高三理科数学

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1.已知 a,b$\in$**R**,复数 $z_1=a+i,z_2=2-bi$(i 为虚数单位),若 $z_1=\overline{z_2}$,则 a+b=

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

2.已知全集 U=**R**,集合 $A=\{x\mid x\le 3\},B=\{x\mid x^2-6x+5\le 0\}$,则 $(\complement_R A)\cap B=$

A.[1,3]　　B.(3,5]　　C.[3,5)　　D.[1,3)

3.若双曲线 $x^2-\frac{y^2}{b}=1(b>0)$ 的虚轴长为 $\sqrt{3}$,则其渐近线的方程是

A.y=±3x　　B.$y=\pm\sqrt{3}x$　　C.$y=\pm\frac{3}{2}x$　　D.$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}x$

4.下列说法正确的是

A."$\forall x<1,\frac{1}{x}>1$"的否定为"$\exists x_0\ge 1,\frac{1}{x_0}\le 1$"

B."$A>B$"是"$\sin A>\sin B$"的必要条件

C.若 x<1,则 $x^2<1$ 的逆命题为真命题

D.若"$x>a$"是"$\log_2 x>2$"的充分条件,则 a≤4

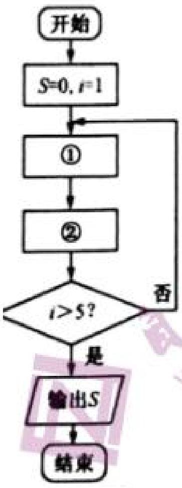
5.已知 f(x)是定义域为 **R** 的奇函数,当 x≥0 时,$f(x)=2^x-1$.若 $f(x_0)>-1$,则 x_0 的取值范围是

A.(-2,+∞)　　B.(-∞,-2)　　C.(-1,+∞)　　D.(-∞,-1)

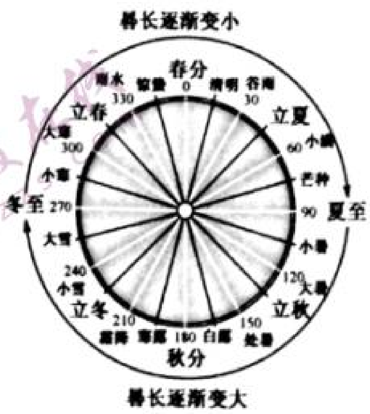
6.为了计算 S=3+33+333+3333+33333,设计了如图所示的程序框图,则①和②处的框内可以分别填入

A．$S=S+3\times 10^{i-1}$ 和 i=i+2　　B．$S=S+(10^i-1)\div 3$ 和 i=i+1

C.S=S+3×10^i 和 i=i+3　　D.$S=S+(10^{i-1}-1)\div 3$ 和 i=i+1



第 6 题图

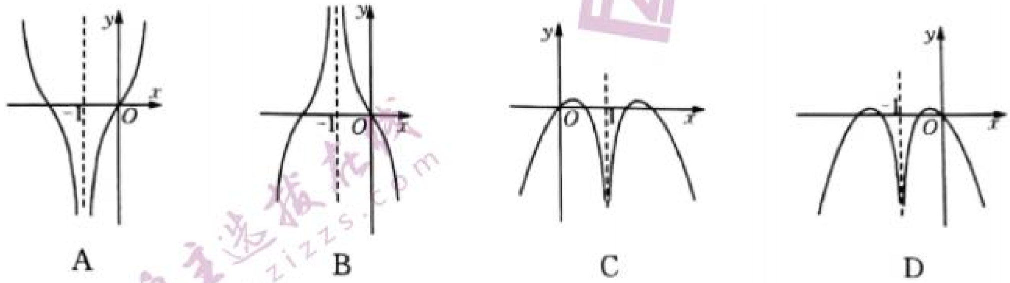


第 7 题图

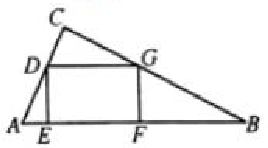
7.“春雨惊春清谷天,夏满芒夏暑相连,秋处露秋寒霜降,冬雪雪冬小大寒”,这首二十四节气歌,记录了中国古代劳动人民在田间耕作长期经验的积累和智慧.“二四节气”已经被列入联合国教科文组织人类非物质文化遗产代表作名录。我国古代天文学和数学著作《周髀算经》中记载:一年有二十四个节气,每个节气的晷长损益相同(晷是按照日影测定时刻的仪器,晷长即为所测量影子的长度)。二十四节气及晷长变化如图所示,相邻两个节气晷长减少或增加的量相同,周而复始已知每年冬至的晷长为一丈三尺五寸,夏至的晷长为一尺五寸(一丈等于十尺,一尺等于十寸),则晷长为七尺五寸时,对应的节气为

A.春分、秋分　　B 雨水、处暑　　C.立春、立秋　　D.立冬、立夏

8.函数 $f(x)=\ln|x+1|-x^2-2x$ 的图象大致为



9.在△ABC 中, $\angle C=\frac{\pi}{2}$,AC=3,BC=4,点 D,G 分别在边 AC,BC 上,点 E,F 在 AB 上,且四边形 DEFG 为矩形(如图所示),当矩形 DEFG 的面积最大时,在△ABC 内任取一点,该点取自矩形 DEFG 内的概率为



