绝密★启用并使用完毕前

山东省实验中学2024届高三第一次诊断考试

数学试题　2023.10

注意事项：

1．答卷前，先将自己的考生号等信息填写在试卷和答题纸上，并在答题纸规定位置贴条形码．

2．本试卷满分150分，分为第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分，第Ⅰ卷为第1页至第2页，第Ⅱ卷为第3页至第4页．

3．选择题的作答：每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号．

4．非选择题的作答：用0.5mm黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内．写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效．

第Ⅰ卷

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知集合 $A=\{x|2^x<4\}$，$B=\{x|\sqrt{x-1}\le 1\}$，则 $A\cap B=$（　）

A. $(0,2)$　　B. $[1,2)$　　C. $[1,2]$　　D. $(0,1)$

【答案】B

【解析】

【分析】化简集合A和B，即可得出 $A\cap B$ 的取值范围.

【详解】解：由题意

在 $A=\{x|2^x<4\}$，$B=\{x|\sqrt{x-1}\le 1\}$ 中，

$A=\{x|x<2\}$，$B=\{x|1\le x\le 2\}$

$\therefore A\cap B=\{x|1\le x<2\}$

故选：B.

2. 已知复数 z 满足 $iz=2-i$，其中i为虚数单位，则 $\bar{z}$ 为（　）

A. $-1-2i$　　B. $1+2i$　　C. $-1+2i$　　D. $1-2i$

【答案】C

【解析】

【分析】计算 $z=-1-2\mathrm{i}$，再计算共轭复数得到答案.

【详解】$z=\dfrac{2-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=\dfrac{(2-\mathrm{i})\times(-\mathrm{i})}{\mathrm{i}\times(-\mathrm{i})}=-1-2\mathrm{i}$，则 $\overline{z}=-1+2\mathrm{i}$.

故选：C

3. "$b\in(0,4)$"是"$\forall x\in\mathrm{R}$，$bx^2-bx+1>0$ 成立"的（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件　　C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】

【分析】由 $\forall x\in\mathrm{R}$，$bx^2-bx+1>0$ 成立求出 b 的范围，再利用充分条件、必要条件的定义判断作答.

【详解】由 $\forall x\in\mathrm{R}$，$bx^2-bx+1>0$ 成立，则当 $b=0$ 时，$1>0$ 恒成立，即 $b=0$，

当 $b\neq 0$ 时，$\begin{cases} b>0 \\ b^2-4b<0 \end{cases}$，解得 $0<b<4$，

因此 $\forall x\in\mathrm{R}$，$bx^2-bx+1>0$ 成立时，$0\le b<4$，

因为 $(0,4)$　$[0,4)$，所以"$b\in(0,4)$"是"$\forall x\in\mathrm{R}$，$bx^2-bx+1>0$ 成立"的充分不必要条件.

故选：A

4. 设随机变量 X，Y 满足：$Y=3X-1$，$X\sim B\left(2,\dfrac{1}{3}\right)$，则 $D(Y)=$（　　）

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

【答案】A

【解析】

【分析】二项分布与 n 次独立重复试验的模型．先利用二项分布的数学期望公式求出 $D(X)$，再利用方差的性质求解即可.

【详解】解：因为 $X\sim B=\left(2,\dfrac{1}{3}\right)$，则 $D(X)=2\times\dfrac{1}{3}\times\left(1-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{4}{9}$，

又 $Y=3X-1$，所以 $D(Y)=D(3X-1)=3^2D(X)=3^2\times\dfrac{4}{9}=4$.

故选：A.

5. 设数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，若 $a_2+a_3+a_4=2$，$a_3+a_4+a_5=4$，则数列 $\{a_n\}$ 的前6项和为（　　）

A. 18　　　　B. 16　　　　C. 9　　　　D. 7

【答案】C

【解析】

【分析】由已知条件求出等比数列$\{a_n\}$的首项和公比，再利用等比数列的求和公式可求得结果.

【详解】设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，则$\begin{cases}a_2+a_3+a_4=a_1q\left(1+q+q^2\right)=2\\a_3+a_4+a_5=a_1q^2\left(1+q+q^2\right)=4\end{cases}$，解得$\begin{cases}a_1=\frac{1}{7}\\q=2\end{cases}$，

因此，数列$\{a_n\}$的前6项和为$\dfrac{\frac{1}{7}\left(1-2^6\right)}{1-2}=9$.

故选：C.

6. 已知函数$f(x)=\begin{cases}a^x,x<0\\(a-2)x+3a,x\geq 0\end{cases}$满足对任意$x_1\neq x_2$，都有$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$成立，则$a$的取值范围是（　　）

A. $(0,1)$　　　　B. $(2,+\infty)$　　　　C. $\left(0,\frac{1}{3}\right]$　　　　D. $\left[\frac{3}{4},2\right)$

【答案】C

【解析】

【分析】首先判断函数的单调性，再根据分段函数单调性的定义，列式求解.

