高三文科数学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分150分，考试时间120分钟。
2. 答题前，考生务必用直径0.5毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本试卷主要命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{x\in\mathbf{N}|x\leqslant 3\}$，$B=\{x|x^2-2x-3=0\}$，则 $A\cup B=$

A. $\{3\}$　　B. $\{-1,0,1,2,3\}$

C. $\{0,1,2,3\}$　　D. $\{1,3\}$

2. 若复数 $\frac{4+ai}{1+i}$（i为虚数单位，$a\in\mathbf{R}$）为纯虚数，则 a 的值为

A. -4　　B. -3

C. 3　　D. 5

3. 命题"$\forall x\in\mathbf{R}$，$2^{-x}+2^x\geqslant 1$"的否定是

A. $\forall x\in\mathbf{R}$，$2^{-x}+2^x<1$　　B. $\exists x_0\in\mathbf{R}$，$2^{-x_0}+2^{x_0}\geqslant 1$

C. $\forall x\notin\mathbf{R}$，$2^{-x}+2^x<1$　　D. $\exists x_0\in\mathbf{R}$，$2^{-x_0}+2^{x_0}<1$

4. 若双曲线 $x^2-\frac{y^2}{b}=1(b>0)$ 的虚轴长为 $\sqrt{3}$，则其渐近线的方程是

A. $y=\pm 3x$　　B. $y=\pm\frac{3}{2}x$

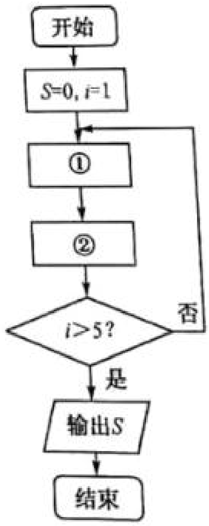
C. $y=\pm\sqrt{3}x$　　D. $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}x$

5. 在区间 $[-10,10]$ 内任取一数 x，则 $\log_2(3-x)\leqslant 3$ 成立的概率为

A. $\frac{3}{5}$　　B. $\frac{3}{4}$

C. $\frac{2}{5}$　　D. $\frac{1}{4}$

6. 为了计算 $S=3+33+333+3\ 333+33\ 333$，设计了如图所示的程序框图，则①和②处的框内可以分别填入



A. $S=S+3\times 10^{i-1}$ 和 $i=i+2$

B. $S=S+(10^i-1)\div 3$ 和 $i=i+1$

C. $S=S+3\times 10^i$ 和 $i=i+3$

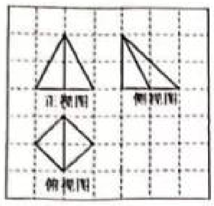
D. $S=S+(10^{i-1}-1)\div 3$ 和 $i=i+1$

7. 已知函数 $f(3x)$ 的图象仅关于点 $(2,0)$ 对称，若 $f(3x+m)$ 为奇函数，则 $m=$

A. 0　　B. 2　　C. 3　　D. 6

8. 某四棱锥的三视图(图中每个小方格的边长为 1)如图所示，则该四棱锥的体积为

A. 4 B. $\frac{8}{3}$ C. $\frac{4}{3}$ D. 1



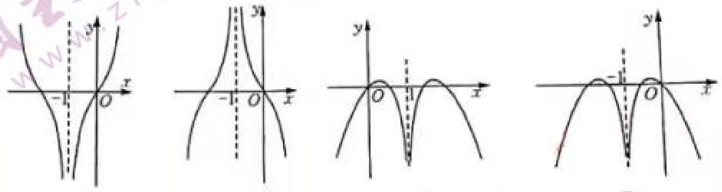
第 8 题图

第 9 题图

9. "春雨惊春清谷天，夏满芒夏暑相连，秋处露秋寒霜降，冬雪雪冬小大寒"，这首二十四节气歌，记录了中国古代劳动人民在田间耕作长期经验的积累和智慧. "二十四节气"已经被列入联合国教科文组织人类非物质文化遗产代表作名录. 我国古代天文学和数学著作《周髀算经》中记载：一年有二十四个节气，每个节气的晷长损益相同(晷是按照日影测定时刻的仪器，晷长即为所测量影子的长度). 二十四节气及晷长变化如图所示，相邻两个节气晷长减少或增加的量相同，周而复始. 已知每年冬至的晷长为一丈三尺五寸，夏至的晷长为一尺五寸(一丈等于十尺，一尺等于十寸)，则晷长为七尺五寸时，对应的节气为

