承德市重点高中高二 10 月联考 · 数学

参考答案、提示及评分细则

1\. D　$\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AC_1}$. 故选 D.

2\. B　设直线 l_1,l_2,l_3,l_4 的斜率分别为 k_1,k_2,k_3,k_4，由图可得直线 l_1,l_2 的斜率为负值，直线 l_3,l_4 的斜率为正值，因为直线越陡峭，斜率的绝对值越大，所以 $|k_1|<|k_2|$，$|k_4|<|k_3|$，所以 $k_2<k_1<0<k_4<k_3$，所以斜率最小的直线是 l_2. 故选B.

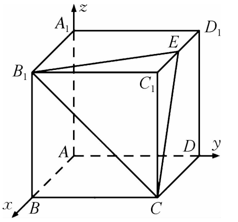
3\. C　由 $\boldsymbol{a}=(-1,2,-1)$，$\boldsymbol{b}=(1,3,-2)$，得 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(0,5,-3)$，$\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(-3,-4,3)$，所以 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=-29$. 故选 C.

4\. A　$\boldsymbol{n}=(x+4)\boldsymbol{a}+(y-x)\boldsymbol{b}+(-y+4)\boldsymbol{c}$，因为 $\boldsymbol{m}/\!/\boldsymbol{n}$，所以存在实数 λ，使得 $\boldsymbol{n}=\lambda\boldsymbol{m}$，所以 $(x+4)\boldsymbol{a}+(y-x)\boldsymbol{b}+(-y+4)\boldsymbol{c}=\lambda(2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$，所以 $\begin{cases}x+4=2\lambda,\\ y-x=3\lambda,\\ -y+4=-\lambda,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\lambda=2,\\ x=0,\\ y=6,\end{cases}$ 所以 $x+y=6$. 故选 A.

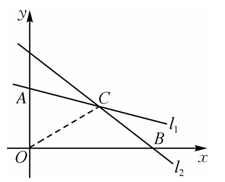
5\. C　由题意得 $\begin{cases}(-a)^2+(-2)^2-5a>0,\\ 5-a-4+\dfrac{5}{4}a>0,\end{cases}$ 解得 $\{a\,|-4<a<1$，或 $a>4\}$. 故选 C.

6\. B　将直线方程 $(1-3m)x+(1-m)y+4+4m=0$ 变形为 $(x+y+4)+(-3x-y+4)m=0$，所以 $\begin{cases}x+y+4=0,\\ -3x-y+4=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=4,\\ y=-8,\end{cases}$ 由此可得直线 l 恒过点 $B(4,-8)$，所以 A 到直线 l 的最远距离为 $|AB|$，此时直线 l 垂直于 AB. 又 $|AB|=\sqrt{(2-4)^2+(-4+8)^2}=2\sqrt{5}$，所以 A 到直线 l 的距离的最大值为 $2\sqrt{5}$. 故选 B.

7\. D　如图，以 A 为坐标原点，以 AB,AD,AA_1 所在直线分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系，所以 $A(0,0,0)$，$B_1(2,0,4)$，$C(2,4,0)$，$E(1,4,4)$，则 $\overrightarrow{B_1E}=(-1,4,0)$，$\overrightarrow{CE}=(-1,0,4)$，设 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$ 是平面 B_1CE 的一个法向量，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{B_1E}=-x+4y=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CE}=-x+4z=0,\end{cases}$ 令 $y=1$，则 $\boldsymbol{m}=(4,1,1)$，又 $\overrightarrow{AC}=(2,4,0)$，所以点 A 到平面 B_1CE 的距离为 $\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AC}|}{|\boldsymbol{m}|}=2\sqrt{2}$. 故选 D.



8\. A　直线 $l_1:x-4=-a(y-2)$，$l_2:2(x-4)=-a(y-2)$ 都过点 $(4,2)$，即点 C 的坐标是 $(4,2)$. 在 $x+ay=2a+4$ 中，令 $x=0$，得 $y=2+\dfrac{4}{a}$，所以 $A\left(0,2+\dfrac{4}{a}\right)$，同理可得 $B(4+a,0)$，所以 $S_{OACB}=S_{\triangle OAC}+S_{\triangle OCB}=\dfrac{1}{2}\left(2+\dfrac{4}{a}\right)\times4+\dfrac{1}{2}(4+a)\times2=8+\left(a+\dfrac{8}{a}\right)\geqslant8+2\sqrt{a\cdot\dfrac{8}{a}}=8+4\sqrt{2}$，当且仅当 $a=\dfrac{8}{a}$，即 $a=2\sqrt{2}$ 时等号成立. 所以当 $a=2\sqrt{2}$ 时，四边形 $OACB$ 的面积取最小值为 $8+4\sqrt{2}$. 故选 A.