A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{4}{5}$

10.已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)+b(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 的部分图象如图所示,给出下列结论:

①A=2,ω=1,b=-1;

②A=ω=2,b=-1;

③点 $(\frac{2\pi}{3},-1)$ 为 f(x)图象的一个对称中心;

④f(x)在 $[-\frac{23\pi}{12},-\frac{17\pi}{12}]$ 上单调递减。

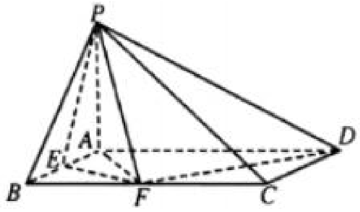
其中所有正确结论的序号是

A.①②　　B.②③　　C.③④　　D.②④

11.已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F,准线为 l,过 F 的直线与抛物线 C 交于点 A,B,与 l 交于点 D,若 $\overline{DB}=4\overline{BF}$, |AF|=4,则 p=

A.2　　B.3　　C.4　　D.6

12.《九章算术》卷五《商功》中描述,几何体"阳马"为"底面为矩形,一棱垂直于底面的四棱锥".现有阳马P-ABCD(如图),PA⊥平面ABCD,PA=AB=1,AD=3,点E,F分别在AB,BC上,当空间四边形PEFD的周长最小时,直线PA与平面PFD所成角的正切值为



A.$\frac{3\sqrt{5}}{5}$　　B.$\frac{\sqrt{5}}{5}$　　C.$\frac{3\sqrt{3}}{2}$　　D.$2\sqrt{3}$

二、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分。

13.已知向量a,b,满足|a|=1,|b|=2,当$|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=2\sqrt{3}$时,向量a,b的夹角为_____.

14.已知$(1+x)(2-x)^9=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{10}x^{10}$,则$a_1+a_2+\cdots+a_9=$____.

15.已知圆锥的顶点为P,底面圆心为O,底面半径为$\sqrt{3}$,,高为1,E和F是底面圆周上两点,则圆锥PO的侧面展开图的圆心角为____;△PEF面积的最大值为____.(本小题第一空2分,第二空3分)

16.已知数列$\{a_n\}$是公差为d的等差数列,设$c_n=2^{a_1}+2^{a_2}+2^{a_3}+\cdots+2^{a_n}$,若存在常数m,使得数列$\{c_n+m\}$为等比数列,则m的值为____.

三、解答题:共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17~21题为必考题,每个试题考生都必须作答。第22、23题为选考题,考生根据要求作答。

(一)必考题:共60分。

17.(本小题满分12分)

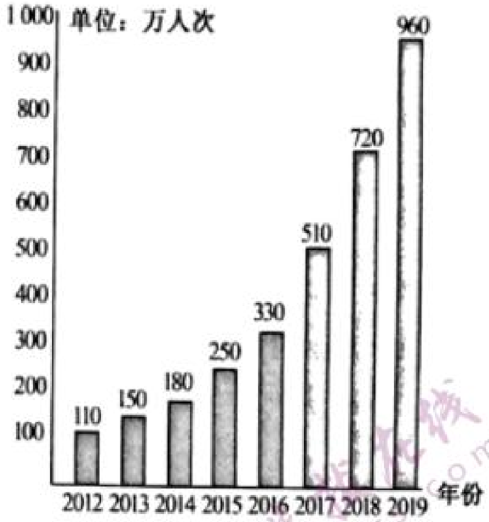
在△ABC中,角A,B,C的对边分别为a,b,c,已知a=2,b=$\sqrt{5}$,B=2A.

(1)求sinA的值;

(2)求△ABC的面积.

18.(本小题满分12分)

下图是M市旅游局宣传栏中的一幅标题为"2012~2019年我市接待游客人次"的统计图。根据该统计图提供的信息解决下列问题:



(1)求 M 市在所统计的这 8 年中所接待游客人次的平均数和中位数;

(2)在所统计的 8 年中任取两年,记其中接待游客人次不低于平均数的年份数为 X,求 X 的分布列和数学期望 E(X);

(3)从该统计图上看,从 2016 年开始,M 市接待游客的人次呈直线上升趋势,请你用线性回归分析的方法预测到 2021 年 M 市接待游客的人次.

①参考公式:对于一组数据 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$, 其回归直线 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 的斜率和截距的最小二乘法估计分别为

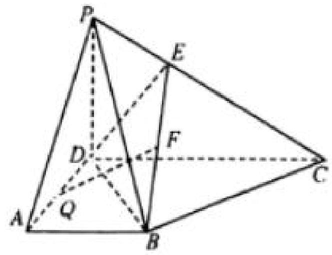
$$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\overline{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2},\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}.$$

②参考数据:

$x'=x-2016$	0	1	2	3
$y'=y-630$	-300	-120	90	330

19.(本小题满分 12 分)

如图,在四棱锥 P-ABCD 中,四边形 ABCD 是梯形,AB∥CD,CD=2AB,点 E 是棱 PC 上的动点(不含端点).F,Q 分别为 BE,AD 的中点.



(1)求证:QF//平面 PCD;

(2)若 PD⊥平面 ABCD,AD⊥DC,PD=AD=AB=1, $\overline{PC}=3\overline{PE}$, 求二面角 P-BD-E 的余弦值.

