江淮十校2022届高三第二次联考

数　　学(理科)

2021.1

命审单位：安庆一中　　命审人：洪汪宝　吕鹏飞

注意事项：

1. 本试卷满分150分，考试时间120分钟。
2. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
3. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用
擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
4. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

**一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分. 在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题
求的.**

1. 已知集合 $A=\{x\in \mathbf{Z}|-3<x<4\}$，集合 $B=\{y|y=\sqrt{x-1}\}$，则 $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=$

A. $(-3,0)$　　B. $(-3,0]$

C. $\{-2,-1\}$　　D. $\{-2,-1,0\}$

2. 命题"$\forall x\geqslant 0, e^x\geqslant x+1$"的否定为

A. $\exists x_0<0, e^{x_0}<x_0+1$　　B. $\forall x\geqslant 0, e^x<x+1$

C. $\exists x_0\geqslant 0, e^{x_0}\geqslant x_0+1$　　D. $\exists x_0\geqslant 0, e^{x_0}<x_0+1$

3. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\cos x, x<0\\ f(x-\pi), x\geqslant 0\end{cases}$，则 $f\left(\dfrac{17\pi}{3}\right)=$

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\dfrac{1}{2}$

C. $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $-\dfrac{1}{2}$

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列，则"$q>0$"是"数列 $\{\lg a_n\}$ 为等差数列"的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分又不必要条件

假　　假

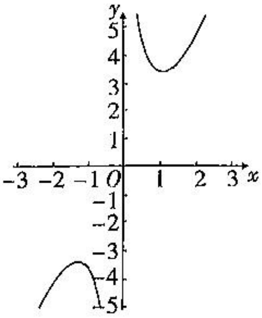
5. 已知命题 p：$\exists x_0\in\mathbf{R}$，使 $\sin x_0+\cos x_0=\dfrac{3}{2}$；命题 q："若 $x^2+y^2=0$，则 $x=y=0$"的否命题是"若 x^2+
则 x,y 都不为0". 则下列复合命题为真命题的是

A. $p\wedge q$　　B. $p\vee q$

C. $(\neg p)\wedge q$　　D. $(\neg p)\vee q$

A

6. 已知函数 $y=f(x)$ 的图象如图所示，则其解析式可能为



A. $f(x)=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{\ln(x^{2}+1)}$

B. $f(x)=\dfrac{\ln(x^{2}+1)}{e^{x}-e^{-x}}$

C. $f(x)=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{\ln(x^{2}+1)}$

D. $f(x)=e^{x}-e^{-x}$

3

7. 已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1, a_{n+1}=3a_n(n\in\mathbf{N}^*)$，其前 n 项的和为 S_n，则

A. $S_n=2a_n-1$　　B. $S_n=\dfrac{3}{2}a_n-\dfrac{1}{2}$

C. $S_n=3a_n-2$　　D. $S_n=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{2}$

A

8. 在梯形 $ABCD$ 中，$AB/\!/CD$ 且 $AB=3CD$，点 P 在边 BC 上. 若 $\overrightarrow{AP}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AD}$，则实数 $\lambda=$

A. $\dfrac{2}{3}$　　B. $\dfrac{1}{3}$　　C. $\dfrac{1}{4}$　　D. $\dfrac{1}{2}$

9. 已知 S_n 为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和，若 $S_{11}=33, S_n=240, a_{n-5}=17(n>5, n\in\mathbf{N}^*)$，则 $n=$

A. 12　　B. 18　　C. 24　　D. 30

10. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2x^{2}, x\geqslant 0\\ -2x^{2}, x<0\end{cases}$，则不等式 $f(\log_2^2x-3)<4f(\log_2x)$ 的解集为

A. $(0,3)$　　B. $\left(\dfrac{1}{2},8\right)$

C. $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)\cup(8,+\infty)$　　D. $\left(\dfrac{1}{8},2\right)$

11. 已知函数 $f(x)=|\pi+x|\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)$，则关于 $f(x)$ 的图象与性质有如下四个命题，其中是真命题的个数为

①函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=-\pi$ 对称；

②函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(-\pi,0)$ 对称；

③函数 $f(x)$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$ 上单调递增；

④函数 $f(x)$ 的图象可看成将函数 $y=|x|\sin x$ 的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{2}$ 个单位得到的.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

1.6　　1.8

12. 设 $a=\ln\dfrac{5}{3}, b=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{23}{7}, c=\dfrac{8}{25}$，则

b>a

A. $b>a>c$　　B. $a>b>c$　　C. $b>c>a$　　D. $c>b>a$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知平面向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$\vec{a}=(3,4)$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-2$，则$\vec{a}\cdot\left(\frac{1}{5}\vec{a}-\vec{b}\right)=$ 7 .

