

高三数学试题

命题学校：重庆市长寿中学校

命题人：马杨芳 田 鹏

审题人：兰祥平

本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。

注意事项：

1. 答题前，务必将自己的姓名、准考证号等填写在答题卡规定的位置上。
2. 答选择题时，必须使用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑。
3. 答非选择题时，必须使用 0.5 毫米黑色签字笔，将答案书写在答题卡规定的位置上。
4. 考试结束后，将答题卷交回。

第 I 卷（选择题 共 60 分）

一、单选题（本大题共 8 小题，共 40.0 分。）

1. (原创) 集合 $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid y = \sqrt{x-3} + \ln(6-x)\}$ 的子集个数为 ()

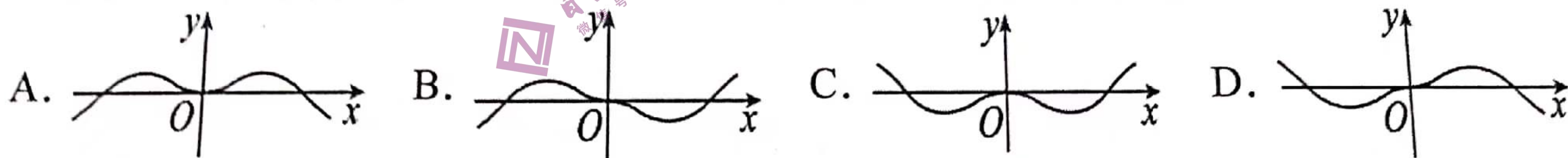
- A. 7 B. 8 C. 15 D. 16

2. (改编) 命题“ $\exists a \in [0, 1], a^4 + a^2 > 1$ ”的否定是 ()

- A. $\exists a \in [0, 1], a^4 + a^2 \leq 1$ B. $\forall a \notin [0, 1], a^4 + a^2 \leq 1$
C. $\exists a \notin [0, 1], a^4 + a^2 > 1$ D. $\forall a \in [0, 1], a^4 + a^2 \leq 1$

3. (改编) 已知第二象限角 α 的终边过点 $P(-4, 3)$ ，则 $\frac{\sin \alpha - 2 \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} =$ ()