A. 春分、秋分 B. 雨水、处暑 C. 立春、立秋 D. 立冬、立夏

10. 函数 $f(x)=\ln|x+1|-x^2-2x$ 的图象大致为

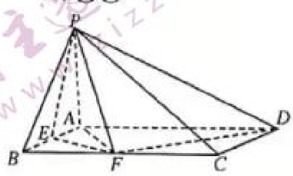


A B C D

11. 已知函数 $f(x)=\sin x$ 和 $g(x)=\cos x$ 图象的一个公共点为 $P(x_0,y_0)$，现给出以下结论：①$f(x_0)=g(x_0)$；②$f'(x_0)=g'(x_0)$；③$f(x)$和 $g(x)$的图象在点 P 处的切线的倾斜角互补；④$f(x)$和 $g(x)$的图象在点 P 处的切线互相垂直. 其中正确结论的序号是

A. ①③ B. ②④ C. ②③ D. ①④

12.《九章算术》卷五《商功》中描述几何体"阳马"为"底面为矩形，一棱垂直于底面的四棱锥". 现有阳马 $P-ABCD$(如图)，$PA\perp$平面 $ABCD$，$PA=AB=1$，$AD=3$，点 E,F 分别在 AB,BC 上，当空间四边形 $PEFD$ 的周长最小时，三棱锥 $P-ADF$ 外接球的表面积为



A. 9π B. 11π

C. 12π D. 16π

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，满足 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，当 $|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=2\sqrt{3}$ 时，向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为________.

14. 某校高二 20 名学生学业水平考试的数学成绩如下表：

学生编号	成绩	学生编号	成绩	学生编号	成绩	学生编号	成绩
1	80	6	80	11	71	16	70
2	88	7	85	12	78	17	68
3	80	8	69	13	79	18	90
4	81	9	83	14	83	19	63
5	73	10	76	15	65	20	76

用系统抽样法从这 20 名学生学业水平考试的数学成绩中抽取容量为 5 的样本，若在第一分段里用随机抽样抽取的成绩为 88，则这个样本中最小的成绩是________.

15. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点为 F，过点 F 且斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线 l 与 C 在第二象限的交点为 A，若 $\angle AOF=60°$，则 C 的离心率为________.

16. 已知公比为 q 的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 S_3,S_9,S_6 成等差数列，则 q^3 的值为________；设 a_k 是 a_4 与 a_7 的等差中项，则 k 的值是________.（本小题第一空 3 分，第二空 2 分）

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17.（本小题满分 12 分）

在△ABC 中，内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，已知 $a=2,b=\sqrt{5},B=2A$.

（1）求 $\sin A$ 的值；

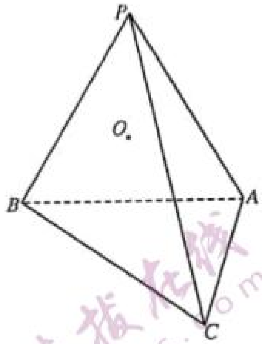
（2）求△ABC 的面积.

18.（本小题满分 12 分）

如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，△PAB 为正三角形，O 为△PAB 的重心，$PB\perp AC$，$\angle ABC=60°$，$BC=2AB$.

（1）求证：平面 $PAB\perp$ 平面 ABC；

（2）在棱 BC 上是否存在点 D，使得直线 $OD//$平面 PAC？若存在，求出 $\frac{BD}{DC}$ 的值；若不存在，说明理由.



19.（本小题满分 12 分）

如图是 M 市旅游局宣传栏中标题为"2012～2019 年我市接待游客人次"的统计图. 根据该统计图提供的信息解决下列问题.

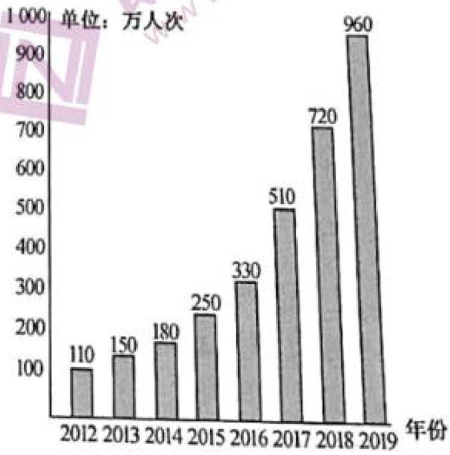
（1）求 M 市所统计的 8 年中接待游客人次的平均值和中位数；

（2）由统计图可看出，从 2016 年开始，M 市接待游客的人次呈直线上升趋势，请你用线性回归分析的方法预测 2021 年 M 市接待游客的人次.