【详解】$\because f(x)$满足对任意$x_1\neq x_2$，都有$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$成立，

$\therefore f(x)$在R上是减函数，$\therefore\begin{cases}0<a<1\\a-2<0\\(a-2)\times 0+3a\leq a^0\end{cases}$，解得$0<a\leq\frac{1}{3}$，

$\therefore a$的取值范围是$\left(0,\frac{1}{3}\right]$.

故选：C.

7. 已知函数$f(x)$为$\mathbf{R}$上的奇函数，$f(1+x)$为偶函数，则（　　）

A. $f(-2-x)+f(x)=0$　　　　B. $f(-x)=f(1+x)$

C. $f(x+2)=f(x-2)$　　　　D. $f(2023)=0$

【答案】C

【解析】

【分析】根据题意，利用函数的奇偶性和对称性，逐项分析、判定选项，即可求解.

【详解】对于 A 中，函数 $f(1+x)$ 为偶函数，则有 $f(1+x)=f(1-x)$，可得 $f(2+x)=f(-x)$，

又由 $f(x)$ 为奇函数，则 $f(-2-x)=-f(2+x), f(-x)=-f(x)$，

则有 $f(-2-x)=-f(-x)$，所以 $-f(-2-x)=-f(x)$，即 $f(-2-x)=f(x)$，所以 A 错误；

对于 B 中，函数 $f(1+x)$ 为偶函数，则有 $f(1+x)=f(1-x)$，所以 B 不正确；

对于 C 中，由 $f(2+x)=f(-x)=-f(x)$，则 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，

所以 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数，所以 $f(x+2)=f(x-2)$，所以 C 正确；

对于 D 中，由 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数，可得 $f(2023)=f(-1+506\times 4)=f(-1)=-f(1)$，其中结果不一定为 0，所以 D 错误.

故选：C.

8. 已知 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ 均为单位向量，满足 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}\geq 0$，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}\geq 0$，$\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，则 $3x+y$ 的最小值为（　　）

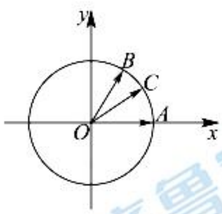
A. $-\frac{3\sqrt{21}}{14}$　　B. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $-\frac{\sqrt{7}}{14}$　　D. -1

【答案】B

【解析】

【分析】首先确定向量 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$ 的夹角，从而构建单位圆，确定向量 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ 的坐标，并利用三角函数表示 $3x+y$，并利用三角函数求最小值.

【详解】$\cos\langle\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\rangle=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}=\frac{1}{2}$，所以 $\langle\vec{OA},\vec{OB}\rangle=\frac{\pi}{3}$，



根据$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}\geq 0$，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}\geq 0$，则$\langle\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\rangle\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$，$\langle\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\rangle\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$，

如图，建立平面直角坐标系，设$A(1,0)$，$B\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$C(\cos\theta,\sin\theta)$，$\theta\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$，

由$\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，可知，$\begin{cases}\cos\theta=x+\dfrac{y}{2}\\ \sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}y\end{cases}$，

得$x=\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta$，$y=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\theta$，

$3x+y=3\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta=\frac{2\sqrt{21}}{3}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}\cos\theta-\frac{1}{2\sqrt{7}}\sin\theta\right)=\frac{2\sqrt{21}}{3}\cos(\theta+\varphi)$，

其中$\cos\varphi=\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}},\sin\varphi=\frac{1}{2\sqrt{7}},\tan\varphi=\frac{1}{3\sqrt{3}}$，所以$\varphi\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$，

则$\theta+\varphi\in\left[-\frac{\pi}{6}+\varphi,\frac{\pi}{2}+\varphi\right]$，

所以当$\theta=\frac{\pi}{2}$时，

所以$3x+y$的最小值是$-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

故选：B

二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分．

9. 下列说法正确的是（　　）

A. 在研究成对数据的相关关系时，线性相关关系越强，相关系数$|r|$越接近于1

B. 样本数据：27，30，37，39，40，50的第30百分位数与第50百分位数之和为68

C. 已知随机变量$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，若$P(X\geq -1)+P(X\geq 5)=1$，则$\mu=2$

D. 将总体划分为2层，通过分层随机抽样，得到两层的样本平均数和样本方差分别为$\overline{x_1},\overline{x_2}$和$s_1^2$，$s_2^2$，若$\overline{x_1}=\overline{x_2}$，则总体方差$s^2=\frac{1}{2}(s_1^2+s_2^2)$

【答案】ABC

【解析】

【分析】A 由相关系数的实际意义判断；B 由百分位数定义求出对应分位数判断；C 根据正态分布对称性判断；D 由分层抽样中样本、总体间的均值、方差关系判断.