14. 九连环是我国从古至今广泛流传的一种益智游戏，它用九个圆环相连成串，以解开为胜. 据明代杨慎《丹铅总录》记载："两环互相贯为一，得其关捩，解之为二，又合面为一". 它在中国差不多有两千多年的历史，卓文君在给司马相如的信中有"九连环从中折断"的句子. 在某种玩法中，用 a_n 表示解下 n $(n\leqslant 9,n\in\mathbf{N}^*)$ 个圆环所需的移动最少次数，若 $a_1=1$. 且 $a_n=\begin{cases}2a_{n-1}-1,n\text{ 为偶数}\\2a_{n-1}+2,n\text{ 为奇数}\end{cases}$，则解下 7 个环所需的最少移动次数为 64 .

九 连 环

15. 已知集合 $A=\{x\in\mathbf{N}\mid x<4\sin\theta,\theta\in[0,2\pi]\}$，若集合 A 中至少有 3 个元素，则实数 θ 的取值范围为________.

16. 已知函数$f(x)=\begin{cases}(x+1)^2,x\leqslant 0\\|\log_4 x|,x>0\end{cases}$，若$f(x)=a$有四个不同的解$x_1,x_2,x_3,x_4$且$x_1<x_2<x_3<x_4$，则$x_4(x_1+x_2)+\frac{1}{x_3x_4^2}$的最小值为 $-\frac{3}{4}$.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)已知函数$f(x)=\frac{a}{2^x+1}+b$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，其图象经过点$(\log_2 3,1)$.

(1)求函数 $y=f(x)$ 的解析式；

(2)对 $\forall x\in\mathbf{R}$，都有 $f(x)<m$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

18. (12 分)在平面直角坐标系 xOy 中，$\overrightarrow{OA}=(1,3)$，$\overrightarrow{OB}=(3,1)$，$\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$(其中 $x\in\mathbf{R}$，$y\in\mathbf{R}$).

(1)若点 C 在直线 AB 上，且$\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{AB}$，求 x,y 的值；

(2)若点 C 为$\triangle OAB$ 的外心，求点 C 的坐标.

19.（12分）已知各项均为正数的数列$\{a_n\}$的前 n 项的和为 S_n，且满足 $S_1=1,2(\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}})=a_n(n\geq 2,n\in\mathbf{N}^*)$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式 a_n；

（2）设 $b_n=\dfrac{2}{\sqrt{S_nS_{n+1}}}$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项的和 T_n.

20.（12分）已知函数$f(x)=2\sin|x|+\cos 2x,x\in[-\pi,\pi]$.

（1）证明函数$f(x)$为偶函数，并求出其最大值；

（2）求函数$f(x)$在$[0,\pi]$上的单调递增区间.

21.（12分）锐角$\triangle ABC$中，角A,B,C所对的边分别为a,b,c，且$\dfrac{a}{c\cos B}=\tan B+\tan C$.

（1）求角 C 的大小；

（2）若边 $c=2$，边 AB 的中点为 D，求中线 CD 长的取值范围.

22.（12分）已知函数$f(x)=\ln x-ax+1(a\in\mathbf{R})$.

（1）讨论函数$f(x)$的单调性；

（2）若函数$f(x)$有两个零点 x_1,x_2 且 $x_2>2x_1$，求证：$x_1^2x_2^3>\dfrac{256}{e^5}$.

江淮十校 2022 届高三第二次联考

数学(理科)试题参考答案与评分细则

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
选项	C	D	B	B	D	A	B	D	C	B	C	A

1. C　解析:由条件知 $A=\{-2,-1,0,1,2,3\}$,$\complement_{\mathbf{R}}B=(-\infty,0)$,所以 $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=\{-2,-1\}$,故选 C.

2. D　解析:全称命题的否定是特称命题.

3. B　解析:由已知得 $f\left(\frac{17\pi}{3}\right)=f\left(\frac{2\pi}{3}+5\pi\right)=f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=f\left(\frac{2\pi}{3}-\pi\right)=f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$.