20.(本小题满分 12 分)

已知点 A(-2,0),B(2,0),动点 S(x,y)满足直线 AS 与 BS 的斜率之积为$-\frac{3}{4}$. 记动点 S 的轨迹为曲线 C.

(1)求曲线 C 的方程,并说明曲线 C 是什么样的曲线;

(2)设 M,N 是曲线 C 上的两个动点,直线 AM 与 NB 交于点 P,且∠MAN=90°.

①求证:点 P 在定直线上;

②求证:直线 NB 与直线 MB 的斜率之积为定值.

21.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=e^{x}-2ae^{-x}-(2+a)x(a\in\mathbf{R})$.

(1)讨论函数 f(x)的单调性;

(2)求证:当$\frac{2}{5}\le a\le\frac{1}{2}$时,函数 f(x)有且只有三个零点

(参考数据: $e\approx2.72, e^{2}\approx7.39, e^{3}\approx20.01$)

(二)选考题:共 10 分。请考生在第 22、23 两题中任选一题作答。如果多做,则按所做的第一题计分。

22. (本小题满分 10 分)选修 4-4:坐标系与参数方程

在平面直角坐标系中,直线 l 过点 P(4,0),倾斜角为α.以直角坐标系的坐标原点为极点、x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系,曲线 C 的极坐标方程为 ρ =8sinθ.

(1)写出直线 l 的一个参数方程,并求曲线 C 的直角坐标方程;

(2)设直线 l 与曲线 C 交于不同两点 M ,N,求|PM|+|PN|的最大值.

23.(本小题满分 10 分)选修 4- 5:不等式选讲

设不等式|x-1|+2|x+1|≤x+7 的解集为 M.

(1)求集合 M;

(2)设 m 是 M 中元素的最大值,正数 a,b,x,y 满足 $a+b=\frac{m}{3}$,$x+y=m$. 求证:$\sqrt{a}$

高三理科数学参考答案、提示及评分细则

1. C　由 $z_1=\overline{z_2}$，得 $a+\mathrm{i}=2+b\mathrm{i}$，所以 $a=2,b=1$，所以 $a+b=3$. 故选 C.

2. B　因为 $A=(-\infty,3]$，$B=[1,5]$，所以 $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=(3,5]$. 故选 B.

3. D　虚轴长为 $2\sqrt{b}=\sqrt{3}$，解得 $\sqrt{b}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，则渐近线方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{b}}{1}x$，即 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}x$. 故选 D.

4. C　对于 A，$\forall x<1,\frac{1}{x}>1$ 的否定为 $\exists x_0<1,\frac{1}{x_0}\leqslant1$，故 A 错误；对于 B，“$A>B$”是“$\sin A>\sin B$”的既不充分也不必要条件，故 B 错误；对于 C，若 $x<1$，则 $x^2<1$ 的逆命题为若 $x^2<1$，则 $x<1$，因为 $x^2<1$ 时 $-1<x<1$，所以 $x<1$ 成立，故 C 正确；对于 D，由 $\log_2x>2$ 得 $x>1$，若 $x>a$ 是 $\log_2x>2$ 的充分条件，则 $a\geqslant4$，故 D 错误. 故选 C.

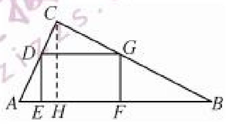
5. C　由题意，得 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是增函数，因为 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，又 $f(1)=1$，则 $f(-1)=-f(1)=-1$，所以 $f(x_0)>f(-1)$，所以 $x_0>-1$，即 x_0 的取值范围是 $(-1,+\infty)$. 故选 C.

6. B　i 为计数变量，由 $i>5$?，得执行了 5 次运算，且是逐步进行的，所以 $i=i+1$，可排除 A 和 C；又因为第一次求和为 $S=3$，则可排除 D. 故选 B.

7. A　设从夏至开始到冬至，各节气的晷长分别为 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{13}$，则夏至时晷长为 $a_1=15$(寸)，冬至时晷长为 $a_{13}=135$(寸)，由每个节气晷长损益相同可知，$\{a_n\}$ 为等差数列，设公差为 d，则 $a_{13}=a_1+12d=15+12d=135$，解得 $d=10$，所以 $a_n=15+(n-1)\times10=10n+5$，由 $a_n=75$，得 $n=7$，即晷长七尺五寸对应的节气为从夏至开始的第七个节气，即秋分；设从冬至开始到夏至，每个节气的晷长为 b_n，则 $b_n=135+(n-1)\cdot(-10)=-10n+145$，由 $b_n=75$，得 $n=7$，即晷长七尺五寸对应的节气是从冬至开始的第七个节气，即春分. 所以晷长为七尺五寸时，对应的节气为春分和秋分. 故选 A.