【详解】A：由成对数据相关性中相关系数实际意义知：相关系数$|r|$越接近于 1，线性相关关系越强，反之也成立，对；

B：由$6\times30\%=1.8,6\times50\%=3$，则第 30 百分位数与第 50 百分位数分别为$30,\dfrac{37+39}{2}=38$，故和为 68，对；

C：由$P(X\ge-1)+P(X\ge5)=P(X\ge-1)+1-P(X<5)=1$，故$P(X\ge-1)=P(X<5)$，

根据正态分布对称性：$\mu=\dfrac{-1+5}{2}=2$，对；

D：由题意，总体均值为$\overline{x}=\overline{x_1}=\overline{x_2}$，若两层样本容量依次为$m,n$，

则$s^2=\dfrac{m}{m+n}\left[s_1^2+\left(\overline{x}-\overline{x_1}\right)^2\right]+\dfrac{n}{m+n}\left[s_2^2+\left(\overline{x}-\overline{x_2}\right)^2\right]=\dfrac{m}{m+n}s_1^2+\dfrac{n}{m+n}s_2^2$，

当且仅当$m=n$时$s^2=\dfrac{1}{2}\left(s_1^2+s_2^2\right)$，错.

故选：ABC

10. 若$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}<0$，则（　）

A. $a^2<b^2$　　B. $ab<b^2$　　C. $\ln(-a)>\ln(-b)$　　D. $|a|+|b|>|a+b|$

【答案】AB

【解析】

【分析】首先由条件得$b<a<0$，再根据不等式的性质，以及函数的单调性，即可判断选项.

【详解】由$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}<0$，得$b<a<0$，

则$-b>-a>0$，所以$b^2>a^2$，故 A 正确；

$b<a<0$，$b<0$，则$b^2>ab$，故 B 正确；

由$-b>-a>0$，则$\ln(-b)>\ln(-a)$，故 C 错误；

由$b<a<0$，则$|a|+|b|=|a+b|$，故 D 错误.

故选：AB

11. 已知函数$f(x)=\sin x-\dfrac{1}{\sin x}$，则（　）

A. $y=f(x)$的图象关于原点对称　　B. $f(x)$的最小正周期为π

C. $y=f(x)$的图象关于直线$x=\frac{\pi}{2}$对称　　　　D. $f(x)$的值域为$\mathbf{R}$

【答案】ACD

【解析】

【分析】根据奇函数的定义即可判断A，根据周期的定义即可判断B，根据$f(x+\pi)=-f(x)=f(-x)$即可判断C，根据奇偶性以及单调性即可判断D.

【详解】令$\sin x\neq 0\Rightarrow x\neq k\pi,k\in Z$,故$f(x)=\sin x-\frac{1}{\sin x}$的定义域为$\{x|x\neq k\pi,k\in Z\}$，关于原点对称，

有$f(-x)=\sin(-x)-\frac{1}{\sin(-x)}=-\sin x+\frac{1}{\sin x}=-f(x)$为奇函数，A正确，

$f(x+\pi)=\sin(x+\pi)-\frac{1}{\sin(x+\pi)}=-\sin x+\frac{1}{\sin x}\neq f(x)$，$\pi$不是$f(x)$的周期，故B错误，

$f(x+\pi)=\sin(x+\pi)-\frac{1}{\sin(x+\pi)}=-\sin x+\frac{1}{\sin x}$，由于$f(x+\pi)=-f(x)=f(-x)$，故$x=\frac{\pi}{2}$是$f(x)$的一条对称轴，故C正确，

令$t=\sin x\in[-1,0)\cup(0,1]$，$f(t)=t-\frac{1}{t}$在$t\in(0,1]$单调递增，故$f(t)=t-\frac{1}{t}$在$t\in(0,1]$上的范围为$(-\infty,0]$，由于$f(t)=t-\frac{1}{t}$为奇函数，所以$f(t)=t-\frac{1}{t}$在$t\in[-1,0)$上的范围为$[0,+\infty)$，故$f(x)$的值域为$\mathbf{R}$，D正确，

故选：ACD

12. 在平面直角坐标系xOy中，将函数$y=f(x)$的图象绕坐标原点逆时针旋转$\alpha(0^\circ<\alpha\leq 90^\circ)$后，所得曲线仍然是某个函数的图象，则称$f(x)$为“$\alpha$旋转函数”，则（　　）

A. 存在“90°旋转函数”

B. “70°旋转函数”一定是“80°旋转函数”

C. 若$g(x)=ax+\frac{1}{x}$为“45°旋转函数”，则$a=1$

D. 若$h(x)=\frac{bx}{e^x}$为“45°旋转函数”，则$-e^2\leqslant b\leqslant 0$

【答案】ACD

【解析】

【分析】对A，举例说明即可；对B，举反例判断即可；根据函数的性质，结合“α旋转函数”的定义逐个

判断即可；对 CD，将 $45°$ 旋转函数转化为函数与任意斜率为 1 的函数最多一个交点，再联立函数与直线的方程，分析零点个数判断即可.