①参考公式：对于一组数据 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$，其回归直线 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 的斜率和截距的最小二乘法估计分别为：

$$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\cdot\overline{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2},\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}.$$

②参考数据：



$x'=x-2\,016$	0	1	2	3
$y'=y-630$	-300	-120	90	330

20.（本小题满分 12 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，动圆 M 经过点 $Q(1,0)$，且与直线 $x=-1$ 相切. 记动圆圆心 M 的轨迹为曲线 C.

(1)求曲线 C 的方程，并说明 C 是什么样的曲线？

(2)设过点 $P(2,0)$ 的直线 l 与曲线 C 交于 A，B 两点，且点 $N\left(\frac{9}{2},0\right)$ 满足 $|NA|=|NB|$，求直线 l 的方程.

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=(2-x)e^x+a(x^2-2x)(a>0)$.

(1)讨论 $f(x)$ 的单调区间；

(2)若 $f(x)$ 有 3 个零点，求实数 a 的取值范围.

(二)选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 两题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22.（本小题满分 10 分）**选修 4－4：坐标系与参数方程**

在平面直角坐标系中，直线 l 过点 $P(4,0)$，倾斜角为 α. 以直角坐标系的坐标原点为极点、x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=8\sin\theta$.

(1)写出直线 l 的一个参数方程，并求曲线 C 的直角坐标方程；

(2)设直线 l 与曲线 C 交于不同两点 M，N，求 $|PM|+|PN|$ 的最大值.

23.（本小题满分 10 分）**选修 4－5：不等式选讲**

设不等式 $|x-1|+2|x+1|\leqslant x+7$ 的解集为 M.

(1)求集合 M；

(2)设 m 是 M 中元素的最大值，正数 a,b,x,y 满足 $a+b=\frac{m}{3}$，$x+y=m$. 求证：$\sqrt{ax}+\sqrt{by}\leqslant\sqrt{m}$.

高三文科数学参考答案、提示及评分细则

1. B 因为 $A=\{0,1,2,3\}$，$B=\{-1,3\}$，所以 $A\cup B=\{-1,0,1,2,3\}$. 故选 B.

2. A $\frac{4+ai}{1+i}=\frac{(4+ai)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{(4+a)+(a-4)i}{2}=\frac{4+a}{2}+\frac{a-4}{2}i$，因为该复数为纯虚数，所以 $a+4=0$，$a-4\neq 0$，所以 $a=-4$. 故选 A.

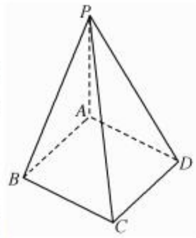
3. D 含有量词的命题的否定的做法为“换量词，否结论”. 所以“$\forall x\in\mathbf{R}$，$2^{-x}+2^{x}\geqslant 1$”的否定为“$\exists x_0\in\mathbf{R}$，$2^{-x_0}+2^{x_0}<1$”. 故选 D.

4. D 虚轴长为 $2\sqrt{b}=\sqrt{3}$，解得 $\sqrt{b}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，则渐近线方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{b}}{1}x$，即 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}x$. 故选 D.

5. C 由 $\log_2(3-x)\leqslant 3$，得 $0<3-x\leqslant 8$，解得 $-5\leqslant x<3$，故所求的概率为 $\frac{3-(-5)}{10-(-10)}=\frac{2}{5}$. 故选 C.

6. B i 为计数变量，由“$i>5$?”得执行了 5 次运算，且是逐步进行的，所以 $i=i+1$，可排除 A 和 C；又因为第一次求和为 $S=3$，则可排除 D. 故选 B.

7. D $f(3x+m)=f\left[3\left(x+\frac{m}{3}\right)\right]$，将函数 $f(3x)$ 的图象向左平移 2 个单位长度，得到函数 $y=f[3(x+2)]$ 的图象，且 $y=f[3(x+2)]$ 为奇函数，于是 $\frac{m}{3}=2$，解得 $m=6$. 故选 D.

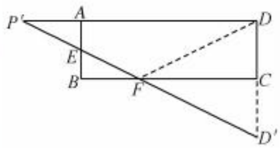


8. C 该四棱锥的一条侧棱垂直于底面且底面为正方形，其中高为 2，底面正方形对角线的长度为 2. 直观图如图所示，$PA=2$，$AC=2$，正方形 $ABCD$ 的面积为 2，所以该四棱锥的体积 $V=\frac{1}{3}\times 2\times 2=\frac{4}{3}$. 故选 C.

