

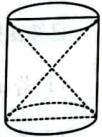
高二期末考试数学试卷(文科)

考生注意:

1. 本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,共 150 分。考试时间 120 分钟。
2. 请将各题答案填写在答题卡上。
3. 本试卷主要考试内容:高考全部内容。

第 I 卷

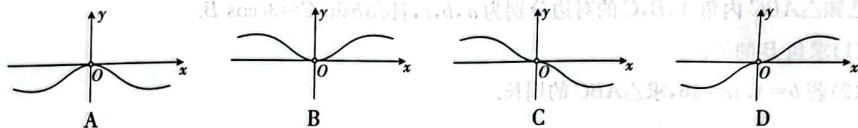
一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{2x + 3 < 6\}$, 则 $A \cap B =$
 - A. $\{0\}$
 - B. $\{1\}$
 - C. $\{0, 1\}$
 - D. $\{1, 2\}$
2. $|1 - \frac{2i}{1-i}| =$
 - A. $\sqrt{5}$
 - B. $\sqrt{3}$
 - C. $\sqrt{2}$
 - D. 1
3. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 2x - y - 1 \leq 0, \\ x + 2 \geq 0, \\ y - 2 \leq 0, \end{cases}$ 则 $z = x + y$ 的最大值为
 - A. -7
 - B. 0
 - C. $\frac{7}{2}$
 - D. 7
4. 曲线 $y = x^5 + x^2$ 在点 $(1, 2)$ 处的切线的斜率为
 - A. 7
 - B. 6
 - C. 5
 - D. 4
5. 已知 $a = \sin 2$, $b = \log_2 0.2$, $c = 3^{0.1}$, 则
 - A. $a < b < c$
 - B. $b < a < c$
 - C. $a < c < b$
 - D. $c < a < b$
6. 如图,圆柱内部有两个与该圆柱底面重合的圆锥,若从该圆柱内部任取一点,则该点不在这两个圆锥内部的概率为
 - A. $\frac{2}{3}$
 - B. $\frac{1}{2}$
 - C. $\frac{1}{3}$
 - D. $\frac{1}{4}$
7. 过圆锥曲线的焦点且与焦点所在的对称轴垂直的弦被称为该圆锥曲线的通径,清代数学家明安图在《割圆密率捷法》中,也称圆的直径为通径. 已知圆 $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$ 的一条通径

与抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的通径恰好构成一个正方形的一组邻边,则 $p =$

- A. $\frac{1}{2}$
- B. 1
- C. 2
- D. 4

8. 函数 $f(x) = \frac{x^3 e^x}{e^{2x} - 1}$ 的部分图象大致为

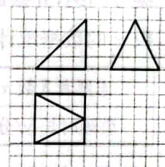


9. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $2a_{510} - a_8 = 4$, 则 $\{a_n\}$ 的前 2023 项和 $S_{2023} =$

- A. 2023
- B. 4046
- C. 6069
- D. 8092

10. 如图,网格纸上绘制了一个几何体的三视图,网格小正方形的边长为 1, 则该几何体的表面积为

- A. $32 + 8\sqrt{5}$
- B. $24 + 8\sqrt{5} + 8\sqrt{2}$
- C. $36 + 8\sqrt{2}$
- D. $28 + 8\sqrt{5} + 8\sqrt{2}$



11. 当点 $M(2, -3)$ 到直线 $(4m-1)x - (m-1)y + 2m+1 = 0$ 的距离取得最大值时, $m =$

- A. 2
- B. $\frac{4}{7}$
- C. -2
- D. -4

12. 已知函数 $f(x) = 2\sqrt{3} \sin \omega x \cos \omega x - 2\sin^2 \omega x + 1 (\omega > 0)$ 在 $(0, \pi)$ 上恰有 5 个零点, 则 ω 的取值范围为

- A. $[\frac{29}{6}, \frac{35}{6})$
- B. $(\frac{29}{6}, \frac{35}{6}]$
- C. $[\frac{29}{12}, \frac{35}{12})$
- D. $(\frac{29}{12}, \frac{35}{12}]$

