赤峰市高三年级 4·20 模拟考试试题

理科数学答案

2023．04

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	B	C	D	B	A	C	A	B	C	D	A

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．-2.　14．60.　15．$\sqrt{6}\pi$．　16．17 或 44．

三、解答题：共 70 分．

（一）必考题：共 60 分．

17．（12 分）

选择条件①

解：（1）由已知得，

$$a_n=f(0)+f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)+f(1) \quad (1)$$

$$a_n=f(1)+f\left(\frac{n-1}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{2}{n}\right)+f\left(\frac{1}{n}\right)+f(0) \quad (2)$$ ……1 分

两式相加，得

$$2a_n=[f(0)+f(1)]+\left[f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]+\cdots+\left[f\left(\frac{n-1}{n}\right)+f\left(\frac{1}{n}\right)\right]+[f(1)+f(0)]$$ ……2 分

由 $f(x)$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 有 $f(x)+f(1-x)=1$，得

$$f(0)+f(1)=f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{n-1}{n}\right)=f\left(\frac{2}{n}\right)+f\left(\frac{n-2}{n}\right)=\cdots\cdots=1$$ ……4 分

$$\therefore a_n=\frac{n+1}{2}(n\in N^*)$$ ……5 分

由 $a_{n+1}-a_n=\frac{n+2}{2}-\frac{n+1}{2}=\frac{1}{2}$ 得，

数列 $\{a_n\}$ 是以 $a_1=1$ 为首项，$d=\frac{1}{2}$ 的等差数列． ……6 分

（2）由（1）知 $a_n=\frac{n+1}{2}$，$\therefore b_n=\frac{4}{(2a_n-1)^2}=\frac{4}{n^2}$ ……7 分

$$\therefore T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=4\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)$$ ……8 分

$$又\because\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n\times n}<\frac{1}{(n-1)\times n}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$$ ……10 分

$\therefore T_n \le 4\left(\frac{1}{1^2}+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=4\left(2-\frac{1}{n}\right)=8-\frac{4}{n}=S_n$ ……………11 分

即 $\therefore T_n \le S_n$ ……………………………………………………………………………………12 分

选择条件②

解：（1）由已知，对任意的 $p,q\in \mathrm{N}^*$ 都有 $a_{p+q}=a_p+a_q$，令 $p=n,q=1$ ……………1 分

则 $a_{n+1}-a_n=a_1=\frac{1}{2}$，……………………………………………………………………………2 分

故数列 $\{a_n\}$ 为以 $a_1=\frac{1}{2}$ 为首项，$d=\frac{1}{2}$ 为公差的 $A.P.$

……………………………………………………4 分

$\therefore a_n=a_1+(n-1)d=\frac{n}{2}$. ………………………………………………………………………6 分

（2）由（1）知 $a_n=\frac{n}{2}$，$\therefore b_n=\frac{4}{n^2}$ ………………………………………………………………7 分

$\therefore T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=4\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)$ ……………………………………8 分

又 $\because \frac{1}{n^2}=\frac{1}{n\times n}<\frac{1}{(n-1)\times n}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$ ……………………………………………10 分

$\therefore T_n \le 4\left(\frac{1}{1^2}+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=4\left(2-\frac{1}{n}\right)=8-\frac{4}{n}=S_n$ ……………11 分

即 $\therefore T_n \le S_n$ …………………………………………………………………………………12 分

18．（12 分）

解：（1）由频率分布直方图得，$5(0.001+0.005+0.015+0.017+a+0.04)=1$.

$\therefore a=0.022$. ………………………………………………………………………………1 分

销售价格的平均数

$=10\times0.22+20\times0.4+30\times0.17+40\times0.15+50\times0.05+60\times0.01=24.4$ ……………2 分

由频率分布直方图得，众数为 20（万元）. ……………………………………………3 分

$\because 0.22+0.28=0.5$

$\therefore$ 中位数 $=15+10\times\frac{0.28}{0.4}=22$（万元） ………………………………………………4 分

（2）$\because$ 比亚迪汽车在中国新能源汽车的总销量中占比约为 $\frac{1}{3}$， ……………………5 分

$\therefore X\sim B(3,\frac{1}{3})$，即 X 服从二项分布. ……………………………………………6 分

则，$P(X=0)=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$, ……………………………………………………………7 分

$P(X=1)=C_3^1\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{12}{27}=\dfrac{4}{9}$, ……………………………………………………………8 分

$P(X=2)=C_3^2\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{2}{9}$, ……………………………………………………………9 分

$P(X=3)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^3=\dfrac{1}{27}$.