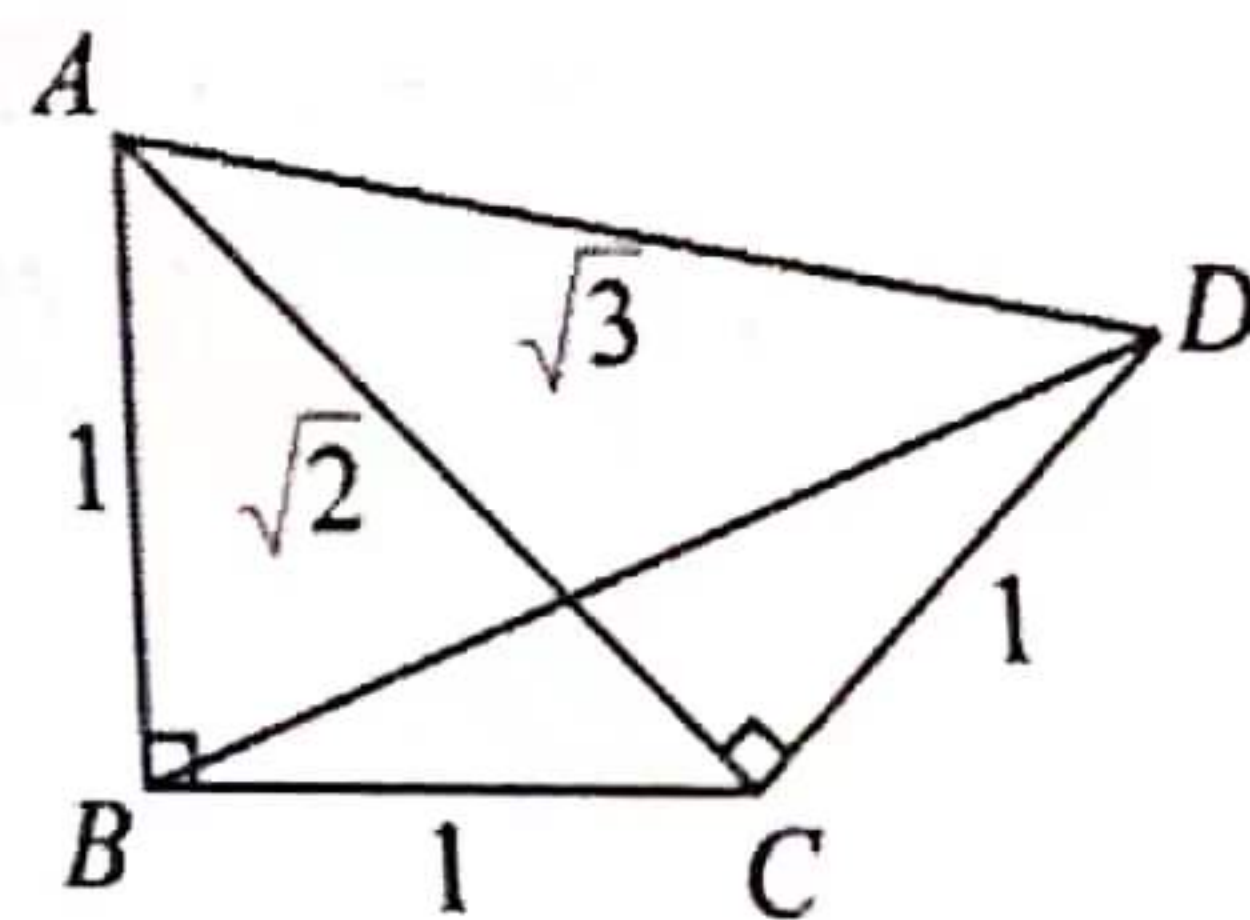
- A. -11 B. $-\frac{1}{2}$ C. $-\frac{5}{7}$ D. 1

4. (改编) 函数 $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ 的部分图象大致形状是 ()

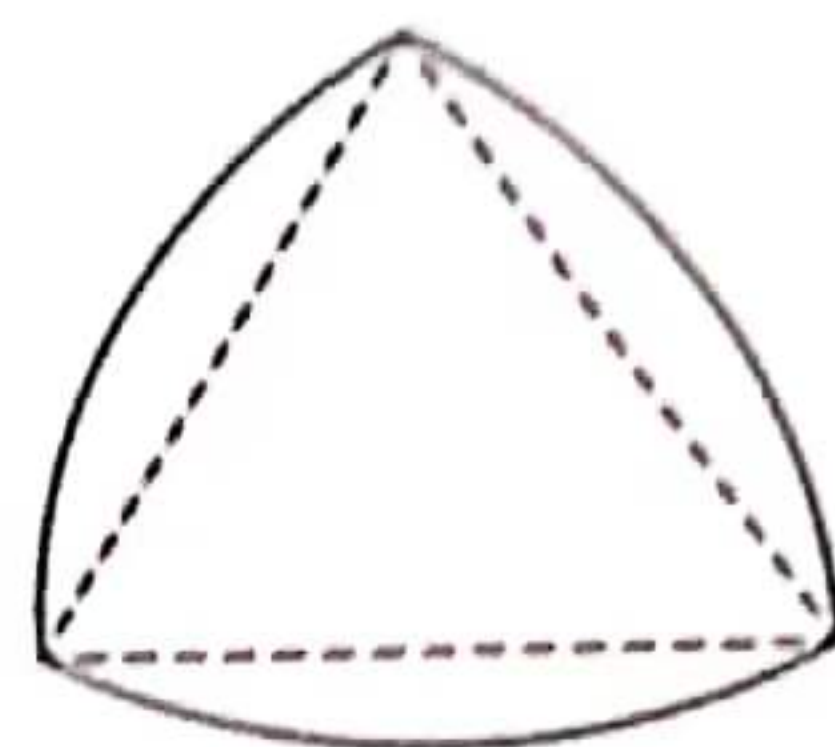
5. (改编) 古希腊数学家泰特托斯 (Theaetetus, 公元前 417—公元前 369 年) 曾详细地