【详解】对于 A，如 $y=x$，旋转 90°后为 $y=-x$ 满足条件，故 A 正确；

对于 B，如倾斜角为 $10°$ 的直线是 70° 旋转函数，不是 $80°$ 旋转函数，故 B 错误；

对与 C，若 $g(x)=ax+\frac{1}{x}$ 为 $45°$ 旋转函数，

则根据函数的性质可得，$g(x)=ax+\frac{1}{x}$ 逆时针旋转 $45°$ 后，

不存在与 x 轴垂直的直线，使得直线与函数有 1 个以上的交点.

故不存在倾斜角为 $45°$ 的直线与 $g(x)=ax+\frac{1}{x}$ 的函数图象有两个交点.

即 $y=x+b(b\in\mathrm{R})$ 与 $g(x)=ax+\frac{1}{x}$ 至多 1 个交点.

联立 $\begin{cases} y=ax+\frac{1}{x} \\ y=x+b \end{cases}$，可得 $(a-1)x^2-bx+1=0$.

当 $a=1$ 时，$-bx+1=0$ 最多 1 个解，满足题意；

当 $a\neq1$ 时，$(a-1)x^2-bx+1=0$ 的判别式 $\Delta=b^2-4(a-1)$，

对任意的 a，都存在 b 使得判别式大于 0，不满足题意，故 $a=1$. 故 C 正确；

对与 D，同 C，$h(x)=\frac{bx}{e^x}$ 与 $y=x+a(a\in\mathrm{R})$ 的交点个数小于等于 1，

即对任意的 a，$a=\frac{bx}{e^x}-x$ 至多 1 个解，故 $g(x)=\frac{bx}{e^x}-x$ 为单调函数，

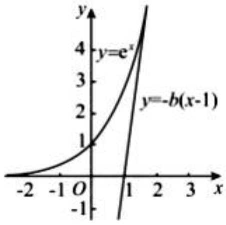
由 $g'(x)=\frac{b(1-x)}{e^x}-1, g'(1)=-1<0$，故 $g'(x)=\frac{b(1-x)}{e^x}-1\le0$ 恒成立，即 $e^x\ge-b(x-1)$ 恒成立.

即 $y=e^x$ 图象在 $y=-b(x-1)$ 上方，故 $-b\ge0$，即 $b\le0$.

当 $y=e^x$ 与 $y=-b(x-1)$ 相切时，可设切点 (x_0,e^{x_0})，

对 $y=e^x$ 求导有 $y'=e^x$，故 $\frac{e^{x_0}}{x_0-1}=e^{x_0}$，解得 $x_0=2$，此时 $b=-e^{x_0}=-e^2$，故 $-e^2\leqslant b\leqslant0$. 故 D 正确.

故选：ACD.



【点睛】数学中的新定义题目解题策略：①仔细阅读，理解新定义的内涵；②根据新定义，对对应知识进行再迁移.

第Ⅱ卷

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 若$\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)=\frac{1}{3}$，则$\sin 2\theta=$______.

【答案】$\frac{7}{9}$

【解析】

【分析】根据二倍角公式以及辅助角公式即可求解.

【详解】由$\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)=\frac{1}{3}$得$\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\theta\right)=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)-1=2\times\frac{1}{9}-1=-\frac{7}{9}$，

故$-\sin 2\theta=-\frac{7}{9}\Rightarrow\sin 2\theta=\frac{7}{9}$，

故答案为：$\frac{7}{9}$

14. 已知平面向量$\vec{a}$，$\vec{b}$为单位向量，且$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，若$\vec{c}=2\vec{a}+\sqrt{5}\vec{b}$，则$\cos\langle\vec{a},\vec{c}\rangle=$______.

【答案】$\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】代入向量数量积的夹角公式，即可求解.

【详解】$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\left(2\vec{a}+\sqrt{5}\vec{b}\right)=2\vec{a}^2+\sqrt{5}\vec{a}\cdot\vec{b}=2$，

$|\vec{c}|=\sqrt{\left(2\vec{a}+\sqrt{5}\vec{b}\right)^2}=\sqrt{4\vec{a}^2+5\vec{b}^2+4\sqrt{5}\vec{a}\cdot\vec{b}}=3$，

所以$\cos\langle\vec{a},\vec{c}\rangle=\frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{a}||\vec{c}|}=\frac{2}{1\times3}=\frac{2}{3}$.

故答案为：$\frac{2}{3}$

15. 二项式$(5+x)^{2023}$展开式的各项系数之和被 7 除所得余数为______.

【答案】6

【解析】

【分析】利用赋值法可得系数和为$(5+1)^{2023}=6^{2023}$，进而根据二项式定理展开式的特征可得余数.