第 II 卷

二、填空题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。把答案填在答题卡中的横线上。

13. 已知向量 $a = (m, m+2)$, $b = (6, 3)$, 若 $a \parallel b$, 则 $m =$ \blacktriangle .
14. 甲、乙两位同学从 3 项不同的体育项目中任选 1 项参加, 则这两人选择的体育项目相同的概率为 \blacktriangle .
15. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 $\sqrt{3}$, 则双曲线 C 的两条渐近线夹角(锐角)的正切值为 \blacktriangle .
16. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+2} = \begin{cases} a_{n+1} - a_n, & a_n < a_{n+1}, \\ a_n - a_{n+1}, & a_n \geq a_{n+1}, \end{cases}$ 则 $\{a_n\}$ 的前 2023 项和 $S_{2023} =$ \blacktriangle .

三、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分.

17. (12 分)

已知 $\triangle ABC$ 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $\sqrt{3}b \sin C = 3c \cos B$.

- (1) 求角 B 的值;
- (2) 若 $b=4, ac=16$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

18. (12 分)

为倡导全校师生共读好书, 某校图书馆新购入一批图书, 需要招募若干名志愿者对新书进行编号归纳, 并摆放到对应的书架上. 已知整理图书所需时长 y (单位: 分) 与招募的志愿者人数 x 的数据统计如下表:

志愿者人数 x	1	2	3	4	5
整理时长 y /分	60	45	40	30	25

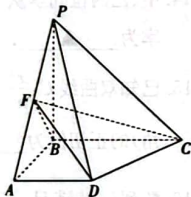
- (1) 求 y 关于 x 的线性回归方程 $\hat{y} = bx + \hat{a}$;
- (2) 由 (1) 中的线性回归方程求出每一个 x_i 对应整理图书所需时长的估计值 \hat{y}_i , 若满足 $|\hat{y}_i - y_i| < 3$, 则将数据 (x_i, y_i) 称为一组正常数据, 求表格中的五组数据中为正常数据的组数.

附: 线性回归方程 $\hat{y} = bx + \hat{a}$ 中, $b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}$, $\hat{a} = \bar{y} - b \bar{x}$.

19. (12 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PB \perp$ 平面 $ABCD$, 底面 $ABCD$ 为直角梯形, $\angle BAD = \angle ABC = 90^\circ$, $PB = AB = BC = 2AD = 6$, F 为 PA 的中点.

- (1) 证明: $BF \perp PD$.
- (2) 求点 P 到平面 CDF 的距离.



20. (12 分)

已知函数 $f(x) = x^2 e^x - \frac{1}{3} x^3 - a x^2$.

- (1) 当 $a=1$ 时, 求 $f(x)$ 的极值;
- (2) 若 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上恰有 1 个极值点, 求 a 的取值范围.

21. (12 分)

椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右顶点分别为 $A_1(-2, 0), A_2(2, 0)$, 上顶点为 $B(0, 1)$, Q 是椭圆 C 在第一象限内的一动点, 直线 A_2Q 与直线 A_1B 相交于点 P , 直线 BQ 与 x 轴相交于点 R .

- (1) 求椭圆 C 的方程.
- (2) 试判断直线 PR 是否经过定点. 若经过, 求出该定点的坐标; 若不过, 请说明理由.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10 分)

在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2\cos \alpha, \\ y = 1 + 2\sin \alpha \end{cases}$ (α 为参数), 以坐标原点为极点,

x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 直线 l 的极坐标方程为 $\tan \theta = 3$.

- (1) 求曲线 C 的普通方程和直线 l 的直角坐标方程;
- (2) 若直线 l 与曲线 C 相交于 M, N 两点, 已知点 $P(1, 3)$, 求 $|PM| + |PN|$.

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10 分)

已知函数 $f(x) = |x+a| + |x - \frac{1}{a}|$.

- (1) 若 $a=2$, 求不等式 $f(x) \leq 7$ 的解集;
- (2) 若 $f(x) \geq \frac{10}{3}$ 恒成立, 求 a 的取值范围.