讨论了无理数的理论，他通过图来构造出无理数 $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$,, 如图，则 $\cos \angle BAD =$ ()

- A. $\frac{2\sqrt{6} + 3\sqrt{3}}{6}$ B. $\frac{2\sqrt{3} + \sqrt{6}}{6}$
C. $\frac{2\sqrt{3} - \sqrt{6}}{6}$ D. $\frac{2\sqrt{6} - 3\sqrt{3}}{6}$



6. (改编) “莱洛三角形”是机械学家莱洛研究发现的一种曲边三角形, 它在很多特殊领域发挥了超常的贡献值。“莱洛三角形”是分别以正三角形的顶点为圆心, 以其边长为半径作圆弧, 由这三段圆弧组成的曲边三角形(如图所示). 现以边长为4的正三角形作一个“莱洛三角形”, 则此“莱洛三角形”的面积为()



- A. $8\pi - 8\sqrt{3}$ B. $8\pi - 12\sqrt{3}$ C. $16\pi - 8\sqrt{3}$ D. $16\pi - 4\sqrt{3}$

7. (改编) 定义在 $\mathbb{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = f(4-x)$, 当 $x \in [0, 2]$ 时, $f(x) = (\sqrt{e})^x$, 若在区间 $x \in [0, 10]$ 内, 函数 $g(x) = f(x) - mx - 1$, ($m > 0$) 有 5 个零点, 则实数 m 的取值范围是()

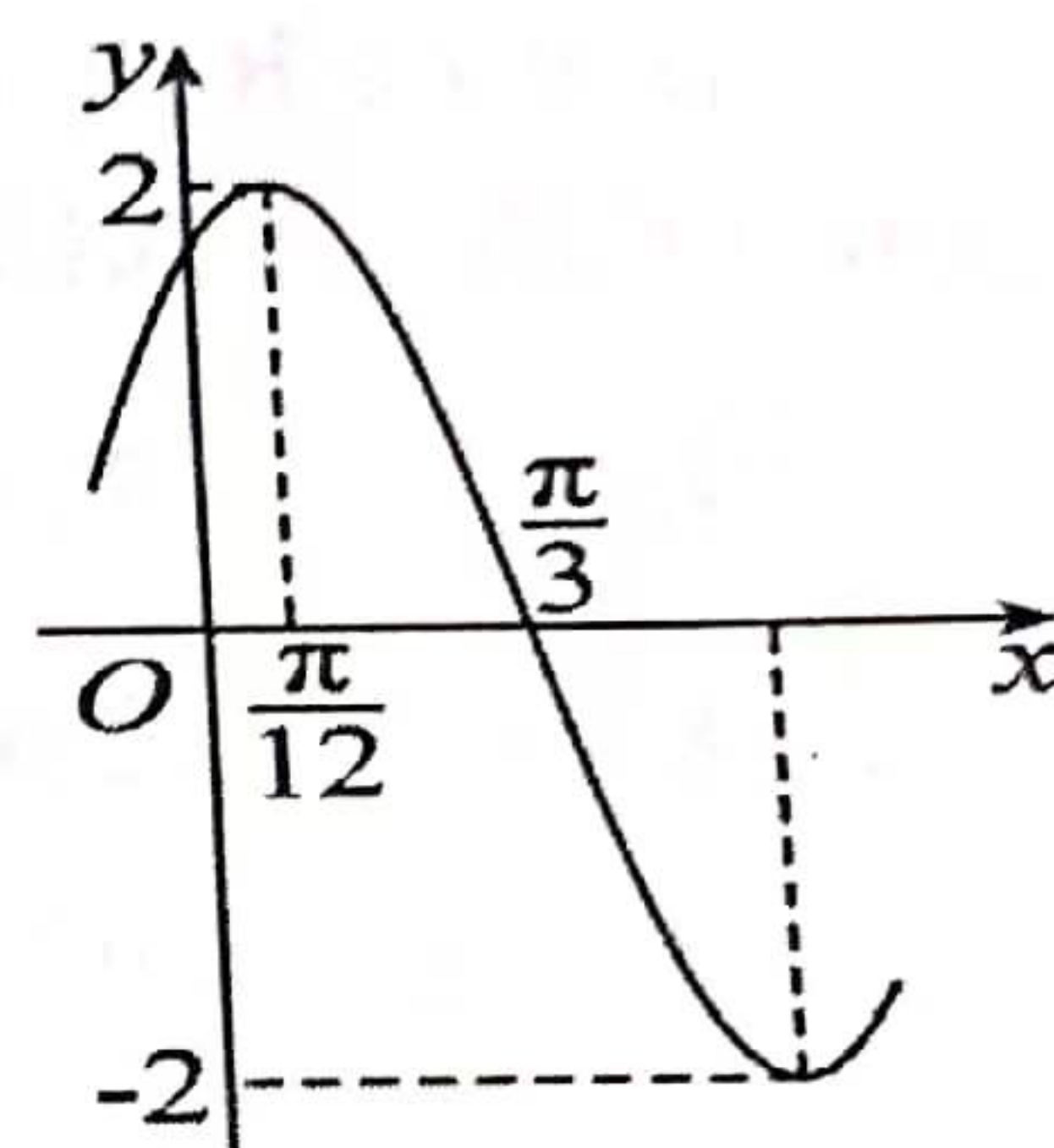
- A. $\left(0, \frac{e^5 - 1}{10}\right)$ B. $\left(0, \frac{e - 1}{10}\right]$ C. $\left(\frac{e - 1}{11}, \frac{e - 1}{6}\right)$ D. $\left[\frac{e - 1}{10}, \frac{e - 1}{6}\right)$