【详解】令$x=1$得$(5+1)^{2023}=6^{2023}$，

由于$6^{2023}=(-1+7)^{2023}=-1+C_{2023}^{1}7-C_{2023}^{2}7^{2}+C_{2023}^{3}7^{3}+\cdots+7^{2023}$，

由于

$6^{2023}=(-1+7)^{2023}=-1+C_{2023}^{1}7-C_{2023}^{2}7^{2}+C_{2023}^{3}7^{3}+\cdots+7^{2023}=6-7+C_{2023}^{1}7-C_{2023}^{2}7^{2}+C_{2023}^{3}7^{3}+\cdots+7^{2023}$

，

$-7+C_{2023}^{1}7-C_{2023}^{2}7^{2}+C_{2023}^{3}7^{3}+\cdots+7^{2023}$均能被 7 整除，所以余数为 6，

故答案为：6

16. 若函数$f(x)=2\sin(\omega\cos x)-1$在区间$(0,2\pi)$恰有 2 个零点，则$\omega$的取值范围是______.

【答案】$\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)\cup\left(-\frac{5\pi}{6},-\frac{\pi}{6}\right)$

【解析】

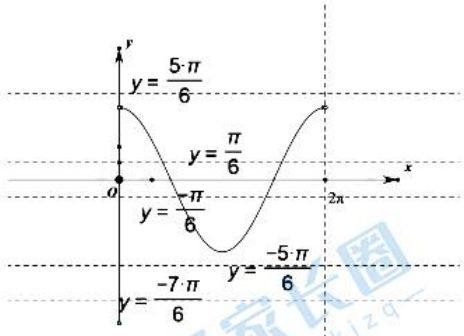
【分析】利用三角函数的性质计算即可.

【详解】在$x\in(0,2\pi)$时，$\cos x\in[-1,1)$，此时$y=\cos x$的图象关于直线$x=\pi$对称，

若$\omega>0$，则$\omega\cos x\in[-\omega,\omega)$，

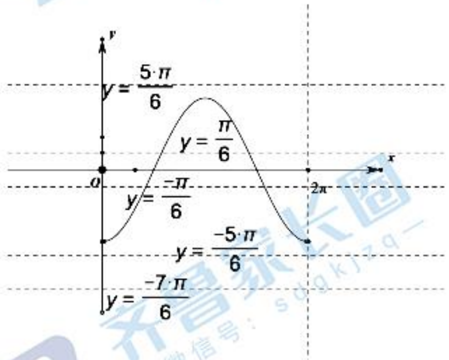
易知$\omega\cos x=\frac{\pi}{6}+2k\pi(k\in Z)$或$\omega\cos x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi(k\in Z)$时，$f(x)=2\sin(\omega\cos x)-1=0$，

因为恰有两个零点，故$\frac{5\pi}{6}>\omega>\frac{\pi}{6}$，此时$\omega\cos x$只能取到$\frac{\pi}{6}$，如下图所示，符合题意；



若$\omega<0$，则$\omega\cos x\in(\omega,-\omega]$，同上，有$-\frac{\pi}{6}>\omega>-\frac{5\pi}{6}$，

此时$\omega\cos x$只能取到$\frac{\pi}{6}$，如下图所示，符合题意；



综上$\omega\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)\cup\left(-\frac{5\pi}{6},-\frac{\pi}{6}\right)$.

故答案为：$\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)\cup\left(-\frac{5\pi}{6},-\frac{\pi}{6}\right)$.

【点睛】本题关键在于对ω符号的讨论，还需要考虑到$y=\omega\cos x$的对称性，取零点时通过数形结合注意端点即可.

四、解答题：本题共6小题，共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 在$\triangle ABC$中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$A=120^\circ$，$b=1$，$c=2$.

（1）求$\sin B$；

（2）若D为BC上一点，且$\angle BAD=90^\circ$，求$\triangle ADC$的面积.

【答案】（1）$\frac{\sqrt{21}}{14}$

（2）$\frac{\sqrt{3}}{10}$

【解析】

【分析】（1）根据余弦定理求解a，即可由三边求解$\cos B$，进而可求正弦值，

（2）根据面积公式即可求解.

【小问1详解】

由余弦定理可得：$BC^2=a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=1+4-2\times2\times1\times\cos120°=7$，

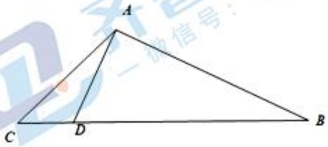
则$BC=\sqrt{7}$，$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{7+4-1}{2\times2\times\sqrt{7}}=\frac{5\sqrt{7}}{14}$，

$B\in(0,\pi)$，所以$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-\frac{25}{28}}=\frac{\sqrt{21}}{14}$.

【小问2详解】

由三角形面积公式可得$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}}=\frac{\frac{1}{2}\times AB\times AD\times\sin90°}{\frac{1}{2}\times AC\times AD\times\sin30°}=4$，

则$S_{\triangle ACD}=\frac{1}{5}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{5}\times\left(\frac{1}{2}\times2\times1\times\sin120°\right)=\frac{\sqrt{3}}{10}$.