所以，X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$

……………………………………………………………………………………10 分

$\therefore E\left(X\right)=3\times\dfrac{1}{3}=1.$ ……………………………………………………………11 分

其含义是：若从新能源车中随机地抽出 3 辆，平均有一辆是比亚迪汽车. ………………12 分

19.（12 分）

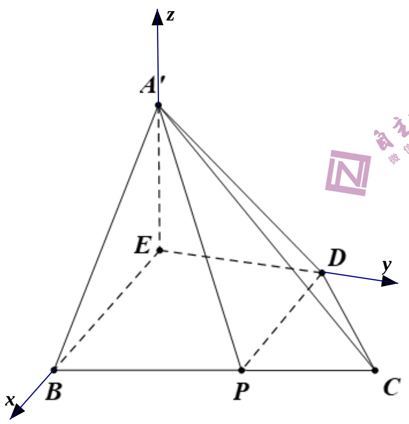
（1）证明：$\because\ DE\perp AB$

$\therefore$ 折叠后，$DE\perp A'E, DE\perp BE, A'E\cap BE=E$ ……………………………2 分

$\therefore DE\perp$ 平面$A'BE$ ……………………………………………………3 分

又 $DE\subset$ 平面 $BCDE$ ……………………………………………………4 分

$\therefore$ 平面 $A'BE\perp$ 平面 $BCDE$. ……………………………………………5 分



（2）解：由（1）知，$\angle A'EB$ 为二面角 $A'-ED-B$ 的平面角，

$\because$ 平面 $A'DE$ 与平面 $BCDE$ 成直二面角

$\therefore \angle A'BE=90^\circ$

即，$\therefore A'E\perp BE$.

$\therefore ED$、EB、EA' 两两互相垂直. ……………………………………………6 分

如图，以 E 为坐标原点，分别以 EB、ED、EA' 所在的直线为 x,y,z 轴，建立空间直角坐标系，则

$B(3,0,0),D(0,\sqrt{3},0),C(1,2\sqrt{3},0),A'(0,0,1)$ ……………………………………7 分

$\because$ 点 P 在线段 BC 上，

$\therefore$ 令 $\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}=(-2\lambda,2\sqrt{3}\lambda,0),\lambda\in[0,1]$，则 $P(3-2\lambda,2\sqrt{3}\lambda,0)$，

$\therefore\ \overrightarrow{A'D}=(0,\sqrt{3},-1),\overrightarrow{A'P}=(3-2\lambda,2\sqrt{3}\lambda,-1)$……………………………………8 分

由（1）知，$DE\perp$ 平面$A'BE$，则平面$A'BE$ 的法向量$\overrightarrow{n_1}=(0,1,0)$. ……………………9 分

设平面 $A'PD$ 的法向量 $\overrightarrow{n_2}=(x,y,z)$，由 $\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{A'D}=0\\ \overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{A'P}=0\end{cases}$ 得，

$\begin{cases}\sqrt{3}y-z=0\\ (3-2\lambda)x+2\sqrt{3}y-z=0\end{cases}$，令 $y=1$，则 $\overrightarrow{n_2}=\left(\dfrac{\sqrt{3}-2\sqrt{3}\lambda}{3-2\lambda},1,\sqrt{3}\right)$， …………………………10 分

设平面 $A'PD$ 和平面 $A'BE$ 所成二面角为 α，则 $\tan\alpha=\sqrt{3}$，

$\therefore\ \cos\alpha=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ \dfrac{\left|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\dfrac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}-2\sqrt{3}\lambda}{3-2\lambda}\right)^2+4}}=\dfrac{1}{2}$ ……………………………………………………11 分

$\therefore\ \dfrac{\sqrt{3}-2\sqrt{3}\lambda}{3-2\lambda}=0$，解得 $\lambda=\dfrac{1}{2}$. ……………………………………………………12 分

$\therefore$ 存在符合条件的点 P，恰好为线段 BC 的中点.

20.（12 分）已知函数 $f(x)=e^x,g(x)=a(x^2-x)(a\in R)$.

（1）在当 $a=-1$ 时，分别求 $f(x)$ 和 $g(x)$ 过点 $(0,0)$ 的切线方程；

（2）若 $f(x)+g(x)-\cos x\geq 0$，求 a 的取值范围.

解：（1）设过点 $(0,0)$ 的切线与 $f(x)$ 的切点为 (x_0,e^{x_0}).

由 $f'(x_0)=e^{x_0}$，则切线方程为 $y-e^{x_0}=e^{x_0}(x-x_0)$， ……………………………………1 分

把 $(0,0)$ 代入得，$x_0=1$，故切线方程为 $ex-y=0$. ……………………………………2 分

当 $a=-1$ 时，$g(x)=-x^2+x$，因 $(0,0)$ 在图象上，故 $(0,0)$ 即为切点，……………………3 分

故 $k=g'(0)=1$，则切线方程为 $x-y=0$.……………………………………………………4 分

（2）由 $f(x)+g(x)-\cos x\geq 0$，得 $h(x)=e^x+ax^2-ax-\cos x\geq 0$.