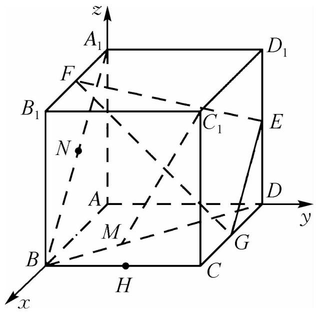


9\. ACD　点 P 关于原点对称的点是 $(4,-1,-2)$，A 正确；点 P 关于 x 轴对称的点是 $(-4,-1,-2)$，B 错误；点 P 关于平面 Oxz 对称的点是 $(-4,-1,2)$，C 正确；点 P 关于点 $(1,1,1)$ 对称的点是 $(6,1,0)$，D 正确. 故选ACD.

10\. ABD　将点 $(0,-3)$ 代入直线 $l_1:mx-y-3=0$ 中，等号成立，所以直线 l_1 恒过点 $(0,-3)$，故 A 正确；当 $m=0$ 时，直线 l_2 的斜率不存在，即倾斜角为 90°，故 B 正确；当 $l_1/\!/l_2$ 时，$\begin{cases}m=\dfrac{4}{m},\\ -3\neq\dfrac{6}{m},\end{cases}$ 解得 $m=2$，故 C 错误；当 $m=0$ 时，$l_1:y=-3$，$l_2:x=-\dfrac{3}{2}$，此时 $l_1\perp l_2$，故 D 正确. 故选 ABD.

11\. BD　由题可知 A,B 在 $x+y-3=0$ 的同侧，设点 B 关于直线 $x+y-3=0$ 的对称点为 $B'(a,b)$，则 $\begin{cases}\dfrac{a+6}{2}+\dfrac{b+2}{2}-3=0,\\ \dfrac{b-2}{a-6}\times(-1)=-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\ b=-3,\end{cases}$ 即 $B'(1,-3)$. 将军从出发点到河边的路线所在直线即为 AB'，又 $A(2,4)$，所以直线 AB' 的方程为 $7x-y-10=0$，故 A 错误；设将军在河边饮马的地点为 M，则 M 即为 $7x-y-10=0$ 与 $x+y-3=0$

的交点，所以 $M\left(\frac{13}{8},\frac{11}{8}\right)$，故 B 正确；将军从河边回军营的路线所在直线为 BM，又 $B(6,2)$，所以直线 BM 的方程为 $x-7y+8=0$，故 C 错误；总路程 $|MA|+|MB|=|MA|+|MB'|=|AB'|=\sqrt{(2-1)^2+(4+3)^2}=5\sqrt{2}$，所以“将军饮马”的总路程为 $5\sqrt{2}$，故 D 正确. 故选 BD.