18. 已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$S_n=n^2+n$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若数列$\{b_n\}$满足$b_n=\begin{cases}a_n, n为奇数\\ 2^{\frac{a_n}{2}}, n为偶数\end{cases}$，求数列$\{b_n\}$的前$2n$项和$T_{2n}$.

【答案】（1）$a_n=2n$

（2）$2n^2+\frac{4^{n+1}-4}{3}$

【解析】

【分析】（1）根据 $a_n=S_n-S_{n-1}$ 即可求解，

（2）根据分组求和，结合等差等比数列的求和公式即可求解.

【小问 1 详解】

当 $n\geq 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+n-(n-1)^2-(n-1)=2n$，

当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=2$，因为 a_1 也符合上式.

所以 $a_n=2n$.

【小问 2 详解】

由（1）可知 $b_n=\begin{cases}2n, n为奇数\\2^n, n为偶数\end{cases}$，

所以 $T_{2n}=(2+6+10+\cdots+4n-2)+(2^2+2^4+2^6+\cdots+2^{2n})$

$=\frac{n(2+4n-2)}{2}+\frac{4(1-4^n)}{1-4}=2n^2+\frac{4^{n+1}-4}{3}$.

19. 如图，某公园拟在长为 8（百米）的道路 OP 的一侧修建一条运动跑道，跑道的前一部分为曲线段 OSM，该曲线段为函数 $y=A\sin\omega x(A>0,\omega>0)$，$x\in[0,4]$ 的图象，且图象的最高点为 $S(3,2\sqrt{3})$，跑道的后一部分为折线段 MNP. 为保证跑步人员的安全，限定 $\angle MNP=120°$.

（1）求 A，ω；

（2）求折线段跑道 MNP 长度的最大值.

【答案】（1）$A=2\sqrt{3}$，$\omega=\frac{\pi}{6}$

（2）$\frac{10\sqrt{3}}{3}$ 百米

【解析】

【分析】（1）由图象即可得 A 和函数的周期，继而求得 ω；

（2）解法一，由（1）的函数解析式，即可求得 M 点坐标，求出 MP 的长，在 $\triangle MNP$ 中利用余弦定理结合基本不等式即可求得答案；解法二，在 $\triangle MNP$ 中利用正弦定理求得 $NP+MN$ 的表达式，结合三角恒等变换化简，即可求得答案.

【小问 1 详解】

依题意，有 $A=2\sqrt{3}$，$\frac{T}{4}=3$，则 $T=12$，

又 $T=\frac{2\pi}{\omega}$，$\therefore \omega=\frac{\pi}{6}$；

【小问 2 详解】

由（1）知，$y=2\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{6}x$.

当 $x=4$ 时，$y=2\sqrt{3}\sin\frac{2\pi}{3}=3$，$\therefore M(4,3)$.

又 $P(8,0)$，$\therefore MP=\sqrt{4^2+3^2}=5$.

解法一：在 $\triangle MNP$ 中，$\angle MNP=120°$，$MP=5$，

由余弦定理得 $MN^2+NP^2-2MN\cdot NP\cdot\cos\angle MNP=MP^2$.

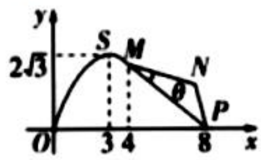
故 $(MN+NP)^2-25=MN\cdot NP\le\left(\frac{MN+NP}{2}\right)^2$，

从而 $\frac{3}{4}(MN+NP)^2\le 25$，即 $MN+NP\le\frac{10\sqrt{3}}{3}$，当且仅当 $MN=NP=\frac{5\sqrt{3}}{3}$ 时等号成立.

故折线段赛道 MNP 最长为 $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ 百米.

解法二：在 $\triangle MNP$ 中，$\angle MNP=120°$，$MP=5$.

设 $\angle PMN=\theta$，则 $0°<\theta<60°$.



由正弦定理得 $\frac{MP}{\sin 120°}=\frac{NP}{\sin\theta}=\frac{MN}{\sin(60°-\theta)}$，

$\therefore NP=\frac{10\sqrt{3}}{3}\sin\theta$，$MN=\frac{10\sqrt{3}}{3}\sin(60°-\theta)$.

故 $NP+MN=\frac{10\sqrt{3}}{3}\sin\theta+\frac{10\sqrt{3}}{3}\sin\left(60^\circ-\theta\right)$

$=\frac{10\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)=\frac{10\sqrt{3}}{3}\sin\left(\theta+60^\circ\right)$.

$\because 0^\circ<\theta<60^\circ$，$\therefore$ 当 $\theta=30^\circ$ 时，$\frac{10\sqrt{3}}{3}\sin\left(\theta+60^\circ\right)$ 取到最大值 $\frac{10\sqrt{3}}{3}$，

即折线段赛道 MNP 最长，

故折线段赛道 MNP 最长为 $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ 百米.

