_{OM}=\frac{t}{x_0}$，

所以当 $t=-1$ 时，$k_{OQ}=k_{OM}=-\frac{1}{x_0}$，此时 O,M,Q 三点共线，满足 $|AM|=|BM|$．

当 x_0=0 时，结论亦成立，

综上，存在 $t=-1$，使得 $|AM|=|BM|$ 成立，．　　　…………12 分

21．【解析】依题意可得，门将每次可以扑到点球的概率为 $p=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$，…1 分

门将在前三次扑到点球的个数 X 的可能取值为 $0,1,2,3$，易知 $X\sim B(3,\frac{1}{9})$，

所以 $P(X=k)=C_3^k\cdot(\frac{1}{9})^k\cdot(\frac{8}{9})^{3-k},k=0,1,2,3$，　……………3 分

故 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{512}{729}$	$\frac{64}{243}$	$\frac{8}{243}$	$\frac{1}{729}$

所以 X 的期望为 $E(X)=3\times\frac{1}{9}=\frac{1}{3}$ ……………5 分

（2）① 第 n 次传球之前球在甲脚下的概率为 p_n，

则当 $n\geq 2$ 时，第 $n-1$ 次传球之前球在甲脚下的概率为 p_{n-1}，

第 $n-1$ 次传球之前球不在甲脚下的概率为 $1-p_{n-1}$，

则 $p_n=p_{n-1}\times 0+(1-p_{n-1})\times\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}p_{n-1}+\frac{1}{2}$ ……………7 分

即 $p_n-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}(p_{n-1}-\frac{1}{3})$，又 $p_1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$；

所以 $\{p_n-\frac{1}{3}\}$ 是以 $p_1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ 为首项，公比为 $-\frac{1}{2}$ 的等比数列；…………9 分

②由①可知，$p_n=\frac{2}{3}(-\frac{1}{2})^{n-1}+\frac{1}{3}$，所以 $p_{10}=\frac{2}{3}(-\frac{1}{2})^9+\frac{1}{3}<\frac{1}{3}$，

所以 $q_{10}=\frac{1}{2}(1-p_{10})=\frac{1}{2}[\frac{2}{3}-\frac{2}{3}(-\frac{1}{2})^9]>\frac{1}{3}$；

故 $p_{10}<q_{10}$ ……………12 分

22.【解析】（1）因为 $y=x$ 是 $g(x)$ 的切线，又 $g'(x)=\frac{1}{x}$,

设切点为 (x_0, x_0)，则 $g'(x_0)=\frac{1}{x_0}=1$，所以 $x_0=1$，又 $g(x_0)=\ln x_0+a=1$

$\therefore a=1$， ……………1 分

得 $F(x)=\begin{cases}e^{x-1}, x\leq 1\\ \ln x+1, x>1\end{cases}$，

当 $x_1<x_2\leq 1$ 时，由 $F(x)\leq F(1)=1$，则 $F(x_1)+F(x_2)<2$，不合题意，舍去；

当 $1\leq x_1<x_2$ 时，$F(x)\geq F(1)=\ln 1+1=1$，则 $F(x_1)+F(x_2)>2$，

不合题意，舍去； …3 分

故只存在 $x_1<1<x_2$ 时，才能使 $F(x_1)+F(x_2)=2$，即 $e^{x_1-1}+\ln x_2+1=2$，

所以 $x_1+F(x_2)=x_1+\ln x_2+1==x_1-e^{x_1-1}+2(x_1<1)$，

令 $\varphi(x)=x-e^{x-1}+2(x<1)$，则 $\varphi'(x)=1-e^{x-1}>0$，

故 $\varphi(x)=x-e^{x-1}+2$ 在 $(-\infty,1)$ 上递增，$\therefore\varphi(x)_{\min}<\varphi(1)=2$

故 $x_1+F(x_2)$ 的取值范围为 $(-\infty,2)$． ……………5 分

（2）$G(x)=f(x)-g(x)=e^{x-a}-\ln x-a, G'(x)=e^{x-a}-\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增，

①当 $a\leq 0$ 时，$G'(1)=e^{1-a}-1>0$，$G'(e^{a-1})=e^{e^{a-1}-a}-e^{1-a}$

令$t(a)=e^{a-1}-a-(1-a)=e^{a-1}-1$,则$t'(a)=e^{a-1}>0$，所以$t(a)$为增函数

$\therefore t(a)<t(0)=e^{-1}-1<0$，$\therefore e^{a-1}-a<1-a$，$G'(e^{a-1})=e^{e^{a-1}-a}-e^{1-a}<0$

因而存在$e^{a-1}<x_0<1$，使得$G'(x_0)=0$，当$x\in(0,x_0)$时，$G'(x)<0$，$G(x)$为减函数；

当$x\in(x_0,+\infty)$时，$G'(x)>0$，$G(x)$为增函数；所以x_0为极小值点.$G(x_0)=e^{x_0-a}-\ln x_0-a$，

由$e^{x_0-a}>0,-\ln x_0>0,-a>0\Rightarrow G(x_0)>0$，此时$|G(x)|=b$不可能有三个根.

②当$0<a<1$时，$G'(1)=e^{1-a}-1>0,G'(a)=1-\dfrac{1}{a}<0$

因而存在$a<x_0<1$，使得$G'(x_0)=0$，当$x\in(0,x_0)$时，$G'(x)<0$，$G(x)$为减函数；

当$x\in(x_0,+\infty)$时，$G'(x)>0$，$G(x)$为增函数；所以x_0为极小值点.

$G(x_0)=e^{x_0-a}-\ln x_0-a$，

由$e^{x_0-a}>1>a,-\ln x_0>0\Rightarrow G(x_0)>0$，此时$|G(x)|=b$不可能有三个根.

③当$a=1$时，$G(x)=e^{x-1}-\ln x-1,G'(x)=e^{x-1}-\dfrac{1}{x}$在定义域上递增，$G'(1)=0$

当$x\in(0,1)$时，$G'(x)<0$，$G(x)$为减函数；当$x\in(1,+\infty)$时，$G'(x)>0$，$G(x)$为增函数；

所以$x_0=1$为极小值点.所以$G(1)=0$为最小值，此时$|G(x)|=b$不可能有三个根. …………8 分

④当$a>1$时，$G'(1)=e^{1-a}-1<0,G'(a)=1-\dfrac{1}{a}>0$，存在$1<x_0<a$，使得$G'(x_0)=0$

当$x\in(0,x_0)$时，$G'(x)<0$，$G(x)$为减函数；$x\in(x_0,+\infty)$时，$G'(x)>0$，$G(x)$为增函数；

所以x_0为极小值点，$G(x)_{\min}=G(x_0)=e^{x_0-a}-\ln x_0-a$

而$e^{x_0-a}<1,-\ln x_0<0,a>1$，所以$G(x)_{\min}=e^{x_0-a}-\ln x_0-a<0$

由$G'(x_0)=0\Rightarrow e^{x_0-a}=\dfrac{1}{x_0}\Rightarrow \ln x_0=a-x_0$

由$|G(x)|=b$有三个根，得$b=\ln x_0+a-e^{x_0-a}=\ln x_0+a-\dfrac{1}{x_0}=2a-\dfrac{1}{x_0}-x_0$ …………10 分

由$1<x_0<a\Rightarrow 2<x_0+\dfrac{1}{x_0}<a+\dfrac{1}{a}$，

所以$a-\dfrac{1}{a}<2a-\dfrac{1}{x_0}-x_0<2a-2\Rightarrow a-\dfrac{1}{a}<b<2a-2$ …………12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。