8. (改编) 正数 x, y 满足 $y \ln x + y \ln y = e^x$, 则 $x \cdot (y - 2)$ 的最小值为()

- A. $2 - 2\ln 2$ B. $2 + \ln 2$ C. $\frac{1}{2} \ln 2$ D. $-\frac{1}{2} \ln 2$

二、多选题 (本大题共 4 小题, 共 20.0 分。)

9. (改编) 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$, $\left(A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}\right)$ 部分图象如图所示, 下列说法正确的是()



- A. 函数 $y = f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{2\pi}{3}, 0\right)$ 中心对称

- B. 函数 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = -\frac{5\pi}{12}$ 对称

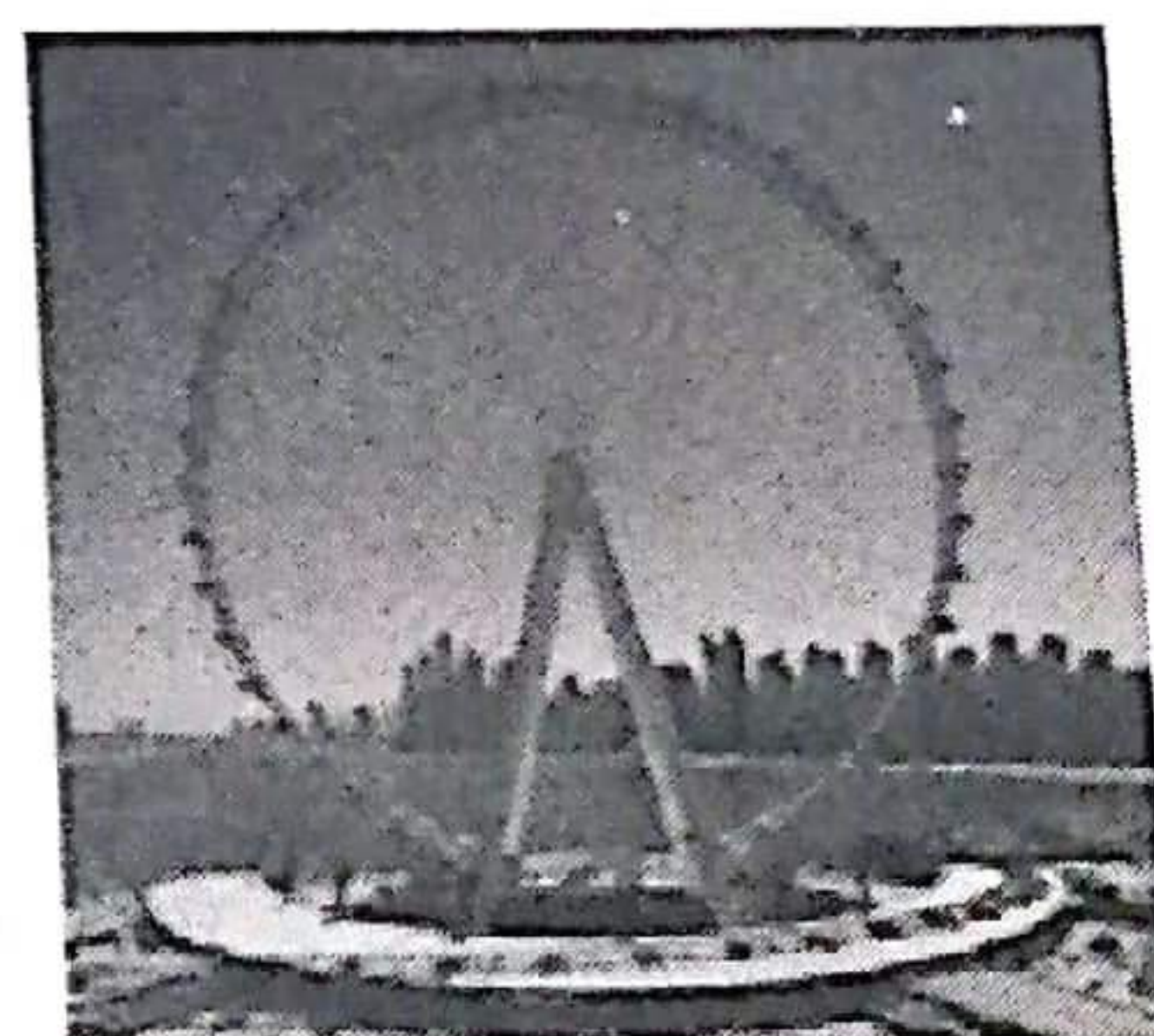
- C. 函数 $y = f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{4}, 0\right]$ 上单调递增

- D. 将函数 $y = \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位得到函数 $y = f(x)$ 的图象

10. (改编) 已知 $a > 0, b > 0$, 且 $a + b = 4$, 则()