则 $h'(x)=e^x+2ax-a+\sin x$，则 $h''(x)=e^x+2a+\cos x$， ……………………………………5 分

①当 $a>1$ 时，$h''(x)=e^x+2a+\cos x>0$，所以 $h'(x)=e^x+2ax-a+\sin x$ 在 R 上为增函数.

$\because h'(0)=1-a<0, h'(1)=a+e+\sin 1>0$

$\therefore \exists x_0\in(0,1)$, 使$h'(x_0)=0$

故，当$x\in(-\infty,x_0)$时，$h'(x)<0, h(x)$单调递减，

当$x\in(0,x_0)$时，$h(x)<h(0)=0$，不符合题意. ……………………………………………………7 分

②当$a=1$时，$h(x)=e^x+x^2-x-\cos x$，$h'(x)=e^x+2x-1+\sin x$，

$\because h''(x)=e^x+2+\cos x>0$恒成立，

$\therefore h'(x)$在R上恒增，且$\therefore h'(0)=0$

故，当$x\in(-\infty,0)$时，$h'(x)<0, h(x)$单调递减，

当$x\in(0,+\infty)$时，$h'(x)>0, h(x)$单调递增.

$\therefore h_{\min}(x)=h(0)=0$，$h(x)\ge 0$恒成立，$\therefore a=1$.……………………………………………………9 分

③当$0<a<1$时，$h'(x)=e^x+2ax-a+\sin x$，

$h''(x)=e^x+2a+\cos x$在$x\in(-1,0)$上单调递增，且$h''(-1)=\dfrac{1}{e}+2a+\cos(-1)>0$，故

$h'(x)$在$x\in(-1,0)$上单调递增，又$h'(-1)=\dfrac{1}{e}-3a-\sin 1<0, h'(0)=1-a>0$，

则$\exists x_1\in(-1,0)$, 使$h'(x_1)=0$，

故，当$x\in(x_1,0)$时，$h'(x)>0, h(x)$单调递增，

当$x\in(x_1,0)$时, $h(x)<h(0)=0$，不符合题意. ……………………………………………………11 分

④当$a\le 0$时，由$h(-1)=\dfrac{1}{e}+2a-\cos 1<\dfrac{1}{e}+2a-\dfrac{1}{2}<0$，不符合题意.

综上，a的取值范围$\{1\}$.……………………………………………………………………………12 分

21．（12 分）

解（1）由已知得，$\begin{cases}\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}\\ bc=\sqrt{3}\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$，……………………………………………………………1 分

$\therefore a=2, b=\sqrt{3}, c=1$.……………………………………………………………………………2 分

故椭圆E的方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. ……………………………………………………………3 分

则$A(-2,0), B(2,0)$，令$P(x,y)$，

则$k_{PA}\cdot k_{PB}=\dfrac{y}{x+2}\cdot\dfrac{y}{x-2}=\dfrac{y^2}{x^2-4}=\dfrac{3\left(1-\dfrac{x^2}{4}\right)}{x^2-4}=-\dfrac{3}{4}$.……………………………………………4 分

（2）

①由（1）知，$k_1 \cdot k_{BM} = -\frac{3}{4}$，又 $k_1 = \frac{1}{3}k_2$

$\therefore k_2 \cdot k_{BM} = -\frac{9}{4}$. ……………………………………………………………………5 分

令 $M(x_1,y_1), N(x_2,y_2)$，则 $\frac{y_1y_2}{(x_1-2)(x_2-2)} = -\frac{9}{4}$ （*）……………………………6 分

设直线 MN 的方程为 $x = my + n$，与椭圆方程联立

$\begin{cases} x = my + n \\ 3x^2 + 4y^2 - 12 = 0 \end{cases}$ 得，$(3m^2+4)y^2 + 6mny + 3n^2 - 12 = 0$.

则

$\Delta = 48(4m^2 - n^2 + 4) > 0, y_1 + y_2 = -\frac{6mn}{3m^2+4}, y_1y_2 = \frac{3n^2-12}{3m^2+4}$. ……………………………7 分

（*）可化为

$4y_1y_2 = -9(x_1-2)(x_2-2) = -9(my_1+n-2)(my_2+n-2)$

$= -9\left[m^2y_1y_2 + (mn-2m)(y_1+y_2) + n^2 - 4n + 4\right]$

整理得 $n^2 - 3n + 2 = 0$，解得 $n = 1$ 或 $n = 2$（舍）.……………………………………………8 分

故直线 MN 的方程为 $x = my + 1$，过定点 $T(1,0)$.