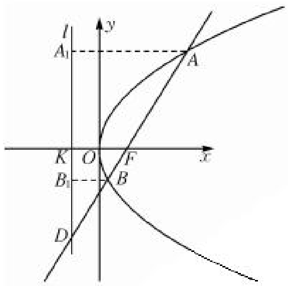
8. D　$f(x)=\ln|x+1|-x^2-2x=\ln|x+1|-(x+1)^2+1$，$f(x)$ 的图象是由函数 $g(x)=\ln|x|-x^2+1$ 的图象向左平移一个单位长度得到，由于 $g(x)=\ln|x|-x^2+1$ 为偶函数，故 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=-1$ 对称. 又 $x>0$ 时，$g(x)=\ln x-x^2+1$，$g'(x)=\frac{1}{x}-2x=\frac{1-2x^2}{x}$，所以在 $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 上，$g'(x)>0$，在 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$ 上，$g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 存在极值点，所以 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上存在极值点. 综上可知，只有选项 D 符合条件. 故选 D.

9. A　由题意知：$AB=5$，AB 边上的高为 $\frac{12}{5}$. 设 $DE=x$，$0<x<\frac{12}{5}$，因为 $DG/\!/AB$，所以 $\frac{\frac{12}{5}-x}{\frac{12}{5}}=\frac{DG}{5}$，所以 $DG=\frac{5(12-5x)}{12}$，所以矩形 $DEFG$ 的面积为 $x\cdot\frac{5(12-5x)}{12}=\frac{(12-5x)\cdot5x}{12}\leqslant\frac{1}{12}\times\left(\frac{12-5x+5x}{2}\right)^2=3$（当且仅当 $12-5x=5x$，即 $x=\frac{6}{5}$ 时等号成立），又 $\triangle ABC$ 的面积为 6，故所求的概率为 $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$. 故选 A.

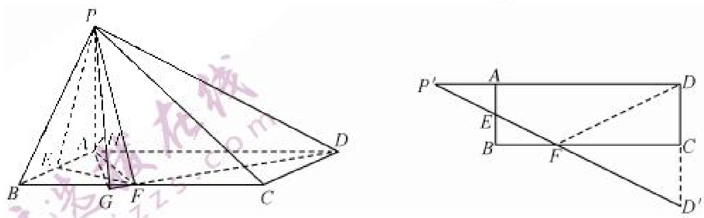


10. D　由图象可知，$A=\frac{1-(-3)}{2}=2$，$b=\frac{1+(-3)}{2}=-1$. 再由 $\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{12}=\frac{1}{4}\times\frac{2\pi}{\omega}$，得 $\omega=2$，故①不正确，②正确；由于 $\left(\frac{\pi}{3},-1\right)$ 为 $f(x)$ 图象的一个对称中心，又 $f(x)$ 的最小正周期为 π，故其全部的对称中心为 $\left(\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2},-1\right)(k\in\mathbf{Z})$，当 $k=1$ 时，对称中心为 $\left(\frac{5\pi}{6},-1\right)$，故③错误；由于 $\left[\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{12}\right]$ 为 $f(x)$ 的单调递减区间，$f(x)$ 的最小正周期为 π，故 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[\frac{\pi}{12}+k\pi,\frac{7\pi}{12}+k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$，当 $k=-2$ 时即为 $\left[-\frac{23\pi}{12},-\frac{17\pi}{12}\right]$，故④正确. 故选 D.

11. B　如图，设准线与 x 轴的交点为 K，作 $AA_1\perp l$，$BB_1\perp l$，垂足分别为 A_1,B_1，则 $BB_1/\!/FK/\!/AA_1$，又 $\overrightarrow{DB}=4\overrightarrow{BF}$，所以 $|BB_1|=|BF|=\frac{1}{4}|DB|$，设 $\angle DBB_1=\theta$，则 $\cos\theta=\frac{|BB_1|}{|DB|}=\frac{1}{4}$. 因为 $BB_1/\!/AA_1$，所以 $\angle FAA_1=\angle DBB_1=\theta$，所以 $\cos\angle FAA_1=\frac{1}{4}$，所以 $|KF|=|AA_1|-\frac{1}{4}|AF|=4-1=3$，即 $p=3$. 故选 B.



12. A　把平面 PAB 展开到与平面 $ABCD$ 共面的 $P'AB$ 的位置(如图)，延长 DC 到 D'，使得 $CD'=1$，则 $DF=D'F$，因为 PD 的长度为定值，故只需 $PE+EF+FD=P'E+EF+FD'$ 最小，只需 P',E,F,D' 四点共线，因为 $P'D=4$，$DD'=2$，$\dfrac{CF}{P'D}=\dfrac{CD'}{DD'}$，所以 $CF=2$.

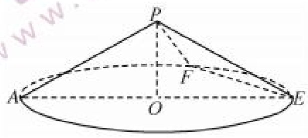


过点 A 作 $AG\perp FD$，垂足为 G，连接 PG，则 $FD\perp$ 平面 PAG，所以平面 $PAG\perp$ 平面 PFD，过 A 作 $AH\perp PG$，垂足为 H，则 $AH\perp$ 平面 PFD，故$\angle APG$ 即为直线 PA 与平面 PFD 所成的角. 因为$\triangle AFD$ 的面积为 $\dfrac{3}{2}$，$FD=\sqrt{5}$，所以 $\dfrac{1}{2}\times\sqrt{5}\times AG=\dfrac{3}{2}$，所以 $AG=\dfrac{3}{\sqrt{5}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$，所以 $\tan\angle APG=\dfrac{AG}{AP}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$. 故选 A.

13. $\dfrac{2\pi}{3}$　设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，则 $|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{4\boldsymbol{a}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{4-8\cos\theta+4}=2\sqrt{3}$，解得 $\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$，又 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$，所以 $\theta=\dfrac{2\pi}{3}$.