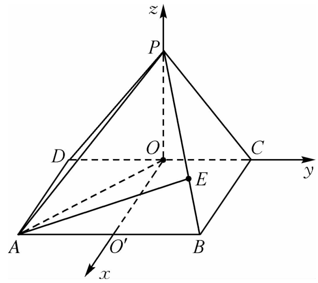


12. AD　以 A 为原点，以 AB,AD,AA_1 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，则 $A(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，$C(2,2,0)$，$D(0,2,0)$，$B_1(2,0,2)$，$D_1(0,2,2)$，$E(0,2,1)$，$F(1,0,2)$，$G(1,2,0)$，$H(2,1,0)$，设 $\overrightarrow{AH}=x\overrightarrow{AE}+y\overrightarrow{AF}+z\overrightarrow{AG}$，则 $(2,1,0)=x(0,2,1)+y(1,0,2)+z(1,2,0)$，所以 $\begin{cases}y+z=2,\\2x+2z=1,\\x+2y=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-1,\\y=\frac{1}{2},\\z=\frac{3}{2},\end{cases}$ 故 $x+y+z=1$，即 E,F,G,H 四点共面，故 A 正确；因为 $\overrightarrow{BD}=(-2,2,0)$，$\overrightarrow{EF}=(1,-2,1)$，所以 $|\cos\langle\overrightarrow{BD},\overrightarrow{EF}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{EF}|}{|\overrightarrow{BD}|\cdot|\overrightarrow{EF}|}=\frac{6}{\sqrt{8}\times\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 BD 与 EF 所成角的大小为 $\frac{\pi}{6}$，故 B 错误；假设在线段 BD 上存在点 M，符合题意. 设 $\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{BD}\ (0\leqslant\lambda\leqslant1)$，则 $\overrightarrow{MC_1}=\overrightarrow{BC_1}-\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BC_1}-\lambda\overrightarrow{BD}=(2\lambda,2-2\lambda,2)$，若 $MC_1\perp$ 平面 EFG，则 $\overrightarrow{MC_1}\cdot\overrightarrow{EF}=0$，$\overrightarrow{MC_1}\cdot\overrightarrow{EG}=0$. 因为 $\overrightarrow{EF}=(1,-2,1)$，$\overrightarrow{EG}=(1,0,-1)$，所以 $\begin{cases}2\lambda-4+4\lambda+2=0,\\2\lambda-2=0,\end{cases}$ 此方程组无解，所以在线段 BD 上不存在点 M，使得 $MC_1\perp$ 平面 EFG，故 C 错误；因为 $\overrightarrow{A_1B}=(2,0,-2)=2\overrightarrow{EG}$，所以 $A_1B\parallel EG$，又 $A_1B\not\subset$ 平面 EFG，$EG\subset$ 平面 EFG，所以 $A_1B\parallel$ 平面 EFG，故 A_1B 上的所有点到平面 EFG 的距离即为 B 到平面 EFG 的距离，是定值，又 $\triangle EFG$ 的面积是定值，所以在线段 A_1B 上任取一点 N，三棱锥 $N\text{-}EFG$ 的体积为定值，故 D 正确. 故选 AD.

13. 9　由 $A(0,-3,1)$，$B(k,2k,4)$，得 $\overrightarrow{AB}=(k,2k+3,3)$，因为 $\boldsymbol{n}=(-3,1,2)$ 是平面 α 的一个法向量，点 A,B 在平面 α 内，所以 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{AB}$，所以 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=(-3,1,2)\cdot(k,2k+3,3)=-3k+2k+3+6=0$，解得 $k=9$.

14. $9\sqrt{5}$　由 $AB:x+2y-3=0$，$CD:x+2y+7=0$ 知 $AB\parallel CD$，所以梯形 $ABCD$ 的高即为直线 AB 和 CD 间的距离 $d=\frac{|-3-7|}{\sqrt{1^2+2^2}}=2\sqrt{5}$，所以梯形 $ABCD$ 的面积为 $\frac{1}{2}(|AB|+|CD|)d=\frac{1}{2}\times(3+6)\times2\sqrt{5}=9\sqrt{5}$.

15. $\sqrt{5}+5$　线段 MN 中点的坐标为 $(1,-1)$，$k_{MN}=\frac{3-(-5)}{-1-3}=-2$，所以线段 MN 的中垂线的斜率为 $k=\frac{1}{2}$，所以线段 MN 的中垂线的方程为 $x-2y-3=0$，又圆心在直线 $3x+y+5=0$ 上，所以 $\begin{cases}x-2y-3=0,\\3x+y+5=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-1,\\y=-2,\end{cases}$ 所以圆心为 $(-1,-2)$，$r=\sqrt{(3+1)^2+(-5+2)^2}=5$，$|OP|\leqslant|OC|+r=\sqrt{5}+5$.