- A. $\log_2 a + \log_2 b \geq 2$ B. $2^a + 2^b \geq 8$ C. $\frac{1}{a} + \frac{4}{b} \geq \frac{9}{4}$ D. $a^2 + b^2 \geq 8$

11. (改编) 摩天轮是一种大型转轮状的机械建筑设施。如图, 某摩天轮最高点距离地面高度为 120m, 转盘直径为 110m, 设置有 48 个座舱, 开启后按逆时针方向匀速旋转, 游客在座舱转到距离地面最近的位置进舱, 转一周大约需要 30 min. 游客甲坐上摩天轮的座舱, 开始转动 t min 后距离地面的高度为 $H(t)$ m. 游客乙所在座舱与甲所在座舱间隔 7 个座舱. 在运行一周的过程中, 甲、乙俩人距离地面的高度差 h m. 下述结论正确的是()



- A. $H(t) = 55 \sin\left(\frac{\pi}{15}t - \frac{\pi}{2}\right) + 65$

- B. $H(5) = 38.5$

- C. 在运行一周的过程中, $H(t) > 90$ 的时间超过 10 min

- D. $h_{\max} = 55$

12. (改编) 已知函数 $f(x) = e^x - (x-1) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, 则 ()

- A. 函数 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ 上单调递增
- B. 函数 $f(x)$ 在 $[-\pi, 0]$ 上有两个零点
- C. 对 $\forall x \in [-\pi, 0]$ 恒有 $f(x) - 2k \geq 0$, 则整数 k 的最大值为 -3
- D. 若 $0 < x < 1$, 则有 $f(x) < e - \ln x$