14. -509　令 $x=1$，得 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_9+a_{10}=2$，令 $x=0$，得 $a_0=2^9=512$，由二项式定理知 x^{10} 的系数为 -1，所以 $a_1+a_2+\cdots+a_9=2-512-(-1)=-509$.

15. $\sqrt{3}\pi$(2 分)　2(3 分)　设侧面展开图的圆心角为 θ，则 $\theta=\dfrac{l}{r}=\dfrac{2\times\sqrt{3}\times\pi}{2}=\sqrt{3}\pi$；如图，$PE$ 和 PF 都是圆锥 PO 的母线，则 $PE=PF=2$，设圆锥 PO 经过 PO，PE 的截面为$\triangle PAE$，在直角三角形 POE 中，$\angle OPE=60°$，可得$\triangle PAE$ 的顶角为 $120°$，所以$\triangle PEF$ 面积的最大值为 $\dfrac{1}{2}\times PE\times PF\sin 90°=2$.



16. $\dfrac{2^{a_1}}{2^d-1}$　当 $d=0$ 时，$c_n=2^{a_1}+2^{a_2}+2^{a_3}+\cdots+2^{a_n}=n\cdot 2^{a_1}$. 若存在常数 m，使得数列$\{c_n+m\}$为等比数列，则 $(c_n+m)^2=(c_{n-1}+m)(c_{n+1}+m)(n\geqslant 2)$. 记 $2^{a_1}=t$，则有 $(nt+m)^2=[(n-1)t+m][(n+1)t+m]$，化简得 $t^2=0$，这与 $2^{a_1}>0$ 矛盾，故此时不存在常数 m，使得数列$\{c_n+m\}$为等比数列. 当 $d\neq 0$ 时，$c_n=2^{a_1}+2^{a_2}+2^{a_3}+\cdots+2^{a_n}=2^{a_1}[1+2^d+2^{2d}+\cdots+2^{(n-1)d}]=2^{a_1}\cdot\dfrac{(2^d)^n-1}{2^d-1}=b\cdot 2^{dn}-b\left(其中\ b=\dfrac{2^{a_1}}{2^d-1}\right)$. 因为数列$\{c_n+m\}$为等比数列，对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，恒有 $\dfrac{c_{n+1}+m}{c_n+m}=C$ (C 为常数且 $C\neq 0$)，即 $\dfrac{b\cdot 2^{d(n+1)}-b+m}{b\cdot 2^{dn}-b+m}=C$，所以 $b\cdot 2^{dn+d}+m-b=Cb\cdot 2^{dn}+C(m-b)$，所以 $b\cdot 2^{dn}(2^d-C)+(m-b)(1-C)=0$ 对任意正整数 n 恒成立，所以 $\begin{cases}2^d-C=0,\\(m-b)(1-C)=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=b,\\C=2^d,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}C=2^d,\\C=1\end{cases}$（舍），所以数列$\{c_n+m\}$为等比数列时，$m=\dfrac{2^{a_1}}{2^d-1}$.

17. 解：(1)由正弦定理及 $B=2A$，得 $\frac{2}{\sin A}=\frac{\sqrt{5}}{\sin 2A}$， ………… 2 分

即 $\frac{2}{\sin A}=\frac{\sqrt{5}}{2\sin A\cos A}$， ………… 4 分

解得 $\cos A=\frac{\sqrt{5}}{4}$. ………… 5 分

又 $A\in(0,\pi)$，所以 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{\sqrt{11}}{4}$. ………… 6 分

(2)法一：由余弦定理，得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$， ………… 7 分

即 $4=c^2+5-2c\times\sqrt{5}\times\frac{\sqrt{5}}{4}$，

解得 $c=2$，或 $c=\frac{1}{2}$. ………… 9 分

当 $c=2$ 时，$a=c=2$，所以 $A=C$，所以 $B=2A=2C$，所以 $A=45°$，这与 $\cos A=\frac{\sqrt{5}}{4}$ 矛盾，应舍去， ………… 10 分

所以△ABC 的面积 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{11}}{4}=\frac{\sqrt{55}}{16}$. ………… 12 分

法二：$\sin B=\sin 2A=2\sin A\cos A=2\times\frac{\sqrt{11}}{4}\times\frac{\sqrt{5}}{4}=\frac{\sqrt{55}}{8}$， ………… 8 分

$\cos B=2\cos^2 A-1=2\times\left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^2-1=-\frac{3}{8}$， ………… 10 分

所以 $\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{\sqrt{11}}{4}\times\left(-\frac{3}{8}\right)+\frac{\sqrt{5}}{4}\times\frac{\sqrt{55}}{8}=\frac{\sqrt{11}}{16}$， ………… 11 分

所以△ABC 的面积 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{5}\times\frac{\sqrt{11}}{16}=\frac{\sqrt{55}}{16}$. ………… 12 分

18. 解：(1)平均数为 $\frac{110+150+180+250+330+510+720+960}{8}=401.25$(万人次)， ………… 1 分

中位数为 $\frac{250+330}{2}=290$(万人次). ………… 2 分

(2)不低于平均数的有 3 年，$X=0,1,2$，

则 $P(X=0)=\frac{C_5^2}{C_8^2}=\frac{5}{14}$；$P(X=1)=\frac{C_5^1C_3^1}{C_8^2}=\frac{15}{28}$；$P(X=2)=\frac{C_3^2}{C_8^2}=\frac{3}{28}$.