16. $\sqrt{6}$　取 AB 的中点为 O'，连接 PO,OO',AE，因为 $PC=PD$，O 为 CD 的中点，所以 $PO\perp CD$，又平面 $PCD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PCD\cap$ 平面 $ABCD=CD$，$PO\subset$ 平面 PCD，所以 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $PO\perp OO'$，又底面 $ABCD$ 是矩形，所以 $OO'\perp CD$，以点 O 为原点，OO',OC,OP 所在直线分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系如图所示，由 $PC\perp PD$，$PC=PD$，$CD=6$，得 $PO=3$，所以 $A(3,-3,0)$，$B(3,3,0)$，$P(0,0,3)$，则 $\overrightarrow{AO}=(-3,3,0)$，设 $\overrightarrow{BE}=\lambda\overrightarrow{BP}\ (0\leqslant\lambda\leqslant1)$，则 $E(3-3\lambda,3-3\lambda,3\lambda)$，$\overrightarrow{AE}=(-3\lambda,6-3\lambda,3\lambda)$，$|\overrightarrow{AE}|=\sqrt{27\lambda^2-36\lambda+36}$，$\left|\frac{\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AE}}{|\overrightarrow{AO}|}\right|=3\sqrt{2}$，因此点 E 到直线 AO 的距离 $d=\sqrt{|\overrightarrow{AE}|^2-\left|\frac{\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AE}}{|\overrightarrow{AO}|}\right|^2}=\sqrt{27\lambda^2-36\lambda+18}=\sqrt{27\left(\lambda-\frac{2}{3}\right)^2+6}$，当 $\lambda=\frac{2}{3}$ 时，d 取最小值 $\sqrt{6}$，即线段 PB 上的动点 E 到直线 AO 的距离的最小值为 $\sqrt{6}$.

17. 解：(1) 直线 BC 的方程为 $\frac{y-(-2)}{1-(-2)}=\frac{x-2}{5-2}$，化简，得 $x-y-4=0$，………………………………………… 2 分

所以点 A 到直线 BC 的距离 $d=\frac{|-1-1-4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$. ………………………………………… 4 分

(2)设$\triangle ABC$的外接圆的方程为$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$， …………………………………… 5分

将A,B,C的坐标代入，得$\begin{cases}(-1)^2+1^2-D+E+F=0,\\2^2+(-2)^2+2D-2E+F=0,\\5^2+1^2+5D+E+F=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-D+E+F=-2,\\2D-2E+F=-8,\\5D+E+F=-26,\end{cases}$ …………………… 7分

解得$\begin{cases}D=-4,\\E=-2,\\F=-4.\end{cases}$ …………………………………………………………………………… 9分

故所求圆的方程为$x^2+y^2-4x-2y-4=0$. ………………………………………………………… 10分

18.(1)证明：由题意知$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=2,\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=2,\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，因为$D$为$B_1C$的中点，所以$\overrightarrow{A_1D}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{A_1C}+\overrightarrow{A_1B_1})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AA_1})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$， ………………………… 3分

$\overrightarrow{A_1D}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})\cdot(-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\frac{1}{2}(-\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}^2-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})=\frac{1}{2}(-4+2+4-2)=0$，所以$\overrightarrow{A_1D}\perp\overrightarrow{BC}$，即$A_1D\perp BC$. ………………………………………………………………………………………… 6分

(2)解：$\overrightarrow{AC_1}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},\overrightarrow{B_1C}=-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c},\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{B_1C}=-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}-\boldsymbol{c}^2=-2,|\overrightarrow{AC_1}|=\sqrt{\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2+2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}}=2\sqrt{3},|\overrightarrow{B_1C}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}}=2\sqrt{3}$， ………………………………… 9分

设AC_1与B_1C所成角为θ，则$\cos\theta=|\cos\langle\overrightarrow{AC_1},\overrightarrow{B_1C}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{B_1C}|}{|\overrightarrow{AC_1}||\overrightarrow{B_1C}|}=\frac{1}{6}$，即异面直线$AC_1$与$B_1C$所成角的余弦值为$\frac{1}{6}$. ………………………………………………………………………………………… 12分

19.解：(1)直线l_1的斜率为$k_1=\frac{3+5}{3+1}=2$，所以直线l_1的方程为$y-3=2(x-3)$，即$2x-y-3=0$. ……………… 2分

设直线l_2的斜率为k_2，因为$l_1\perp l_2$，所以$k_1k_2=-1$，所以$k_2=-\frac{1}{2}$，所以直线l_2的方程为$y=-\frac{1}{2}(x+1)$，即$x+2y+1=0$. ………………………………………………………………………………………… 5分

(2)联立$\begin{cases}2x-y-3=0,\\x+2y+1=0,\end{cases}$得$\begin{cases}x=1,\\y=-1,\end{cases}$所以直线$l_1$与$l_2$的交点坐标为$(1,-1)$. ……………………… 7分

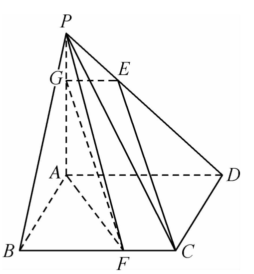
当直线l_3过原点时，直线l_3的方程为$y=-x$. ………………………………………………………… 9分

当直线l_3不过原点时，设直线l_3的方程为$\frac{x}{3a}+\frac{y}{a}=1$，又直线$l_3$经过$l_1$与$l_2$的交点，所以$\frac{1}{3a}+\frac{-1}{a}=1$，得$a=-\frac{2}{3}$，

所以直线l_3的方程为$x+3y+2=0$.