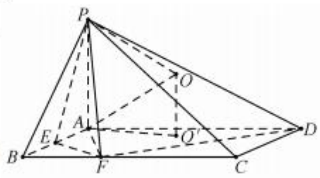
9. A 设从夏至开始到冬至，各节气的晷长分别为 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{13}$，则夏至时晷长为 $a_1=15$（寸），冬至时晷长为 $a_{13}=135$（寸），由每个节气晷长损益相同可知，$\{a_n\}$ 为等差数列，设公差为 d，则 $a_{13}=a_1+12d=15+12d=135$，解得 $d=10$，所以通项 $a_n=15+(n-1)\times 10=10n+5$，由 $a_n=75$ 可得 $n=7$，即晷长七尺五寸对应的节气为从夏至开始的第七个节气，即秋分；设从冬至开始到夏至，每个节气的晷长为 b_n，则 $b_n=135+(n-1)\cdot(-10)=-10n+145$，由 $b_n=75$，得 $n=7$，即晷长七尺五寸对应的节气也是从冬至开始的第七个节气，即春分. 所以晷长为七尺五寸时，对应的节气为春分和秋分. 故选 A.

10. D $f(x)=\ln|x+1|-x^2-2x=\ln|x+1|-(x+1)^2+1$，$f(x)$ 的图象是由函数 $g(x)=\ln|x|-x^2+1$ 的图象向左平移一个单位长度得到，由于 $g(x)=\ln|x|-x^2+1$ 为偶函数，故 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=-1$ 对称，故 C 不正确. 又 $x>0$ 时，$g(x)=\ln x-x^2+1$，$g'(x)=\frac{1}{x}-2x=\frac{1-2x^2}{x}$，所以在 $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 上，$g'(x)>0$，在 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$ 上，$g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 存在极值点，所以 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上存在极值点. 综上可知，只有选项 D 符合条件. 故选 D.

11. A 对于①，由 $f(x_0)=y_0$，$g(x_0)=y_0$，得 $f(x_0)=g(x_0)$，则①正确；对于②，法一：由于 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 P 处的切线不平行且不重合，所以 $f'(x_0)\neq g'(x_0)$，则②错误；法二：由 $f(x_0)=g(x_0)$，得 $\sin x_0=\cos x_0$，即 $\tan x_0=1$，解得 $x_0=\frac{\pi}{4}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，或 $x_0=\frac{5\pi}{4}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$. 当 $x_0=\frac{\pi}{4}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时，$f'\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$g'\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，从而 $f'(x_0)\neq g'(x_0)$；同样，当 $x_0=\frac{5\pi}{4}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时，仍有 $f'(x_0)\neq g'(x_0)$，则②错误；对于③，显然 $f'(x_0)+g'(x_0)=0$ 成立，则③正确；对于④，假设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图象在点 P 处的切线互相垂直，则有 $-\cos x_0\sin x_0=-1$，即 $\sin 2x_0=2$，这与 $|\sin 2x_0|\leqslant 1$ 矛盾，则④错误. 故选 A.



12. B 把平面 PAB 展开到与平面 $ABCD$ 共面的 $P'AB$ 的位置（如图），延长 DC 到 D'，使得 $CD'=1$，则 $DF=D'F$，因为 PD 的长度为定值，故只需 $PE+EF+FD=P'E+EF+FD'$ 最小，只需 P',E,F,D' 四点共线，因为 $P'D=4$，$DD'=2$，$\frac{CF}{P'D}=\frac{CD'}{DD'}$，所以 $CF=2$，所以 $AF=\sqrt{2}$，$DF=\sqrt{5}$，$\angle DAF=45°$，由正弦定理得，$\triangle AFD$ 外接圆的半径 $r=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{5}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$. 设 $\triangle ADF$ 外接圆的圆心为 O'，则三棱锥 $P-ADF$ 外接球的球心 O 一定在过 O' 且与平面 ADF 垂直的直线上，O 到点 P,A 的距离相等，所以 $OA=\sqrt{r^2+\left(\frac{PA}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{10}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{11}}{2}$，此即为三棱锥 $P-ADF$ 外接球的半径，该球的表面积为 $4\pi\times\left(\frac{\sqrt{11}}{2}\right)^2=11\pi$. 故选 B.