20. 已知 $f\left(x\right)$、$g\left(x\right)$ 分别为定义域为 R 的偶函数和奇函数，且 $f\left(x\right)+g\left(x\right)=\mathrm{e}^x$.

（1）求 $f\left(x\right)$ 的单调区间；

（2）对任意实数 x 均有 $3+g^2\left(x\right)-af\left(x\right)\geq 0$ 成立，求实数 a 的取值范围.

【答案】（1）$f\left(x\right)$ 的增区间为 $\left(0,+\infty\right)$，减区间为 $\left(-\infty,0\right)$

（2）$\left(-\infty,2\sqrt{2}\right]$

【解析】

【分析】（1）对于 $f\left(x\right)+g\left(x\right)=\mathrm{e}^x$ 将 x 换成 $-x$ 结合奇偶性求出 $f\left(x\right)$、$g\left(x\right)$ 的解析式，在利用导数求出函数的单调区间；

（2）设 $t=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$，则问题转化为 $3+\frac{t^2-4}{4}-a\cdot\frac{t}{2}\geq 0$ 在 $t\geq 2$ 时恒成立，参变分离可得 $2a\leq t+\frac{8}{t}$，再利用基本不等式求出 $t+\frac{8}{t}$ 的最小值，即可求出 a 的取值范围.

【小问 1 详解】

因为 $f\left(x\right)+g\left(x\right)=\mathrm{e}^x$①，$f\left(x\right)$、$g\left(x\right)$ 分别为定义域为 R 的偶函数和奇函数，

所以 $f\left(-x\right)=f\left(x\right)$，$g\left(-x\right)=-g\left(x\right)$，

所以 $f\left(-x\right)+g\left(-x\right)=\mathrm{e}^{-x}$，即 $f\left(x\right)-g\left(x\right)=\mathrm{e}^{-x}$②，

①②解得 $f\left(x\right)=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\right)$，$g\left(x\right)=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}\right)$，

所以 $f'\left(x\right)=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}\right)$，$g'\left(x\right)=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\right)>0$，

所以$f'(x)$（$g(x)$）在定义域R上单调递增，又$f'(0)=\frac{1}{2}\left(e^0-e^0\right)=0$，

所以当$x>0$时$f'(x)>0$，即$f(x)$的单调递增区间为$(0,+\infty)$，

当$x<0$时$f'(x)<0$，即$f(x)$的单调递减区间为$(-\infty,0)$.

【小问2

设$t=e^x+e^{-x}$，因为$e^x+e^{-x}\geq 2\sqrt{e^x\cdot e^{-x}}=2$，当且仅当$x=0$时取等号，所以$t\geq 2$，

不等式$3+g^2(x)-af(x)\geq 0$恒成立，转化为$3+\frac{t^2-4}{4}-a\cdot\frac{t}{2}\geq 0$在$t\geq 2$时恒成立，

分离参数得$2a\leq t+\frac{8}{t}$在$t\geq 2$时恒成立，由均值不等式$t+\frac{8}{t}\geq 2\sqrt{t\cdot\frac{8}{t}}=4\sqrt{2}$，当且仅当$t=2\sqrt{2}$时取等号，

故$t+\frac{8}{t}$的最小值为$4\sqrt{2}$，所以$2a\leq 4\sqrt{2}\Rightarrow a\leq 2\sqrt{2}$，

故实数a的取值范围为$\left(-\infty,2\sqrt{2}\right]$.

21. 某品牌女装专卖店设计摸球抽奖促销活动，每位顾客只用一个会员号登陆，每次消费都有一次随机摸球的机会．已知顾客第一次摸球抽中奖品的概率为$\frac{2}{7}$；从第二次摸球开始，若前一次没抽中奖品，则这次抽中的概率为$\frac{1}{2}$，若前一次抽中奖品，则这次抽中的概率为$\frac{1}{3}$．记该顾客第n次摸球抽中奖品的概率为P_n.

（1）求P_2的值，并探究数列$\{P_n\}$的通项公式；

（2）求该顾客第几次摸球抽中奖品的概率最大，请给出证明过程．

【答案】（1）$\frac{19}{42}$，$P_n=\frac{3}{7}-\frac{1}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}$

（2）第二次，证明见解析

【解析】

【分析】（1）根据全概率公式即可求解P_2，利用抽奖规则，结合全概率公式即可由等比数列的定义求解，

（2）根据$P_n=\frac{3}{7}-\frac{1}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}$，即可对$n$分奇偶性求解．

【小问1详解】

记该顾客第$i\left(i\in N^*\right)$次摸球抽中奖品为事件A，依题意，$P_1=\frac{2}{7}$，

$P_2=P(A_2)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)+P(\overline{A_1})P(A_2\mid \overline{A_1})=\frac{2}{7}\times\frac{1}{3}+\left(1-\frac{2}{7}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{19}{42}$.