（另解，可设直线方程为 $y = kx + m$，联立整理得

$m^2 + 3km + 2k^2 = 0 \Rightarrow m = -k$, 或 $m = -2k$（舍））

②由①知，直线 MN 过定点 $T(1,0)$，则

$|S_1 - S_2| = \frac{1}{2}\left||AT| - |BT|\right||y_1 - y_2| = \frac{1}{2}(3-1)|y_1-y_2| = |y_1 - y_2|$ ……………………9 分

由①知 $y_1 + y_2 = -\frac{6m}{3m^2+4}, y_1y_2 = \frac{-9}{3m^2+4}$

$\therefore |S_1 - S_2| = |y_1 - y_2| = \sqrt{(y_1+y_2)^2 - 4y_1y_2} = \frac{12\sqrt{m^2+1}}{3m^2+4}$ ……………………………10 分

令 $\sqrt{m^2+1} = t \geq 1, m^2 = t^2 - 1$，则

$|S_1 - S_2| = f(t) = \frac{12t}{3t^2+1} = \frac{12}{3t + \frac{1}{t}}$ ………………………………………………………11 分

因为 $3t + \frac{1}{t}$ 在 $[1, +\infty)$ 单调递增，故最大值为 $f(1) = 3$. 当 $t \to +\infty$ 时，$f(t) \to 0$.

$\therefore |S_1 - S_2|$ 的取值范围是 $(0, 3]$. ………………………………………………………12 分

（二）选考题：共 10 分.请考生在第 22、23 二题中任选一题做答，如果多做，则按所做的第一题计分．做答时，用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目对应的标号涂黑．

22．[选修 4-4：坐标系与参数方程]（本小题满分 10 分）

解（1）由 $t=x-1$ 代入 $y=1+2t$ 得，……1 分

$C_1: 2x-y-1=0$．……2 分

由 $\rho(1-\sin\theta)=1$ 得，$\rho=y+1$ ……3 分

两边平方，得 $x^2+y^2=(y+1)^2$……4 分

化简，得 C_2：$x^2=2y+1$……5 分

（2）点 $M(0,-1)$ 在直线 $C_1: 2x-y-1=0$ 上，……6 分

设直线 C_1 的倾斜角为 α，由斜率 $k=2$ 知，$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5},\cos\alpha=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$．

$\therefore$ 设直线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{5}}{5}t \\ y=-1+\dfrac{2\sqrt{5}}{5}t \end{cases}$ $(t$为参数$)$ ……7 分

代入 C_2：$x^2=2y+1$，得 $t^2-4\sqrt{5}t+5=0$……8 分

由 $\vartriangle>0, t_1+t_2=4\sqrt{5}, t_1t_2=5$ ……9 分

$|MA|\cdot|MB|=|t_1t_2|=5$……10 分

23．[选修 4-5：不等式选讲]（本小题满分 10 分）

解：（1）因为 $f(x)\le 3$ 的解集为 $[b,1]$，所以 $f(1)\le 3$，即 $3+|1+a|\le 3$，

得 $|1+a|\le 0$，故 $a=-1$．……1 分

则 $f(x)=|2x+1|+|x-1|$，

$\therefore$ ① $\begin{cases} x<-\dfrac{1}{2} \\ -3x\le 3 \end{cases} \Rightarrow -1\le x<-\dfrac{1}{2}$．……2 分

② $\begin{cases} -\dfrac{1}{2}\le x\le 1 \\ x+2\le 3 \end{cases} \Rightarrow -\dfrac{1}{2}\le x\le 1$． ……3 分

③ $\begin{cases} x>1 \\ 3x\le 3 \end{cases} \Rightarrow x\in\varnothing$．……4 分

综上，$f(x)\le 3$ 的解集为 $[-1,1]$，则 $b=-1$． ……5 分

（2）由（1）知$a=-1$，则$\dfrac{1}{2m}+\dfrac{2}{n}=2\left(m>0,n>0\right)$， ……………………………………6 分

故$2=\dfrac{1}{2m}+\dfrac{2}{n}\geq 2\sqrt{\dfrac{2}{2mn}}=\dfrac{2}{\sqrt{mn}}$， $mn\geq 1$， ……………………………………7 分

当且仅当$m=\dfrac{1}{2},n=2$时，等号成立. ……………………………………8 分

所以，$4m^2+n^2\geq 2\sqrt{4m^2n^2}=4mn\geq 4$， ……………………………………9 分

当且仅当$m=\dfrac{1}{2},n=2$时，等号成立. ……………………………………10 分