13. $\frac{2\pi}{3}$　设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，则 $|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{4\boldsymbol{a}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{4-8\cos\theta+4}=2\sqrt{3}$，解得 $\cos\theta=-\frac{1}{2}$，又 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$，所以 $\theta=\frac{2\pi}{3}$.

14. 76　20 个成绩，分为 5 组，每组 4 个，其中第一组的成绩为 88，它在本组中的编号为 2，所以抽取的 5 个成绩分别为 88，80，76，83，90，故所抽样本中最小的成绩为 76.

15. $\sqrt{3}-1$　设 C 的右焦点为 F_1．由直线 l 的斜率为 $\sqrt{3}$，得 $\angle AFO=60°$，又 $\angle AOF=60°$，所以 $\triangle AOF$ 为正三角形，从而 $\angle FAF_1=90°$；设 $|FF_1|=2c$，则 $|AF_1|=\sqrt{3}c$，所以 $2a=|AF|+|AF_1|=c+\sqrt{3}c$．所以 $\frac{c}{a}=\frac{2}{(\sqrt{3}+1)}=\sqrt{3}-1$，即椭圆 C 的离心率为 $\sqrt{3}-1$.

16. $-\frac{1}{2}$(3 分)　10(2 分)　若 $q=1$，则 $S_3=3a_1$，$S_9=9a_1$，$S_6=6a_1$ 不成等差数列，故 $q\neq1$．此时由 S_3，S_9，S_6 成等差数列，得 $2S_9=S_3+S_6$，即 $2\times\frac{a_1(1-q^9)}{1-q}=\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}+\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}$．化简得 $2q^6-q^3-1=0$，即 $(2q^3+1)(q^3-1)=0$，考虑到 $q\neq1$，解得 $q^3=-\frac{1}{2}$．因为 $\frac{a_4+a_7}{2}=\frac{a_1q^3+a_1q^6}{2}=\frac{-\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{4}a_1}{2}=-\frac{1}{8}a_1=a_1\left(-\frac{1}{2}\right)^3=a_1q^{k-1}=a_1\left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{k-1}{3}}$，所以 $\left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{k-1}{3}}=-\frac{1}{8}$，所以 $k=10$.

17. 解：(1)由正弦定理及 $B=2A$，得 $\frac{2}{\sin A}=\frac{\sqrt{5}}{\sin 2A}$，………… 2 分

即 $\frac{2}{\sin A}=\frac{\sqrt{5}}{2\sin A\cos A}$，………… 4 分

解得 $\cos A=\frac{\sqrt{5}}{4}$．………… 5 分

又 $A\in(0,\pi)$，所以 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{\sqrt{11}}{4}$．………… 6 分

(2)法一：由余弦定理，得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，………… 7 分

即 $4=c^2+5-2c\times\sqrt{5}\times\frac{\sqrt{5}}{4}$，

解得 $c=2$，或 $c=\frac{1}{2}$．………… 9 分

当 $c=2$ 时，$a=c=2$，所以 $A=C$，所以 $B=2A=2C$，所以 $A=45°$，这与 $\cos A=\frac{\sqrt{5}}{4}$ 矛盾，舍去，………… 10 分

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{11}}{4}=\frac{\sqrt{55}}{16}$．………… 12 分

法二：$\sin B=\sin 2A=2\sin A\cos A=2\times\frac{\sqrt{11}}{4}\times\frac{\sqrt{5}}{4}=\frac{\sqrt{55}}{8}$，………… 8 分

$\cos B=2\cos^2 A-1=2\times\left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^2-1=-\frac{3}{8}$，………… 10 分

所以 $\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{\sqrt{11}}{4}\times\left(-\frac{3}{8}\right)+\frac{\sqrt{5}}{4}\times\frac{\sqrt{55}}{8}=\frac{\sqrt{11}}{16}$，………… 11 分

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{5}\times\frac{\sqrt{11}}{16}=\frac{\sqrt{55}}{16}$．………… 12 分

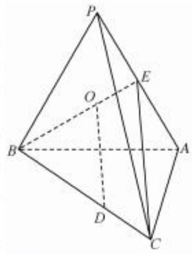
18. (1)证明：设 $AB=m$，则 $BC=2m$，在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理，得 $AC=\sqrt{m^2+4m^2-2m^2}=\sqrt{3}m$.