因为$P(A_n\mid A_{n-1})=\frac{1}{3}$，$P(A_n\mid \overline{A_{n-1}})=\frac{1}{2}$，$P_n=P(A_n)$，

所以$P(A_n)=P(A_{n-1})P(A_n\mid A_{n-1})+P(\overline{A_{n-1}})P(A_n\mid \overline{A_{n-1}})$，

所以$P_n=\frac{1}{3}P_{n-1}+\frac{1}{2}(1-P_{n-1})=-\frac{1}{6}P_{n-1}+\frac{1}{2}$，

所以$P_n-\frac{3}{7}=-\frac{1}{6}\left(P_{n-1}-\frac{3}{7}\right)$，

又因为$P_1=\frac{2}{7}$，则$P_1-\frac{3}{7}=-\frac{1}{7}\neq 0$，

所以数列$\left\{P_n-\frac{3}{7}\right\}$是首项为$-\frac{1}{7}$，公比为$-\frac{1}{6}$的等比数列，

故$P_n=\frac{3}{7}-\frac{1}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}$.

【小问2详解】

证明：当n为奇数时，$P_n=\frac{3}{7}-\frac{1}{7\cdot 6^{n-1}}<\frac{3}{7}<\frac{19}{42}$，

当n为偶数时，$P_n=\frac{3}{7}+\frac{1}{7\cdot 6^{n-1}}$，则$P_n$随着$n$的增大而减小，

所以，$P_n\le P_2=\frac{19}{42}$.

综上，该顾客第二次摸球抽中奖品的概率最大.

22. 已知函数$f(x)=\frac{a}{x}+\ln x$的最小值为1.

（1）求a；

（2）若数列$\{x_n\}$满足$x_1\in(0,1)$，且$x_{n+1}=f(x_n)$，证明：$x_{n+1}+x_{n+3}>2x_{n+2}$.

【答案】(1) $a=1$

（2）证明见解析

【解析】

【分析】(1) 首先求函数的导数，并讨论$a\le 0$和$a>0$两种情况讨论函数的单调性，并求函数的最小值，

即可求实数a的取值；

（2）由（1）的结果可知，$x_{n+1}>1$，$n\in N^*$，并设$g(x)=f(x)-x=\frac{1}{x}+\ln x-x$，$x\geq 1$，利用导数判断函数的单调性，根据$g(x_{n+2})>g(x_{n+1})$，即可证明.

【小问1详解】

$f'(x)=-\frac{a}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x-a}{x^2}$，$x>0$.

①若$a\leq 0$，$f'(x)>0$恒成立，

可得$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，$f(x)$没有最小值，不符合题意；

②若$a>0$，令$f'(x)=0$，得$x=a$，

当$0<x<a$时，$f'(x)<0$，当$x>a$时，$f'(x)>0$，

所以$f(x)$在$(0,a)$上单调递减，在$(a,+\infty)$上单调递增，

所以$f(x)_{\min}=f(a)=1+\ln a=1$，所以$a=1$.

【小问2详解】

证明：由（1）可得，$f(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，

则有$f(x)\geq f(1)=1$，

因为$x_1\in(0,1)$，所以$x_2=f(x_1)>1$，$x_3=f(x_2)>1\cdots x_{n+1}=f(x_n)>1$.

令$g(x)=f(x)-x=\frac{1}{x}+\ln x-x$，$x\geq 1$，

$$g'(x)=\frac{-x^2+x-1}{x^2}=\frac{-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}}{x^2}<0,$$

所以$g(x)$在区间$[1,+\infty)$上单调递减，且$g(1)=0$，

所以$g(x_{n+1})=f(x_{n+1})-x_{n+1}<0$，而$x_{n+2}=f(x_{n+1})$，

所以$x_{n+2}<x_{n+1}$，

所以$g(x_{n+2})>g(x_{n+1})$，即$f(x_{n+2})-x_{n+2}>f(x_{n+1})-x_{n+1}$，

即$x_{n+3}-x_{n+2}>x_{n+2}-x_{n+1}$，所以$x_{n+1}+x_{n+3}>2x_{n+2}$.

【点睛】关键点点睛：本题考查利用导数研究函数的最值以及不等式的综合应用问题，第二问是本题的难

点，关键是构造函数 $g(x)=f(x)-x=\frac{1}{x}+\ln x-x$，$x\geq 1$，并结合 $x_{n+1}=f(x_n)$，即可求解.

关于我们

齐鲁家长圈系业内权威、行业领先的自主选拔在线旗下子平台，集聚高考领域权威专家，运营团队均有多年高考特招研究经验，熟知山东新高考及特招政策，专为山东学子服务！聚焦山东新高考，提供新高考资讯、新高考政策解读、志愿填报、综合评价、强基计划、专项计划、双高艺体、选科、生涯规划等政策资讯服务，致力于做您的山东高考百科全书。

第一时间获取山东高考升学资讯，关注**齐鲁家长圈**微信号：**sdgkjzq**。

打开“微信 / 发现 / 搜一搜”搜索