所以 X 的分布列为 ………… 4 分

X	0	1	2
P	$\frac{5}{14}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$

故 $E(X)=0\times\frac{5}{14}+1\times\frac{15}{28}+2\times\frac{3}{28}=\frac{21}{28}=\frac{3}{4}$. ………… 6 分

(3)

x	2016	2017	2018	2019
y	330	510	720	960

简化变量：

$x'=x-2016$	0	1	2	3
$y'=y-630$	-300	-120	90	330

$\overline{x'}=1.5$，$\overline{y'}=0$，$\sum_{i=1}^{4}x'_iy'_i=1\ 050$，$\sum_{i=1}^{4}x_i'^2=14$， ………… 8 分

$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{4}x'_iy'_i-4\overline{x'}\,\overline{y'}}{\sum_{i=1}^{4}x_i'^2-4\overline{x'}^2}=\frac{1\ 050}{14-4\times1.5^2}=210$，$\hat{a}=\overline{y'}-\hat{b}\overline{x'}=0-210\times1.5=-315$.

$\hat{y}'=210x'-315$. ………………………………………………………… 10分

当 $x=2\,021$ 时，$x'=5$，$\hat{y}'=735$，所以 $\hat{y}-630=735$，所以 $\hat{y}=1\,365$.

即2021年接待的游客约为1 365万人次. ………………………………………… 12分

19. (1)证明：取 BC 的中点 M，连接 MF，QM.

因为点 F，M 为 BE，BC 的中点，所以 $FM/\!/CE$，

又 $CE\subset$ 平面 PCD，$FM\not\subset$ 平面 PCD，所以 $FM/\!/$ 平面 PCD， ……………… 2分

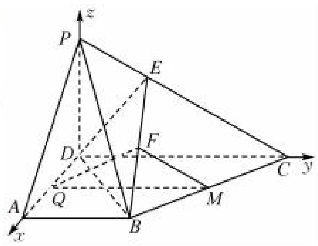
同理 $QM/\!/$ 平面 PCD.

又 $QM\cap FM=M$，QM，$FM\subset$ 平面 QFM，所以平面 $QFM/\!/$ 平面 PCD. ……………… 3分

又 $QF\subset$ 平面 QFM，

所以 $QF/\!/$ 平面 PCD. ………………………………………………………… 5分

(2)解：由题意知 DP，DA，DC 两两垂直，以 D 为坐标原点，以直线 DA，DC，DP 为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系(如图).



则 $D(0,0,0)$，$B(1,1,0)$，$C(0,2,0)$，$P(0,0,1)$， …………………………… 6分

所以 $\overrightarrow{DB}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DP}+\overrightarrow{PE}=\overrightarrow{DP}+\frac{1}{3}\overrightarrow{PC}=(0,0,1)+\frac{1}{3}(0,2,-1)=\left(0,\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$，$\overrightarrow{DP}=(0,0,1)$. …………………………… 7分

设平面 EBD 的法向量 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DB}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DE}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_1+y_1=0,\\ \frac{2}{3}y_1+\frac{2}{3}z_1=0,\end{cases}$

令 $y_1=-1$，则 $\boldsymbol{m}=(1,-1,1)$； ………………………………………… 9分

设平面 PBD 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DP}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DB}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}z_2=0,\\ x_2+y_2=0,\end{cases}$

令 $y_2=-1$，则 $\boldsymbol{n}=(1,-1,0)$， ………………………………………… 11分

所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{2}{\sqrt{2+1}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

由图知二面角 $P-BD-E$ 为锐二面角，

故二面角 $P-BD-E$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$. ……………………………………… 12分

20. (1)解：由题意，得 $\frac{y}{x+2}\cdot\frac{y}{x-2}=-\frac{3}{4}(x\neq\pm2)$， …………………… 2分

化简，得 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1(x\neq\pm2)$， ………………………………………… 3分

所以曲线 C 为中心在坐标原点，焦点在 x 轴上的椭圆，不含 A，B 两点. …………… 4分

(2)证明：①由题设知，直线 MA，NB 的斜率存在且均不为0.

设直线 AM 的方程为 $x=ty-2(t\neq0)$.

由 $AM\perp AN$，可知直线 NA 的斜率为 $k_{NA}=-t$，方程为 $x=-\frac{1}{t}y-2$. ……………… 5分

由 $\begin{cases}x=-\frac{1}{t}y-2,\\ 3x^2+4y^2=12,\end{cases}$ 得 $(4t^2+3)y^2+12ty=0$， …………………………… 6分

解得 $y_N=-\frac{12t}{4t^2+3}$，则 $x_N=-\frac{1}{t}\cdot\left(-\frac{12t}{4t^2+3}\right)-2=\frac{6-8t^2}{4t^2+3}$，即 $N\left(\frac{6-8t^2}{4t^2+3},-\frac{12t}{4t^2+3}\right)$. ………… 8分

直线 NB 的斜率为 $k_{NB}=\dfrac{-\frac{12t}{4t^2+3}-0}{\frac{6-8t^2}{4t^2+3}-2}=\frac{3}{4t}$， ……………………………………

则直线 BN 的方程为 $y=\frac{3}{4t}(x-2)$，将 $y=\frac{3}{4t}(x-2)$ 代入 $x=ty-2$，解得 $x=-14$，

故点 P 在直线 $x=-14$ 上. ………………………………………………………… 10 分

②由(1)，得 $k_{NA}\cdot k_{NB}=-\frac{3}{4}$，$k_{MA}\cdot k_{MB}=-\frac{3}{4}$，………………………………………… 11 分

所以 $k_{NA}\cdot k_{NB}\cdot k_{MA}\cdot k_{MB}=\left(-\frac{3}{4}\right)\times\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{9}{16}$.