4. B　解析:当 $q>0$ 时,若 $a_1<0$,则 $a_n<0$,于是 $\lg a_n$ 无意义,充分性不成立;反之成立,故选 B.

5. D　解析:由已知得 p 假 q 假,根据复合命题的真值表可知 $(\neg p)\vee q$ 为真命题.

6. A　解析:由图象可知该函数是奇函数,排除 C;对于 D,其在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,不符合;令 $x=1$,代入求值可得 A 符合.

7. B　解析:由条件知 $a_n=3^{n-1}$,$S_n=\frac{1}{2}(3^n-1)=\frac{3}{2}a_n-\frac{1}{2}$,故选 B.

8. D　解析:延长 AD,BC 交于点 E,则 B,P,E 三点共线,于是可得 $\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$,因 $AB\parallel CD$ 且 $AB=3CD$,所以 $\overrightarrow{AE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$,于是 $\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$,$\lambda=\frac{1}{2}$,故选 D.

9. C　解析:由条件知 $S_{11}=11a_6=33$,$a_6=3$,$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{n(a_6+a_{n-5})}{2}=10n=240$,解得 $n=24$.

10. B　解析:由条件知 $4f(x)=f(2x)$,且函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数,于是原不等式可化为 $\log_2^2x-3<2\log_2x$,解得 $\frac{1}{2}<x<8$,故选 B.

11. C　解析:由条件知 $f(x)=|\pi+x|\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=|\pi+x|\cdot\cos x$,则 $f(-\pi+x)=|\pi+(-\pi+x)|\cdot\cos(-\pi+x)=-|x|\cdot\cos x$,
$f(-\pi-x)=|\pi+(-\pi-x)|\cdot\cos(-\pi-x)=-|x|\cdot\cos x$,
于是 $f(-\pi+x)=f(-\pi-x)$,所以函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=-\pi$ 对称,①正确,②错误;当 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ 时,$f(x)=|\pi+x|\cdot\cos x=(x+\pi)\cdot\cos x$,对其求导得 $f'(x)=\cos x-(x+\pi)\sin x>0$,所以函数 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ 上单调递增,③正确;④显然不正确,故选 C.

12. A　解析:法一:构造函数 $f(x)=\frac{1}{2}(x^2-1)-\ln x$,对其求导得 $f'(x)=x-\frac{1}{x}=\frac{x^2-1}{x}$,于是得到 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减,在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,所以 $f(x)\geqslant f(1)=0$,因此 $f\left(\frac{3}{5}\right)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{9}{25}-1\right)-\ln\frac{3}{5}>0$,即 $\ln\frac{5}{3}>\frac{8}{25}$,所以 $a>c$;又 $\ln\frac{5}{3}=\frac{1}{2}\ln\frac{25}{9}<\frac{1}{2}\ln\frac{23}{7}$,即 $a<b$,故选 A.

法二:$a=\ln\frac{5}{3}=\frac{1}{2}\ln\frac{25}{9}>\frac{1}{2}\ln e=\frac{1}{2}>\frac{8}{25}=c$,$\ln\frac{5}{3}=\frac{1}{2}\ln\frac{25}{9}<\frac{1}{2}\ln\frac{23}{7}$,即 $a<b$,故选 A.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 7

解析：由条件知 $\vec{a}\cdot\left(\frac{1}{5}\vec{a}-\vec{b}\right)=\frac{1}{5}\vec{a}^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=5-(-2)=7$.

14. 64

解析：$\because a_1=1, a_n=\begin{cases}2a_{n-1}-1, n\text{ 为偶数}\\2a_{n-1}+2, n\text{ 为奇数}\end{cases}$,

$\therefore a_2=2a_1-1=1, a_3=2a_2+2=4, a_4=2a_3-1=7, a_5=2a_4+2=16$,

$a_6=2a_5-1=31, a_7=2a_6+2=64$，所以解下 7 个环所需的最少移动次数为 64.