因为 $AB^2+AC^2=4m^2=BC^2$，所以 $AC\perp AB$．………… 2 分

因为 $AC\perp PB$，$AB\cap PB=B$，所以 $AC\perp$ 平面 PAB．………… 4 分

因为 $AC\subset$ 平面 ABC，所以平面 $PAB\perp$ 平面 ABC．………… 6 分

(2)解：(方法 1)取 PA 的中点 E，连接 BE，CE，则点 O 在 BE 上，在平面 BCE 内过点 O 作 CE 的平行线交 BC 于点 D．………… 7 分

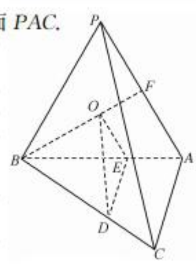


因为 $OD/\!/CE$，$OD\not\subset$ 平面 PAC，$CE\subset$ 平面 PAC，所以 $OD/\!/$ 平面 PAC．………… 9 分

因为 O 为 $\triangle PAB$ 的重心，所以 $BO:OE=2:1$，又 $BD:DC=BO:OE$，所以 $\frac{BD}{DC}=2$，………… 11 分

所以在棱 BC 上存在点 D，使得直线 $OD/\!/$ 平面 PAC，且此时 $\frac{BD}{DC}=2$．………… 12 分

(方法 2)过 O 作 $OE/\!/PA$ 交 AB 于点 E，过 E 作 $ED/\!/AC$ 交 BC 于点 D，连接 OD，则 $OD/\!/$ 平面 PAC.
………… 7 分



证明如下：$OE/\!/PA$，$OE\not\subset$ 平面 PAC，$PA\subset$ 平面 PAC，所以 $OE/\!/$ 平面 PAC，同理，$DE/\!/$ 平面 PAC．………… 8 分

因为 $OE\cap DE=E$，OE，$DE\subset$ 平面 ODE，所以平面 $ODE/\!/$ 平面 PAC．………… 9 分

因为 $OD\subset$ 平面 ODE，所以 $OD/\!/$ 平面 PAC．………… 10 分

连接 BO 并延长交 PA 于 F，

因为 O 为 $\triangle PAB$ 的重心，所以 $\frac{BE}{EA}=\frac{BO}{OF}=\frac{2}{1}=2$，所以 $\frac{BD}{DC}=\frac{BE}{EA}=2$，………… 11 分

所以在棱 BC 上存在点 D，使得 $OD/\!/$ 平面 PAC，且此时 $\frac{BD}{DC}=2$．………… 12 分

19. 解：(1)平均数为 $\frac{110+150+180+250+330+510+720+960}{8}=401.25$（万人次），…… 2 分

中位数为 $\frac{250+330}{2}=290$（万人次）. …… 4 分

(2)

x	2 016	2 017	2 018	2 019
y	330	510	720	960

简化变量：

$x'=x-2\,016$	0	1	2	3
$y'=y-630$	-300	-120	90	330

…… 6 分

$\overline{x'}=1.5$，$\overline{y'}=0$，$\sum\limits_{i=1}^{4}x_i'y_i'=1\,050$，$\sum\limits_{i=1}^{4}x_i'^2=14$，…… 7 分

$\hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{4}x_i'y_i'-4\overline{x'}\,\overline{y'}}{\sum\limits_{i=1}^{4}x_i'^2-4\overline{x'}^2}=\frac{1\,050}{14-4\times1.5^2}=210$，$\hat{a}=\overline{y'}-\hat{b}\overline{x'}=0-210\times1.5=-315$，…… 9 分

$\hat{y}'=210x'-315$，…… 10 分

当 $x=2\,021$ 时，$x'=5$，$\hat{y}'=735$，所以 $\hat{y}-630=735$，所以 $\hat{y}=1\,365$.

即 2021 年接待的游客约为 1 365 万人次. …… 12 分

20. 解：(1)根据题意，动点 M 到点 $Q(1,0)$ 的距离等于到直线 $x=-1$ 的距离，则动点 M 的轨迹是以 $Q(1,0)$ 为焦点、直线 $x=-1$ 为准线的抛物线，…… 2 分

所以曲线 C 的方程为 $y^2=4x$，且曲线 C 为焦点在 x 轴正半轴上的抛物线. …… 4 分

(2)当直线 l 与 x 轴垂直时，一定有 $|NA|=|NB|$，此时适合题意，直线 l 的方程为 $x=2$. …… 5 分

当直线 l 与 x 轴不垂直时，设直线 l 的方程为 $y=k(x-2)(k\neq0)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，…… 6 分

由 $\begin{cases}y=k(x-2),\\y^2=4x,\end{cases}$ 得 $k^2x^2-4(k^2+1)x+4k^2=0$.

