

参考答案

一、单选

BDBA CBAA

二、不定项选择

9. ABD 10. ACD 11. ABD 12. AC

三、填空

13. $\omega = 1 + i$ (答案不唯一, 满足 $\omega = a + ai$ ($a \in \mathbb{R}$) 均可)

14. $\frac{1}{3}$ 15. $\frac{1}{4}$ 16. $[1, \frac{9}{2})$

四、解答题

17. 解析 (1) 因为 $\vec{a} = (-1, 2)$, $\vec{b} = (1, -4)$, 所以

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}, |\vec{b}| = \sqrt{1^2 + (-4)^2} = \sqrt{17}, \vec{a} \cdot \vec{b} = -1 - 8 = -9, \dots\dots 2 \text{ 分}$$

又 $k\vec{a} + \vec{b}$ 与 $\vec{a} - \vec{b}$ 垂直, 所以

$$(k\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = k\vec{a}^2 + (1-k)\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b}^2 = 5k - 9(1-k) - 17 = 0, \dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{解得 } k = \frac{13}{7}; \dots\dots 5 \text{ 分}$$

(2) 因为 $4\vec{a} + \vec{b} = 4(-1, 2) + (1, -4) = (-3, 4)$, $\vec{a} + \vec{b} = (-1, 2) + (1, -4) = (0, -2) \dots\dots 7 \text{ 分}$

$$\text{所以 } \cos \theta = \frac{(4\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})}{|4\vec{a} + \vec{b}| \cdot |\vec{a} + \vec{b}|} = \frac{0 - 8}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2} \times 2} = -\frac{4}{5} \dots\dots 10 \text{ 分}$$

18. 解析 (1) $\because \cos \alpha = \frac{1}{7}$ 且 $0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$,

$$\therefore \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{4\sqrt{3}}{7}, \dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\therefore \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 4\sqrt{3}, \dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\therefore \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = -\frac{8\sqrt{3}}{47}; \dots\dots 6 \text{ 分}$$

(2) $\because 0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$,

$$\therefore 0 < \alpha - \beta < \frac{\pi}{2}, \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{又} \because \cos(\alpha - \beta) = \frac{13}{14},$$

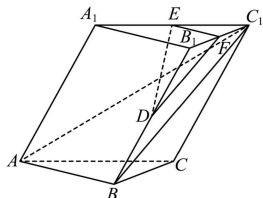
$$\therefore \sin(\alpha - \beta) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha - \beta)} = \frac{3\sqrt{3}}{14}, \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\cos \beta = \cos[\alpha - (\alpha - \beta)] = \cos \alpha \cos(\alpha - \beta) + \sin \alpha \sin(\alpha - \beta)$$

$$= \frac{13 + 4\sqrt{3} \times 3\sqrt{3}}{7 \times 14} = \frac{1}{2}, \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } \beta = \frac{\pi}{3} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

19. 解析 (1) 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AB \parallel A_1B_1$, 取 B_1C_1 中点 F , 连接 DF , EF ,



$\because D$ 和 E 分别是 BB_1 和 A_1C_1 的中点,

$\therefore DF \parallel BC_1, EF \parallel A_1B_1, \therefore EF \parallel AB$,

又 $DF \not\subset$ 面 ABC_1 , $BC_1 \subset$ 面 ABC_1 , 且 $EF \not\subset$ 面 ABC_1 , $AB \subset$ 面 ABC_1 ,

$\therefore DF \parallel$ 面 ABC_1 , $EF \parallel$ 面 ABC_1 , 又 $DF \cap EF = F$, $DE, EF \subset$ 面 DEF ,

$\therefore$ 面 $DEF \parallel$ 平面 ABC_1 , 而 $DE \subset$ 面 DEF , 故直线 $DE \parallel$ 平面 ABC_1 . $\dots\dots 6 \text{ 分}$

(2) $\because$ 直线 $DE \parallel$ 平面 ABC_1 ,

$$\therefore V_{D-ABC_1} = V_{E-ABC_1}, \text{ 又 } \angle A_1AC = 60^\circ,$$

$$\text{所以平行四边形 } ACC_1A_1 \text{ 边 } AC \text{ 上的高 } h' = 2 \sin 60^\circ = \sqrt{3}, \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{由 } B \text{ 到面 } ACC_1A_1 \text{ 的高 } h_B = \sqrt{3},$$

$$\text{则 } V_{E-ABC_1} = V_{B-AEC_1} = \frac{1}{3} S_{\triangle AEC_1} \cdot h_B = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} = \frac{1}{2}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