综上，直线l_3的方程为$y=-x$或$x+3y+2=0$. ……………………………………………………… 12分

20.(1)证明：如图，在棱PA上取点G，使得$PG=\frac{1}{3}PA$，连接EG,FG，



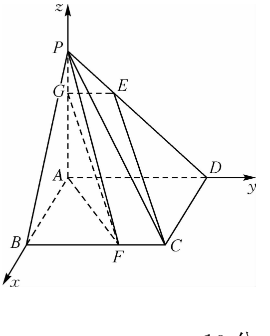
因为$\frac{PE}{PD}=\frac{PG}{PA}=\frac{1}{3}$，所以$GE\parallel AD$且$GE=\frac{1}{3}AD$， …………………………………… 2分

由正方形$ABCD$，$CF=\frac{1}{3}BC$，得$CF\parallel AD$且$CF=\frac{1}{3}AD$，所以$GE\parallel CF$且$GE=CF$，

所以四边形$FGEC$为平行四边形，所以$CE\parallel GF$， …………………………………… 4分

又$CE\not\subset$平面PAF，$GF\subset$平面PAF，所以$CE\parallel$平面PAF. ………………………… 6分

(2)解：若$AD=AP$，则可设$AD=AP=3$，所以$AB=BC=3$.



以A为原点，AB,AD,AP所在的直线分别为x轴，y轴，z轴建立如图所示的空间直角坐标系，

则点$A(0,0,0),C(3,3,0),D(0,3,0),P(0,0,3),F(3,2,0)$，

则$\overrightarrow{CD}=(-3,0,0),\overrightarrow{AP}=(0,0,3),\overrightarrow{AF}=(3,2,0)$， ……………………………… 8分

设平面PAF的法向量为$\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，则

由$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AP}=(x,y,z)\cdot(0,0,3)=3z=0,\\\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AF}=(x,y,z)\cdot(3,2,0)=3x+2y=0,\end{cases}$得$\begin{cases}z=0,\\x=-\frac{2y}{3},\end{cases}$

令$y=3$，得平面PAF的一个法向量为$\boldsymbol{m}=(-2,3,0)$， ………………………………………… 10分

设直线CD与平面PAF所成角的大小为θ，

则 $\sin\theta=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CD}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\overrightarrow{CD}|}=\dfrac{|(-2,3,0)\cdot(-3,0,0)|}{\sqrt{13}\times 3}=\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$,

即直线 CD 与平面 PAF 所成角的正弦值为$\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$. ………………………………………………………… 12 分

21. 解:(1)设点 $A(m,n)$,则 AB 中点 M 的坐标为$\left(\dfrac{m+1}{2},\dfrac{n-2}{2}\right)$, ………………………………………… 1 分

由题意知点 A 在直线 $x+7y-12=0$ 上,点 M 在直线 $2x-y+1=0$ 上, ………………………………… 2 分

所以$\begin{cases}m+7n-12=0,\\ 2\times\dfrac{m+1}{2}-\dfrac{n-2}{2}+1=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}m=-2,\\ n=2.\end{cases}$

即点 A 的坐标为$(-2,2)$. ………………………………………………………………………… 4 分

(2)设点 B 关于直线 $x+7y-12=0$ 的对称点为 B',则由角的对称性知点 B' 在直线 AC 上,

设点 B' 的坐标为(x,y),则点 BB' 的中点坐标为$\left(\dfrac{x+1}{2},\dfrac{y-2}{2}\right)$, ………………………………………… 6 分

则$\begin{cases}\dfrac{y+2}{x-1}\times\left(-\dfrac{1}{7}\right)=-1,\\ \dfrac{x+1}{2}+7\times\dfrac{y-2}{2}-12=0,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=2,\\ y=5,\end{cases}$即点 B' 的坐标为$(2,5)$. ……………………………… 9 分

直线 AB' 的斜率为 $k=\dfrac{5-2}{2-(-2)}=\dfrac{3}{4}$, …………………………………………………………………… 11 分