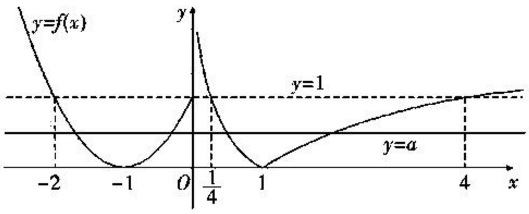
15. $\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$

解析：要使集合 A 中至少有 3 个元素，则元素 0,1,2 必属于集合 A，所以只需 $4\sin\theta>2$，即 $\sin\theta>\frac{1}{2}$，

又 $\theta\in[0,2\pi]$，解得 $\theta\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$.

16. $-\frac{31}{4}$

解析：由题意，当 $x\leqslant 0$ 时，$f(x)=(x+1)^2$；当 $0<x<1$ 时，$f(x)=-\log_4 x$；当 $x\geqslant 1$ 时，$f(x)=\log_4 x$. 作出函数 $f(x)$ 的图象，如下图所示，



易知 $f(x)$ 与直线 $y=1$ 有四个交点，分别为 $(-2,1),(0,1),\left(\frac{1}{4},1\right),(4,1)$，

因为 $f(x)=a$ 有四个不同的解 x_1,x_2,x_3,x_4 且 $x_1<x_2<x_3<x_4$，

所以 $-2\leqslant x_1<-1<x_2\leqslant 0$，且 $x_1+x_2=-2, \frac{1}{4}\leqslant x_3<1<x_4\leqslant 4$，

又 $f(x_3)=-\log_4 x_3=a, f(x_4)=\log_4 x_4=a$，

所以 $-\log_4 x_3=\log_4 x_4$，即 $\log_4 x_3+\log_4 x_4=\log_4(x_3\cdot x_4)=0$，则 $x_3\cdot x_4=1$.

所以 $x_4(x_1+x_2)+\frac{1}{x_3x_4^2}=-2x_4+\frac{1}{x_4}$，且 $1<x_4\leqslant 4$，

构造函数 $g(x)=-2x+\frac{1}{x}$，且 $1<x\leqslant 4$，

可知 $g(x)$ 在 $(1,4]$ 上单调递减，且 $g(4)=-2\times 4+\frac{1}{4}=-\frac{31}{4}$，

所以 $x_4(x_1+x_2)+\frac{1}{x_3x_4^2}$ 的最小值为 $-\frac{31}{4}$.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 解：(1) 由条件知 $f(0)=\frac{a}{2}+b=0$，$f(\log_2 3)=\frac{a}{2^{\log_2 3}+1}+b=\frac{a}{4}+b=1$，解得 $\begin{cases}a=-4\\b=2\end{cases}$， ……………… 3 分

所以函数 $y=f(x)$ 的解析式为 $f(x)=\frac{-4}{2^x+1}+2=\frac{2(2^x-1)}{2^x+1}$. ……………… 5 分

(2) 因 $2^x+1>1$，所以 $0<\frac{1}{2^x+1}<1$，$0>-\frac{4}{2^x+1}>-4$，$2>2-\frac{4}{2^x+1}>-2$，

故函数 $y=f(x)$ 的值域为 $(-2,2)$， ……………… 8 分

因 $\forall x\in\mathbf{R}$，都有 $f(x)<m$ 恒成立

所以只需 $m\geqslant 2$，实数 m 的取值范围是 $[2,+\infty)$. ……………… 10 分

18. 解：(1) 因点 C 在直线 AB 上，所以 $\overrightarrow{AC}/\!/\overrightarrow{AB}$，于是存在 $\lambda\in\mathbf{R}$，使 $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}$，即 $\overrightarrow{OC}=(1-\lambda)\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}$，又 $\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，所以 $x+y=1-\lambda+\lambda=1$； ……………… 2 分

因 $\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{AB}$，所以 $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}=(x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=0$，整理得 $x-y=0$， ……………… 4 分

所以 $x=y=\frac{1}{2}$. ……………… 6 分

(2) 因点 C 为 $\triangle OAB$ 的外心，所以 $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=(x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}^2$，

整理得 $10x+6y=5$， ……………… 8 分

同理由 $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}^2$ 得 $6x+10y=5$，所以 $x=y$， ……………… 9 分

所以 $\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}=(4x,4x)$，

又 $|\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}|$，于是 $(4x)^2+(4x)^2=(4x-1)^2+(4x-3)^2$，

解得 $x=\frac{5}{16}$，所以点 C 的坐标为 $\left(\frac{5}{4},\frac{5}{4}\right)$. ……………… 12 分

19. 解：(1) 由已知得当 $n\geqslant 2$，$n\in\mathbf{N}^*$ 时， ……………… 1 分

$2(\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}})=a_n=S_n-S_{n-1}=(\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}})(\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}})$，

又 $\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}>0$，所以 $\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}}=2$.