20. 解析: (1) 在锐角 $\triangle ABC$ 中, $(b-a)(b+a) + ac \cos B = \frac{2\sqrt{3}}{3} S$, 由余弦定理

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac},$$

$$\text{得 } b^2 - a^2 + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3} S, \text{ 即 } \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3} S, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{又 } S = \frac{1}{2} bc \sin A, \quad b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \cos A,$$

$$\text{因此 } bc \cos A = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2} bc \sin A, \text{ 有 } \tan A = \sqrt{3}, \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

而 $0 < A < \frac{\pi}{2}$, 解得 $A = \frac{\pi}{3}$, 所以 $A = \frac{\pi}{3}$5 分

(2) 由 (1) 知, $A = \frac{\pi}{3}$, $B = \frac{2\pi}{3} - C$,

由正弦定理得: $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} = \frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 4$, 即 $b = 4\sin B, c = 4\sin C$,

则 $S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2} \cdot 4\sin B \cdot 4\sin C \cdot \sin A = 4\sqrt{3}\sin B\sin C = 4\sqrt{3}\sin(\frac{2\pi}{3} - C)\sin C$ 7 分

$= 4\sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C + \frac{1}{2}\sin C)\sin C = 4\sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C\sin C + \frac{1}{2}\sin^2 C)$

$= 4\sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sin 2C}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \cos 2C}{2}) = 2\sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2C - \frac{1}{2}\cos 2C) + \sqrt{3}$

$= 2\sqrt{3}\sin(2C - \frac{\pi}{6}) + \sqrt{3}$,10 分

又 $\triangle ABC$ 是锐角三角形, 则有 $\begin{cases} 0 < C < \frac{\pi}{2} \\ 0 < \frac{2\pi}{3} - C < \frac{\pi}{2} \end{cases}$, 即 $\frac{\pi}{6} < C < \frac{\pi}{2}$, 亦即 $\frac{\pi}{6} < 2C - \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{6}$,

于是 $\frac{1}{2} < \sin(2C - \frac{\pi}{6}) \leq 1$, $2\sqrt{3} < S \leq 3\sqrt{3}$,

所以 S 的取值范围是 $(2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}]$12 分

21、【解析】

详解: (1) 若选①: 垂直.

因为 $AD = \sqrt{7}$, 在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中, $BC = 2$, $CD = 1$, 可得 $BD = \sqrt{3}$,1 分

又由 $AB = 2$, 所以 $AB^2 + BD^2 = AD^2$, 所以 $AB \perp BD$,2 分

因为 $AB \perp BC$, 且 $BC \cap BD = B$, $BC, BD \subset \text{平面 } CBD$, 所以 $AB \perp \text{平面 } CBD$,3 分

又因为 $CD \subset \text{平面 } CBD$, 所以 $AB \perp CD$,4 分

又由 $CD \perp BD$, $AB \cap BD = B$ 且 $AB, BD \subset \text{平面 } ABD$, 所以 $CD \perp \text{平面 } ABD$,5 分

又因为 M, N 分别为 AC, AD 中点, 所以 $MN \parallel CD$, 所以 $MN \perp \text{平面 } ABD$,6 分

若选②: 垂直.

由平面 $ABC \perp \text{平面 } BCD$, 平面 $ABC \cap \text{平面 } BCD = BC$,

因为 $AB \perp BC$, 且 $AB \subset \text{平面 } ABC$, 所以 $AB \perp \text{平面 } CBD$,3 分

又由 $CD \subset \text{平面 } CBD$, 所以 $AB \perp CD$,4 分

因为 $CD \perp BD$, $AB \cap BD = B$ 且 $AB, BD \subset \text{平面 } ABD$, 所以 $CD \perp \text{平面 } ABD$,5 分

又因为 M, N 分别为 AC, AD 中点, $MN \parallel CD$, 所以 $MN \perp \text{平面 } ABD$6 分

(2) 取 AB 中点 E , 连接 ME, DM, DE ,

因为 M, E 分别为 AC, AB 边中点, 所以 $ME \parallel BC$,7 分

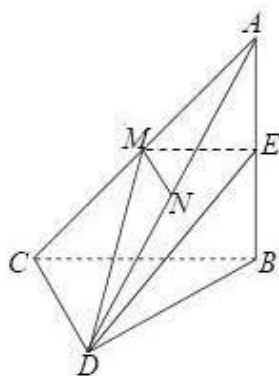
所以 $\angle EMD$ 或其补角为直线 DM 和 BC 所成的角.