结合 $k_{NA}\cdot k_{MA}=-1$，得 $k_{MB}\cdot k_{NB}=-\frac{9}{16}$，为定值. 即直线 NB 与直线 MB 的斜率之积为定值. ………… 12 分

21. (1)解：$f'(x)=e^x+2ae^{-x}-(2+a)=\frac{e^{2x}-(2+a)e^x+2a}{e^x}=\frac{(e^x-2)(e^x-a)}{e^x}$. ……………………… 1 分

若 $a\leqslant 0$，由 $e^x-2=0$，得 $x=\ln 2$；由 $f'(x)<0$ 得 $x<\ln 2$；由 $f'(x)>0$ 得 $x>\ln 2$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln 2)$ 上单调递减，在 $(\ln 2,+\infty)$ 上单调递增；……………………………… 2 分

若 $a>0$，由 $f'(x)=0$，得 $x=\ln 2$ 或 $x=\ln a$.

当 $0<a<2$ 时，由 $f'(x)<0$，得 $\ln a<x<\ln 2$；由 $f'(x)>0$，得 $x>\ln 2$ 或 $x<\ln a$，

所以 $f(x)$ 在 $(\ln a,\ln 2)$ 上单调递减，在 $(-\infty,\ln a)$，$(\ln 2,+\infty)$ 上单调递增；……………………… 3 分

当 $a=2$ 时，$f'(x)\geqslant 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增；……………………… 4 分

当 $a>2$ 时，由 $f'(x)<0$，得 $\ln 2<x<\ln a$；由 $f'(x)>0$，得 $x>\ln a$ 或 $x<\ln 2$，

所以 $f(x)$ 在 $(\ln 2,\ln a)$ 上单调递减，在 $(-\infty,\ln 2)$，$(\ln a,+\infty)$ 上单调递增. ……………………… 5 分

(2)证明：由(1)知，当 $\frac{2}{5}\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 在 $(\ln a,\ln 2)$ 上单调递减，在 $(-\infty,\ln a)$、$(\ln 2,+\infty)$ 上单调递增，所以

$f(x)_{极大值}=f(\ln a)$，$f(x)_{极小值}=f(\ln 2)$，

$f(x)_{极大值}=f(\ln a)=a-2-(2+a)\ln a$.

令 $g(a)=a-2-(2+a)\ln a\left(\frac{2}{5}\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}\right)$，则 $g'(a)=-\frac{2+a\ln a}{a}$.

令 $m(a)=2+a\ln a\left(\frac{2}{5}\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}\right)$，则 $m'(a)=1+\ln a\geqslant 1+\ln\frac{2}{5}=\ln\frac{2e}{5}>\ln 1=0$，

所以 $m(a)$ 在 $\left[\frac{2}{5},\frac{1}{2}\right]$ 上单调递增，……………………………………………………………… 6 分

所以 $m(a)\geqslant m\left(\frac{2}{5}\right)=2+\frac{2}{5}\ln\frac{2}{5}=2-\frac{2}{5}\ln\frac{5}{2}>2-\frac{2}{5}\ln e=\frac{8}{5}>0$，

所以 $g'(a)<0$，从而 $g(a)$ 在 $\left[\frac{2}{5},\frac{1}{2}\right]$ 上单调递减，

所以 $g(a)\geqslant g\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}-\frac{5}{2}\ln\frac{1}{2}=\frac{5\ln 2-3}{2}=\frac{\ln 32-\ln e^3}{2}>0$，即 $f(\ln a)>0$. ……………………… 7 分

又当 $\frac{2}{5}\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$-1=\ln\frac{2}{2e}<\ln\frac{2}{5}\leqslant\ln a\leqslant\ln\frac{1}{2}<0$，即 $\ln a\in(-1,0)$，

又 $f(-2)=e^{-2}-2ae^2+2(2+a)=2(1-e^2)a+e^{-2}+4$，该式关于 a 单调递减，

所以 $2(1-e^2)a+e^{-2}+4\leqslant 2(1-e^2)\times\frac{2}{5}+e^{-2}+4=\frac{24-4e^2}{5}+\frac{1}{e^2}<\frac{24-4e^2}{5}+\frac{1}{5}=\frac{25-4e^2}{5}<0$，

所以 $f(-2)<0$，…………………………………………………………………………………………… 8 分

因为 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 上单调递增，且 $f(-2)f(\ln a)<0$，

所以函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,\ln a)$ 上有且只有一个零点. …………………………………………… 9 分

$f(x)_{极小值}=f(\ln 2)=2-a-(2+a)\ln 2=-(1+\ln 2)a+2-2\ln 2$.