又 $\sqrt{S_1}=1$，所以数列 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是首项为 1，公差为 2 的等差数列， ……………… 2 分

所以 $\sqrt{S_n}=1+2(n-1)=2n-1$，$S_n=(2n-1)^2(n\in\mathbf{N}^*)$，

当 $n\geqslant 2$，$n\in\mathbf{N}^*$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(2n-1)^2-(2n-3)^2=8n-8$， ……………… 4 分

又 $a_1=S_1=1$ 不符合上式，

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=\begin{cases}1, n=1\\8n-8, n\geqslant 2\end{cases}$ ……………… 6 分

(2) 由 (1) 可知 $b_n=\frac{2}{\sqrt{S_nS_{n+1}}}=\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$， ……………… 7 分

于是 $b_n=\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}$， ……………… 8 分

所以 $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$

$=\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=1-\frac{1}{2n+1}=\frac{2n}{2n+1}$. ……………… 11 分

因此数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项的和 $T_n=\frac{2n}{2n+1}$. ……………… 12 分

20. 解：(1) 函数 $f(x)$ 的定义域 $[-\pi,\pi]$ 关于原点对称，

又 $f(-x)=2\sin|-x|+\cos(-2x)=2\sin|x|+\cos 2x=f(x)$，

所以函数 $f(x)$ 为偶函数. …… 2 分

当 $x\in[0,\pi]$ 时，$f(x)=2\sin x+\cos 2x=-2\sin^2x+2\sin x+1$

$=-2\left(\sin x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{2}$，

所以当 $\sin x=\dfrac{1}{2}$ 即 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 或 $\dfrac{5\pi}{6}$ 时，函数 $f(x)$ 的最大值为 $\dfrac{3}{2}$， …… 4 分

又函数 $f(x)$ 为偶函数，所以当 $x=\pm\dfrac{\pi}{6}$ 或 $x=\pm\dfrac{5\pi}{6}$ 时，函数 $f(x)$ 的最大值为 $\dfrac{3}{2}$. …… 6 分

(2) 当 $x\in[0,\pi]$ 时，$f(x)=-2\sin^2x+2\sin x+1$，

对其求导得 $f'(x)=-4\sin x\cos x+2\cos x=2\cos x(1-2\sin x)$ …… 8 分

要求函数的单调递增区间，当 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 时，$\cos x\geqslant 0$，只需 $1-2\sin x\geqslant 0$，解得 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{6}\right]$；

当 $x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ 时，$\cos x<0$，只需 $1-2\sin x\leqslant 0$，解得 $x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{5\pi}{6}\right]$. …… 11 分

综上函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的单调递增区间有 $\left[0,\dfrac{\pi}{6}\right]$，$\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{5\pi}{6}\right]$. …… 12 分

（注意，单调递增区间还可写成 $\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right)$（或 $\left[0,\dfrac{\pi}{6}\right)$，$\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right]$），$\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{5\pi}{6}\right]$（或 $\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{5\pi}{6}\right)$，$\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{5\pi}{6}\right)$），同样给分；其它解法参考给分）

21. 解：(1) 由正弦定理得 $\dfrac{\sin A}{\sin C\cos B}=\dfrac{\sin B}{\cos B}+\dfrac{\sin C}{\cos C}=\dfrac{\sin B\cos C+\cos B\sin C}{\cos B\cos C}=\dfrac{\sin(B+C)}{\cos B\cos C}=\dfrac{\sin A}{\cos B\cos C}$. … 3 分

因角 A,B 为锐角，所以 $\sin A>0,\cos B>0$，于是 $\sin C=\cos C$，即 $\tan C=1$， …… 4 分

又角 C 为锐角，则 $C=\dfrac{\pi}{4}$. …… 5 分

(2) 由余弦定理得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=a^2+b^2-\sqrt{2}ab$，于是 $a^2+b^2=4+\sqrt{2}ab$， …… 6 分

因 $\overrightarrow{CD}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})$，两边同时平方得 $\overrightarrow{CD}^2=\dfrac{1}{4}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})^2=\dfrac{1}{4}(\overrightarrow{CA}^2+2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CB}^2)$

$=\dfrac{1}{4}(a^2+b^2+\sqrt{2}ab)=\dfrac{1}{4}(4+2\sqrt{2}ab)=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}ab$ …… 7 分

由正弦定理得 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2\sqrt{2}$.