$\Delta=[-4(k^2+1)]^2-4\times k^2\times4k^2=16(2k^2+1)>0$，则直线 l 与抛物线 C 一定相交；

所以 $x_1+x_2=4\left(1+\frac{1}{k^2}\right)$，$x_1x_2=4$. …… 8 分

设 AB 的中点为 $D(x_0,y_0)$，则 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=2\left(1+\frac{1}{k^2}\right)$，$y_0=k(x_0-2)=k\left[2\left(1+\frac{1}{k^2}\right)-2\right]=\frac{2}{k}$，

即 $D\left(2\left(1+\frac{1}{k^2}\right),\frac{2}{k}\right)$. …… 9 分

当 $2\left(1+\frac{1}{k^2}\right)\neq\frac{9}{2}$，即 $k\neq\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 时，因为 $|NA|=|NB|$，所以 $DN\perp AB$.

所以 $\frac{\frac{2}{k}-0}{2\left(1+\frac{1}{k^2}\right)-\frac{9}{2}}\times k=-1$，解得 $k=\pm2$，…… 11 分

所以直线 l 的方程为 $y=\pm2(x-2)$，即 $2x\pm y-1=0$.

当 $2\left(1+\frac{1}{k^2}\right)=\frac{9}{2}$，即 $k=\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 时，经检验不合题意.

综上，直线 l 的方程为 $x=2$ 或 $2x\pm y-1=0$. …… 12 分

21. 解：(1) $f'(x)=(1-x)e^x+2a(x-1)=-(x-1)(e^x-2a)$，…… 1 分

由 $f'(x)=0$，得 $x=1$，$x=\ln(2a)$.

当 $\ln 2a<1$，即 $0<a<\frac{e}{2}$ 时，$f'(x)>0\Leftrightarrow\ln 2a<x<1$；$f'(x)<0\Leftrightarrow x<\ln 2a$ 或 $x>1$，

所以 $f(x)$ 的递增区间为 $(\ln 2a,1)$，单调递减区间为 $(-\infty,\ln 2a)$，$(1,+\infty)$；…… 3 分

当 $\ln 2a=1$，即 $a=\frac{e}{2}$ 时，$f'(x)=-(x-1)(e^x-e)\leqslant0$，此时 $f(x)$ 的递减区间为 $(-\infty,+\infty)$；…… 4 分

当 $\ln 2a>1$，即 $a>\frac{e}{2}$ 时，$f'(x)>0\Leftrightarrow1<x<\ln 2a$；$f'(x)<0\Leftrightarrow x<1$ 或 $x>\ln 2a$，

此时 $f(x)$ 的递增区间为 $(1,\ln 2a)$，递减区间为 $(-\infty,1)$，$(\ln 2a,+\infty)$. ……

(2)由 $f(x)=0$,得 $(2-x)e^x+ax(x-2)=0$,即 $(2-x)(e^x-ax)=0$,

显然 $x=2$ 是方程 $(2-x)(e^x-ax)=0$ 的一个解,即 $x=2$ 为 $f(x)$ 的一个零点, ………………………………… 6分

当 $x\neq2$ 时,由 $e^x-ax=0$,得 $\frac{1}{a}=\frac{x}{e^x}$. ………………………………………………………………… 7分

令 $g(x)=\frac{x}{e^x}$,则 $g'(x)=\frac{1-x}{e^x}$,

所以当 $x<1$ 时, $g'(x)>0$;当 $x>1$ 时 $g'(x)<0$,

所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上递增,在 $(1,+\infty)$ 上递减,

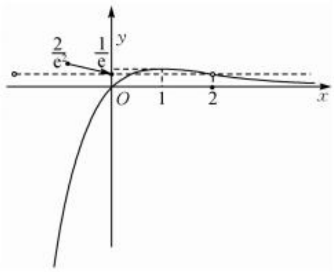
所以 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极大值点,也是 $f(x)$ 的最大值点,且最大值为 $g(1)=\frac{1}{e}$, ………………………………… 9分

当 $x>1$ 时, $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减,且 $g(x)=\frac{x}{e^x}>0$,随着 x 的无限增大, $g(x)$ 无限趋向0;

当 $0<x<1$ 时, $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增,且 $g(x)>0$;

当 $x\leqslant0$ 时, $g(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上递增, $g(x)\leqslant0$,当 x 趋向负无穷大时, $g(x)$ 也趋向负无穷大. ……………… 10分