令 $h(a)=-(1+\ln 2)a+2-2\ln 2\left(\frac{2}{5}\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}\right)$，显然 $h(a)$ 单调递减，

所以 $h(a)\leqslant 2-\frac{2}{5}-\left(2+\frac{2}{5}\right)\ln 2=\frac{8}{5}\left(1-\frac{3}{2}\ln 2\right)=\frac{8}{5}(1-\ln\sqrt{8})<\frac{8}{5}(1-\ln\sqrt{e^2})=0$，

所以 $f(\ln 2)<0$.

因为 $f(x)$在$(\ln a,\ln 2)$上单调递减，且 $f(\ln a)f(\ln 2)<0$，

所以函数 $f(x)$在区间$(\ln a,\ln 2)$有且只有一个零点. ………… 10 分

$f(2)=e^2-2ae^{-2}-(2+a)\times 2=-2(e^{-2}+1)a+e^2-4$，该式关于 a 单调递减，

所以$-2(e^{-2}+1)a+e^2-4\geqslant -2(e^{-2}+1)\times\frac{1}{2}+e^2-4=e^2-\frac{1}{e^2}-5>e^2-1-5=e^2-6>0$.

因为 $f(x)$在$(\ln 2,+\infty)$上单调递增，且 $f(\ln 2)f(2)<0$，

所以函数 $f(x)$在$(\ln 2,+\infty)$上有且只有一个零点. ………… 11 分

综上所述：当$\frac{2}{5}\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$时，函数 $f(x)$有且只有三个零点. ………… 12 分

22. 解：(1)直线 l 的参数方程为$\begin{cases}x=4+t\cos\alpha,\\ y=t\sin\alpha\end{cases}$（$t$ 为参数）. ………… 2 分

将 $\rho^2=x^2+y^2$ 和 $y=\rho\sin\theta$ 代入 $\rho^2=8\rho\sin\theta$，得 $x^2+y^2=8y$，

所以曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2+(y-4)^2=16$. ………… 4 分

(2)由直线 l 与曲线 C 交于不同两点 M,N，得 $90^\circ<\alpha<180^\circ$. ………… 5 分

把直线 l 的参数方程代入曲线 C 的直角坐标方程，得 $t^2+8(\cos\alpha-\sin\alpha)t+16=0$. ………… 6 分

则 $\Delta=[8(\cos\alpha-\sin\alpha)]^2-64=-128\sin\alpha\cos\alpha>0$.

设 M,N 对应的参数分别为 t_1,t_2，则 $t_1+t_2=8(\sin\alpha-\cos\alpha)$，$t_1t_2=16$. ………… 7 分

因为 $90^\circ<\alpha<180^\circ$，所以 $t_1+t_2=8(\sin\alpha-\cos\alpha)>0$，$t_1t_2=16>0$，所以 $t_1>0,t_2>0$，

所以$|PM|+|PN|=t_1+t_2=8(\sin\alpha-\cos\alpha)=8\sqrt{2}\sin(\alpha-45^\circ)$，

所以当且仅当 $\alpha=135^\circ$时，$|PM|+|PN|$的最大值为 $8\sqrt{2}$. ………… 10 分

23. (1)解：$|x-1|+2|x+1|=\begin{cases}-3x-1,x\leqslant -1,\\ x+3,-1<x\leqslant 1,\\ 3x+1,x>1.\end{cases}$ ………… 1 分

当 $x\leqslant -1$ 时，$-3x-1\leqslant x+7$，得$-2\leqslant x\leqslant -1$； ………… 2 分

当$-1<x\leqslant 1$ 时，$x+3\leqslant x+7$，得$-1<x\leqslant 1$； ………… 3 分

当 $x>1$ 时，$3x+1\leqslant x+7$，得 $1<x\leqslant 3$. ………… 4 分

综上，不等式$|x-1|+2|x+1|\leqslant x+7$ 的解集 $M=[-2,3]$. ………… 5 分

(2)证明：由(1)，得 $m=3$，则 $a+b=1$，$x+y=3$. ………… 6 分

由 a,b,x,y 都是正数及基本不等式，得$\sqrt{a\cdot\frac{x}{3}}\leqslant\frac{a+\frac{x}{3}}{2}$，$\sqrt{b\cdot\frac{y}{3}}\leqslant\frac{b+\frac{y}{3}}{2}$，当且仅当 $a=\frac{x}{3}$，$b=\frac{y}{3}$，等号成立，

以上两式相加，得$\sqrt{\frac{ax}{3}}+\sqrt{\frac{by}{3}}\leqslant\frac{a+\frac{x}{3}}{2}+\frac{b+\frac{y}{3}}{2}$. ………… 7 分

因为 $a+b=1$，$\frac{x}{3}+\frac{y}{3}=1$，所以$\frac{a+\frac{x}{3}}{2}+\frac{b+\frac{y}{3}}{2}=\frac{a+b+\frac{x+y}{3}}{2}=\frac{1+1}{2}=1$， ………… 9 分

即$\sqrt{\frac{ax}{3}}+\sqrt{\frac{by}{3}}\leqslant 1$，故 $\sqrt{ax}+\sqrt{by}\leqslant\sqrt{3}$. ………… 10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（http://www.zizzs.com/）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》