学校________ 姓名________ 班级________ 座号________

试卷类型：A

高 三 数 学

2023.1

本试卷共4页．满分150分．考试时间120分钟．

注意事项：

1．答题前，考生务必在试题卷、答题卡规定的地方填写自己的准考证号、姓名．
2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号．回答非选择题时，将答案写在答题卡上．写在本试卷上无效．
3．考试结束，考生必须将试题卷和答题卡一并交回．

一、单项选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．设全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x \mid |x-2|\leqslant 1\}$，$B=\{x \mid 2^x-4\geqslant 0\}$，则集合 $A\cap(\complement_U B)=$

A．$(1,2)$　　B．$(1,2]$　　C．$[1,2)$　　D．$[1,2]$

2．若复数 z 满足 $(2-\mathrm{i})z=\mathrm{i}^{2023}$，则 $\bar{z}=$

A．$\frac{1}{5}-\frac{2}{5}\mathrm{i}$　　B．$-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}\mathrm{i}$　　C．$-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\mathrm{i}$　　D．$\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\mathrm{i}$

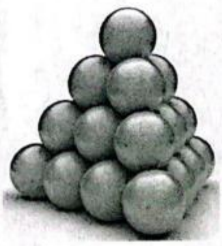
3．已知函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\geqslant \sin x,\\ x, & x<\sin x,\end{cases}$ 则 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=$

A．$\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D．$\frac{\pi}{3}$

4．若一组样本数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的平均数为10，另一组样本数据 $2x_1+4,2x_2+4,\cdots,2x_n+4$ 的方差为8，则两组样本数据合并为一组样本数据后的平均数和方差分别为

A．17，54　　B．17，48　　C．15，54　　D．15，48

5．宋代制酒业很发达，为了存储方便，酒缸是要一层一层堆起来的，形成堆垛，用简便的方法算出堆垛中酒缸的总数，古代称之为堆垛术．有这么一道关于"堆垛"求和的问题：将半径相等的圆球堆成一个三角垛，底层是每边为 n 个圆球的三角形，向上逐层每边减少一个圆球，顶层为一个圆球，我们发现，当 $n=1,2,3,4$ 时，圆球总个数分别为1，4，10，20，则 $n=5$ 时，圆球总个数为



A．30　　B．35　　C．40　　D．45

6．已知正三棱锥 $P-ABC$ 的侧棱长为 $\sqrt{3}$，点 E,F 分别在线段 PC,BC（不包括端点）上，且 $EF\parallel PB$，$\angle AEF=90^\circ$，若点 M 为三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的球面上任意一点，则点 M 到平面 ABC 距离的最大值为

A．$\frac{4}{3}$　　B．$\frac{5\sqrt{2}}{4}$　　C．2　　D．$\frac{3}{2}$

7. 已知 O 为坐标原点，A,B 是抛物线 $y^2=4x$ 上的动点，且 $OA\perp OB$，过点 O 作 $OH\perp AB$，垂足为 H，下列各点中到点 H 的距离为定值的是

A. $(1,0)$　　B. $(2,0)$　　C. $(1,2)$　　D. $(2,1)$

8. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=1$，对 $\forall x,y\in\mathbf{R}$，有 $f(xy+1)=f(x)f(y)-f(y)-x+2$，则 $\sum\limits_{i=1}^{2023}\dfrac{1}{f(i)f(i+1)}=$

A. $\dfrac{2023}{4050}$　　B. $\dfrac{2024}{2025}$　　C. $\dfrac{2023}{4048}$　　D. $\dfrac{2023}{2024}$

二、多项选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，在每个小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 关于下列命题中，说法正确的是

A. 已知 $X\sim B(n,p)$，若 $E(X)=30$，$D(X)=20$，则 $p=\dfrac{2}{3}$

B. 数据 91，72，75，85，64，92，76，78，86，79 的 45% 分位数为 78

C. 已知 $\xi\sim N(0,1)$，若 $P(\xi>1)=p$，则 $P(-1\leqslant\xi\leqslant 0)=\dfrac{1}{2}-p$

D. 某校三个年级，高一有 400 人，高二有 360 人. 现用分层抽样的方法从全校抽取 57 人，已知从高一抽取了 20 人，则应从高三抽取 19 人.

10. 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 P 为线段 AD_1（包括端点）上一动点，则

A. 异面直线 AD_1 与 A_1C_1 所成的角为 $60°$

B. 三棱锥 B_1-PBC_1 的体积为定值

C. 不存在点 P，使得 $AD_1\perp$ 平面 PCD

D. $PB+PC$ 的最小值为 $3+\sqrt{6}$

11. 已知函数 $f(x)=\dfrac{a\sqrt{-(x+2)(x-6)}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x}}$，其中 a 为实数，则