所以 $g(x)$ 的大致图象如图所示:



所以当 $0<\frac{1}{a}<\frac{1}{e}$,且 $\frac{1}{a}\neq\frac{2}{e^2}$,即 $a>e$ 且 $a\neq\frac{e^2}{2}$ 时,方程 $\frac{1}{a}=\frac{x}{e^x}$ 有两个实根,且一个实根在区间 $(0,1)$ 内,一个实根在区间 $(1,+\infty)$ 内, ……………… 11分

综上可知, $f(x)$ 有3个零点时,实数 a 的取值范围为 $\left(e,\frac{e^2}{2}\right)\cup\left(\frac{e^2}{2},+\infty\right)$. … 12分

22. 解:(1)直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=4+t\cos\alpha,\\ y=t\sin\alpha\end{cases}$ (t 为参数). …………………… 2分

将 $\rho^2=x^2+y^2$ 和 $y=\rho\sin\theta$ 代入 $\rho^2=8\rho\sin\theta$,得 $x^2+y^2=8y$,

所以曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2+(y-4)^2=16$. ……………………… 4分

(2)由直线 l 与曲线 C 交于不同两点 M,N,得 $90°<\alpha<180°$. ……………………………………………… 5分

把直线 l 的参数方程代入曲线 C 的直角坐标方程,得 $t^2+8(\cos\alpha-\sin\alpha)t+16=0$. …………………………… 6分

则 $\Delta=[8(\cos\alpha-\sin\alpha)]^2-64=-128\sin\alpha\cos\alpha>0$.

设 M,N 对应的参数分别为 t_1,t_2,则 $t_1+t_2=8(\sin\alpha-\cos\alpha)$, $t_1t_2=16$. …………………………………… 7分

因为 $90°<\alpha<180°$,所以 $t_1+t_2=8(\sin\alpha-\cos\alpha)>0$, $t_1t_2=16>0$,所以 $t_1>0$, $t_2>0$,

所以 $|PM|+|PN|=t_1+t_2=8(\sin\alpha-\cos\alpha)=8\sqrt{2}\sin(\alpha-45°)$,

所以当且仅当 $\alpha=135°$ 时, $|PM|+|PN|$ 的最大值为 $8\sqrt{2}$. ……………………………………………… 10分

23. (1)解: $|x-1|+2|x+1|=\begin{cases}-3x-1, x\leqslant-1,\\ x+3, -1<x\leqslant1,\\ 3x+1, x>1.\end{cases}$ ………………………………………… 1分

当 $x\leqslant-1$ 时, $-3x-1\leqslant x+7$,得 $-2\leqslant x\leqslant-1$; ……………………………………………………… 2分

当 $-1<x\leqslant1$ 时, $x+3\leqslant x+7$,得 $-1<x\leqslant1$; ………………………………………………………… 3分

当 $x>1$ 时, $3x+1\leqslant x+7$,得 $1<x\leqslant3$. …………………………………………………………… 4分

综上,不等式 $|x-1|+2|x+1|\leqslant x+7$ 的解集 $M=[-2,3]$. ………………………………………………… 5分

(2)证明:由(1),得 $m=3$,则 $a+b=1$, $x+y=3$. ……………………………………………………………… 6分

由 a,b,x,y 都是正数及基本不等式,得 $\sqrt{a\cdot\frac{x}{3}}\leqslant\frac{a+\frac{x}{3}}{2}$, $\sqrt{b\cdot\frac{y}{3}}\leqslant\frac{b+\frac{y}{3}}{2}$,当且仅当 $a=\frac{x}{3}$, $b=\frac{y}{3}$,等号成立,

以上两式相加,得 $\sqrt{\frac{ax}{3}}+\sqrt{\frac{by}{3}}\leqslant\frac{a+\frac{x}{3}}{2}+\frac{b+\frac{y}{3}}{2}$. ……………………………………………… 7分

因为 $a+b=1$, $\frac{x}{3}+\frac{y}{3}=1$,所以 $\frac{a+\frac{x}{3}}{2}+\frac{b+\frac{y}{3}}{2}=\frac{a+b+\frac{x+y}{3}}{2}=\frac{1+1}{2}=1$, ……………………… 9分

即 $\sqrt{\frac{ax}{3}}+\sqrt{\frac{by}{3}}\leqslant1$,故 $\sqrt{ax}+\sqrt{by}\leqslant\sqrt{3}$. ………………………………………………… 10分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（http://www.zizzs.com/）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

微信搜一搜

自主选拔在线

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》