第 II 卷 (非选择题 共 90 分)

三、填空题 (本大题共 4 小题, 共 20.0 分。16 题前一个空 2 分, 后一个 3 分)

13. (改编) 已知向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的夹角为 120° , $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 3$, 则 $|5\vec{a} - \vec{b}| = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

14. (改编) 已知 α, β 是锐角, 且 $\sin \alpha = \frac{4}{7}\sqrt{3}$, $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{11}{14}$, 则 $\sin \beta = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

15. (改编) 已知函数 $f(x) = x + \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x)$, 若不等式 $f(2^x - 4^x) + f(m \cdot 2^x - 3) < 0$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 均成立, 则 m 的取值范围为 $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

16. (原创) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 满足 $a > b = 2$,

$9\sin^2(A - B) + \cos^2 C = 1$, 则 $3a^2 - c^2 = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$, $\triangle ABC$ 的面积最大值为 $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

四、解答题 (本大题共 6 小题, 共 70.0 分。)

17. (本小题 10 分) (改编) 已知集合 $A = \{x | 2 < x \leq 6\}$, $B = \{x | x^2 - 4x < 0\}$.

(1) 求 $A \cap B$, $C_{\mathbf{R}}(A \cup B)$.

(2) 已知集合 $C = \{x | m+1 < x < 2m-1\}$, 若满足 $\underline{\quad \quad \quad}$, 求实数 m 的取值范围.

请从① $C \subseteq (C \cap B)$, ② $C_{\mathbf{R}}C \supseteq C_{\mathbf{R}}B$, ③ $B \cap C = C$ 中选一个填入 (2) 中横线处进行解答.

18. (本小题 12 分) (改编) 已知函数 $f(x) = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) - 1, x \in \mathbf{R}$.

(1) 求函数 $y = f(x)$ 的最小正周期和单调递增区间;

(2) 求函数 $y = f(x)$ 在 $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的值域.

19. (本小题 12 分) (改编) 已知函数 $f(x) = ax + \ln x (a \in \mathbb{R})$, $g(x) = x^2 - 2x + 2$.

(1) 当 $a = -\frac{1}{2}$ 时, 求函数 $y = f(x)$ 在区间 $[1, e]$ 上的最大值和最小值;

(2) 若对任意的 $x_1 \in [-1, 2]$, 均存在 $x_2 \in (0, +\infty)$, 使得 $g(x_1) < f(x_2)$, 求 a 的取值范围.

20. (本小题 12 分) (改编) 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ,

满足 $(2b - c) \cdot \cos A = a \cdot \cos C$.

(1) 求 A 的大小;

(2) 若 $a = \sqrt{7}$, $c = 3$, D 为 BC 的中点, 求 AD .

21. (本小题 12 分) (原创) 近日, 随着李佳琦直播事件的持续发酵, 国货品牌上演花式直播. 现有一品牌商也想借这个热度, 采取了“量大价优”“广告促销”等方法, 提高其下某商品的销售额. 市场调查发现, 这种商品供不应求, 生产出来都能销售完. 且

此商品的月销售量 m (万件) 与广告促销费用 x (万元) ($x > 0$) 满足: $m = 12 - \frac{18}{2x+1}$,

该产品的单价 n 与销售量之间的关系定为: $\left(n = 9 + \frac{9}{m}\right)$ 万元, 已知生产一万件该产品的成本为 8 万元, 设该产品的利润为 y 万元.

(1) 求 y 与 x 的函数关系式 (利润 = 销售额 - 成本 - 广告促销费用)

(2) 当广告促销费用定为多少万元的时候, 该产品的利润最大? 最大利润为多少万元?

22. (本小题 12 分) (原创) 设 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, $f(x) = \frac{1 + \log_a x}{\log_a (x+1)}$.

(1) 若 $a = 2$, 求 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线方程;

(2) 若 $f(x)$ 存在极值点 x_0 . ①求 a 的取值范围; ②证明 $x_0 + f(x_0) \geq 3$