所以直线 AB' 即 AC 的方程为 $y-2=\dfrac{3}{4}(x+2)$,即 $3x-4y+14=0$. ………………………………………… 12 分

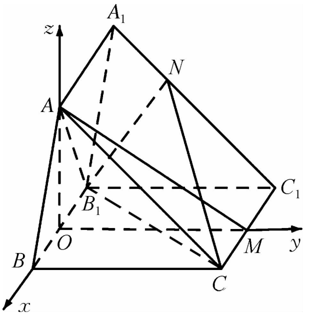
22. (1)证明:取棱 BB_1 的中点 O,连接 AO,OM.

因为四边形 BB_1A_1A 是菱形,所以 $AB=BB_1$,又$\angle BB_1A=60°$,所以$\triangle BB_1A$ 为等边三角形,所以 $BB_1\perp OA$. ……… 1 分

因为四边形 BCC_1B_1 为正方形且 O,M 分别是 BB_1,CC_1 的中点,所以 $BB_1\perp OM$, ………………………… 2 分

又 $OA\cap OM=O$,OA,$OM\subset$平面 OAM,所以 $BB_1\perp$平面 OAM, ………………………………………… 3 分

因为 $AM\subset$平面 OAM,所以 $BB_1\perp AM$. ………………………………………………………………… 4 分



(2)解:因为平面 $BB_1A_1A\perp$平面 BCC_1B_1,平面 $BB_1A_1A\cap$平面 $BCC_1B_1=BB_1$,且 $OA\perp BB_1$,$OA\subset$平面 BB_1A_1A,所以 $OA\perp$平面 BCC_1B_1. …………………………… 5 分

以 O 为坐标原点,以 OB,OM,OA 所在的直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴建立如图所示的空间直角坐标系.

不妨设 $BC=2$,则点 $C(1,2,0)$,$B_1(-1,0,0)$,$A_1(-2,0,\sqrt{3})$,$C_1(-1,2,0)$. …… 6 分

$\overrightarrow{B_1C_1}=(0,2,0)$,$\overrightarrow{A_1B_1}=(1,0,-\sqrt{3})$,设 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$为平面 B_1C_1N 的一个法向量,

则由$\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{B_1C_1}=0$ 及$\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{A_1B_1}=0$,得$\begin{cases}2y_1=0,\\ x_1-\sqrt{3}z_1=0,\end{cases}$ 不妨取 $z_1=1$,则$\boldsymbol{n}_1=(\sqrt{3},0,1)$.

…………………………………………………………………………………………… 7 分

假设棱 A_1C_1 上(除端点外)存在点 N 满足题意,令$\overrightarrow{A_1N}=\lambda\overrightarrow{A_1C_1}(0<\lambda<1)$,得 $N(\lambda-2,2\lambda,\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda)$,

$\overrightarrow{B_1C}=(2,2,0)$,$\overrightarrow{B_1N}=(\lambda-1,2\lambda,\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda)$,设$\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$为平面 B_1CN 的一个法向量,则由$\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{B_1C}=0$ 及$\boldsymbol{n}_2\cdot$ $\overrightarrow{B_1N}=0$,得$\begin{cases}2x_2+2y_2=0,\\ (\lambda-1)x_2+2\lambda y_2+(\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda)z_2=0,\end{cases}$不妨取 $x_2=1$,得$\boldsymbol{n}_2=\left(1,-1,\dfrac{1+\lambda}{\sqrt{3}(1-\lambda)}\right)$. ……………………… 9 分

设平面 B_1CN 与平面 B_1C_1N 的夹角为 θ,则

$\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle|=\left|\dfrac{\sqrt{3}+\dfrac{1+\lambda}{\sqrt{3}(1-\lambda)}}{2\cdot\sqrt{2+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)^2}}\right|=\dfrac{\sqrt{31}}{31}$,解得 $\lambda=\dfrac{3}{2}$或 $\lambda=\dfrac{13}{4}$. ………………………………… 11 分

因为 $\lambda=\dfrac{3}{2}\notin(0,1)$,$\lambda=\dfrac{13}{4}\notin(0,1)$,所以在棱 A_1C_1(除两端点外)上不存在点 N,使得平面 B_1CN 与平面 B_1C_1N 夹角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{31}}{31}$. ………………………………………………………………………………… 12 分