所以 $ab=8\sin A\sin B=8\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}-B\right)\sin B=8\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos B+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin B\right)\sin B$

$=4\sqrt{2}\sin B\cos B+4\sqrt{2}\sin^2B=4\sin\left(2B-\dfrac{\pi}{4}\right)+2\sqrt{2}$ …… 9 分

因 $\begin{cases}0<B<\dfrac{\pi}{2}\\0<A=\dfrac{3\pi}{4}-B<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$，解得 $\dfrac{\pi}{4}<B<\dfrac{\pi}{2}$，于是 $\sin\left(2B-\dfrac{\pi}{4}\right)\in\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right]$. …… 10 分

$ab\in(4\sqrt{2},4+2\sqrt{2}]$，$\overrightarrow{CD}^2\in(5,3+2\sqrt{2}]$，$|\overrightarrow{CD}|\in(\sqrt{5},\sqrt{2}+1]$.

所以中线 CD 长的取值范围为 $(\sqrt{5},\sqrt{2}+1]$. …… 12 分

22. 解：(1)定义域为$(0,+\infty)$，

对函数$f(x)$求导得$f'(x)=\frac{1}{x}-a$， ……………………………… 1分

当$a\leq 0$时，$f'(x)>0$，函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增； ……………………………… 2分

当$a>0$时，$f'(x)=\frac{1}{x}-a=\frac{1-ax}{x}$，令$f'(x)=0$，则$x=\frac{1}{a}$，于是函数$f(x)$在$\left(0,\frac{1}{a}\right)$上单调递增，在$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$上单调递减. ……………………………… 3分

综上，当$a\leq 0$时，函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增；

当$a>0$时，函数$f(x)$在$\left(0,\frac{1}{a}\right)$上单调递增，在$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$上单调递减. ……………………………… 4分

(2) 由(1)可知$a>0$，

要证$x_1^2x_2^3>\frac{256}{e^5}$，两边同时取自然对数，只需证明$2\ln x_1+3\ln x_2>8\ln 2-5$ ……………………………… 5分

因x_1,x_2是函数$f(x)$的两个零点，所以$\begin{cases}\ln x_1-ax_1+1=0\\ \ln x_2-ax_2+1=0\end{cases}$，即$\begin{cases}\ln x_1=ax_1-1\\ \ln x_2=ax_2-1\end{cases}$，

只需证明$a(2x_1+3x_2)-5>8\ln 2-5$，即证$a(2x_1+3x_2)>8\ln 2$，

又$a=\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}$，只需证$\frac{(2x_1+3x_2)(\ln x_1-\ln x_2)}{x_1-x_2}>8\ln 2$.

即证$\dfrac{\left(\frac{2x_1}{x_2}+3\right)\cdot\ln\frac{x_1}{x_2}}{\frac{x_1}{x_2}-1}>8\ln 2$

令$\frac{x_1}{x_2}=t$，则$t\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，只需证明$\frac{(2t+3)\cdot\ln t}{t-1}>8\ln 2$. ……………………………… 8分

构造函数$g(t)=\frac{(2t+3)\cdot\ln t}{t-1}$，$t\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

对其求导得$g'(t)=\dfrac{-5\ln t+2t-\frac{3}{t}+1}{(t-1)^2}$，

构造函数$h(t)=-5\ln t+2t-\frac{3}{t}+1$，$t\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

对其求导得$h'(t)=\frac{2t^2-5t+3}{t^2}=\frac{(t-1)(2t-3)}{t^2}>0$

所以函数$h(t)$在$\left(0,\frac{1}{2}\right)$上单调递增，于是$h(t)<h\left(\frac{1}{2}\right)=5\ln 2-4<0$，

所以$g'(t)<0$，函数$g(t)$在$\left(0,\frac{1}{2}\right)$上单调递减，

因此$g(t)>g\left(\frac{1}{2}\right)=\dfrac{4\ln\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}}=8\ln 2$，原不等式得证. ……………………………… 12分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。