A. $f(x)$ 的图象关于 $x=2$ 对称

B. 若 $f(x)$ 在区间 $[-2,2]$ 上单调递增，则 $a<0$

C. 若 $a=1$，则 $f(x)$ 的极大值为 1

D. 若 $a<0$，则 $f(x)$ 的最小值为 a

12. 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2-\dfrac{1}{2}a_1<a_3-\dfrac{1}{2}a_2<\cdots<a_n-\dfrac{1}{2}a_{n-1}<\cdots$，则称数列 $\{a_n\}$ 为“差半递增”数列，则

A. 正项递增数列均为“差半递增”数列

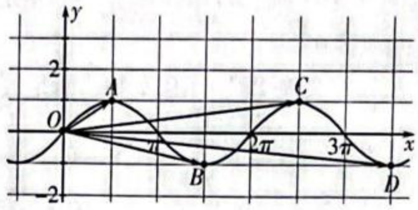
B. 若数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=q^n(q>1)$，则数列 $\{a_n\}$ 为“差半递增”数列

C. 若数列 $\{a_n\}$ 为公差大于 0 的等差数列，则数列 $\{a_n\}$ 为“差半递增”数列

D. 若数列 $\{a_n\}$ 为“差半递增”数列，其前 n 项和为 S_n，且满足 $S_n=2a_n-2^{n+1}-t$，则实数 t 的取值范围为 $\left(-\dfrac{32}{3},+\infty\right)$

三、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 如图所示，A,B,C,D 是正弦函数 $y=\sin x$ 图象上四个点，且在 A,C 两点函数值最大，在 B,D 两点函数值最小，则 $(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$ =________.



14. 已知函数 $f(x)=3\sin x+4\cos x$，且 $f(x)\leqslant f(\theta)$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，若角 θ 的终边经过点 $P(4,m)$，则 $m=$________.

15. 写出一个同时满足下列三个性质的函数 $f(x)=$________.

①$f(x)$ 是奇函数；②$f(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 单调递增；③$f(x)$ 有且只有3个零点.

16. 设双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右顶点为 A，过点 A 且斜率为2的直线与 C 的两条渐近线分别交于点 P,Q. 若线段 PQ 的中点为 M，$|AM|=\dfrac{\sqrt{5}}{5}a$，则 C 的离心率 $e=$________.

四、解答题：本大题共6道小题，共70分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10分)

已知正项数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1,a_{n+1}(a_n+2)=2a_n^2+5a_n+2(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1) 证明：数列 $\{a_n+1\}$ 是等比数列，并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 设 $b_n=(-1)^n\log_4(a_n+1)$，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，求 T_n.

18. (12分)

在锐角三角形 ABC 中，内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，已知 $\cos C\sin(A-B)=\cos B\sin(C-A)$.

(1) 求 $\tan A$ 的最小值；

(2) 若 $\tan A=2,a=4\sqrt{5}$，求 c.

19. (12分)

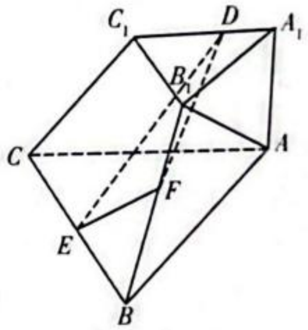
一个不透明箱子中有除颜色外其它都相同的四个小球，其中两个红球两个白球的概率为 $\dfrac{2}{3}$，三个红球一个白球的概率为 $\dfrac{1}{3}$.

(1) 从箱子中随机抽取一个小球，求抽到红球的概率；

(2)现从箱子中随机一次性抽取两个或三个小球,已知抽到两个小球的概率为$\frac{3}{4}$,抽到三个小球的概率为$\frac{1}{4}$,所抽到的小球中,每个红球记2分,每个白球记-1分,用X表示抽到的小球分数之和,求X的分布列及数学期望.

20.(12分)

已知三棱台$A_1B_1C_1-ABC$中,$AA_1\perp$底面ABC,$AB=AC=2$,$AA_1=A_1B_1=1$,$AB_1\perp A_1C_1$,E,F分别是BC,BB_1的中点,D是棱A_1C_1上的点.



(1)求证:$AB_1\perp DE$;

(2)若D是线段A_1C_1的中点,平面DEF与A_1B_1的交点记为M,求二面角$M-AC-B$的余弦值.

21.(12分)

已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左,右焦点分别为$F_1$,$F_2$,焦距为$2\sqrt{3}$,点$Q(\sqrt{3},-\frac{1}{2})$在$C$上.

(1)P是C上一动点,求$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$的取值范围;

(2)过C的右焦点F_2,且斜率不为零的直线l交C于M,N两点,求$\triangle F_1MN$的内切圆面积的最大值.

22.(12分)

已知函数$f(x)=e^x-ax^2-\cos x-\ln(x+1)$.

(1)若$a=1$,求证:函数$f(x)$的图象与x轴相切于原点;

(2)若函数$f(x)$在区间$(-1,0)$,$(0,+\infty)$各恰有一个极值点,求实数a的取值范围.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。