在 $\triangle ADC$ 中, $CD=1$, $AD=\sqrt{7}$, $AD \perp CD$, 所以 $AC=2\sqrt{2}=2DM$, $\therefore DM=\sqrt{2}$ 9 分

又 $ME=1, DE=\sqrt{BD^2+BE^2}=\sqrt{3+1}=2$,10 分

由余弦定理可得: $\cos \angle EMD = \frac{1+2-4}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$,11 分

所以直线 DM 和 BC 所成的角的余弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$,12 分



22. 解析: (1) 由题意, 函数 $f(x) = \sqrt{3}\sin(\omega x + \varphi) - \cos(\omega x + \varphi) = 2\sin\left(\omega x + \varphi - \frac{\pi}{6}\right)$,1 分

因为函数 $f(x)$ 图象的相邻两对称轴间的距离为 $\frac{\pi}{2}$, 所以 $T = \pi$, 可得 $\omega = 2$,2 分

又由函数 $f(x)$ 为奇函数, 可得 $f(0) = 2\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right) = 0$,

所以 $\varphi - \frac{\pi}{6} = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 因为 $0 < \varphi < \pi$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{6}$,3 分

所以函数 $f(x) = 2\sin 2x$,

令 $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 解得 $\frac{\pi}{4} + k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$,

函数 $f(x)$ 的递减区间为 $\left[\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi\right], k \in \mathbb{Z}$,4 分

再结合 $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, 可得函数 $f(x)$ 的递减区间为 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$,5 分

(2) 将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 可得 $y = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象.

再把横坐标缩小为原来的 $\frac{1}{2}$ ，得到函数 $y = g(x) = 2\sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象，

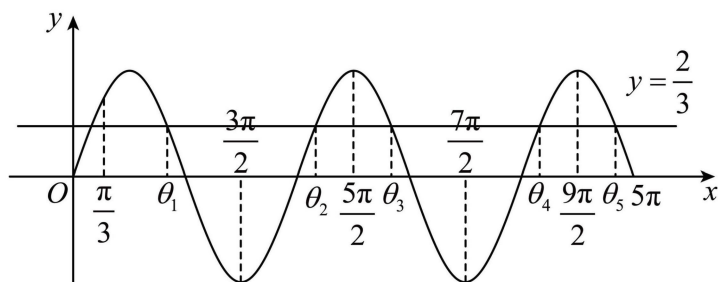
由方程 $g(x) = \frac{4}{3}$ ，即 $2\sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{4}{3}$ ，

即 $\sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{3}$ ，

因为 $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}\right]$ ，可得 $4x - \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{3}, 5\pi\right]$ ，

设 $\theta = 4x - \frac{\pi}{3}$ ，其中 $\theta \in \left[\frac{\pi}{3}, 5\pi\right]$ ，即 $\sin\theta = \frac{2}{3}$ ，.....7分

结合正弦函数 $y = \sin\theta$ 的图象，



可得方程 $\sin\theta = \frac{2}{3}$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{3}, 5\pi\right]$ 有5个解，即 $n = 5$ ，

其中 $\theta_1 + \theta_2 = 3\pi, \theta_2 + \theta_3 = 5\pi, \theta_3 + \theta_4 = 7\pi, \theta_4 + \theta_5 = 9\pi$ ，.....9分

即 $4x_1 - \frac{\pi}{3} + 4x_2 - \frac{\pi}{3} = 3\pi, 4x_2 - \frac{\pi}{3} + 4x_3 - \frac{\pi}{3} = 5\pi, 4x_3 - \frac{\pi}{3} + 4x_4 - \frac{\pi}{3} = 7\pi,$

$4x_4 - \frac{\pi}{3} + 4x_5 - \frac{\pi}{3} = 9\pi$ ，

解得 $x_1 + x_2 = \frac{11\pi}{12}, x_2 + x_3 = \frac{17\pi}{12}, x_3 + x_4 = \frac{23\pi}{12}, x_4 + x_5 = \frac{29\pi}{12}$ ，.....11分

所以 $x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \cdots + 2x_4 + x_5 = (x_1 + x_2) + (x_2 + x_3) + (x_3 + x_4) + (x_4 + x_5) = \frac{20\pi}{3}$12分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线