

试卷类型:A

高二年级考试

数 学 试 题

2021.07

本试卷共4页,22小题,满分150分。考试用时120分钟。

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上。用2B铅笔将试卷类型填涂在答题卡相应位置上。将条形码横贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”。

2. 作答选择题时,选出每小题答案后,用2B铅笔在答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑;如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案。答案不能答在试卷上。

3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答,答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上;如需改动,先划掉原来的答案,然后再写上新答案;不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。

4. 考生必须保持答题卡的整洁。考试结束后,将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 函数 $y = \frac{1}{2}x^2 - \ln x$ 的单调递减区间为

- A. $(-1, 1]$ B. $(0, 1]$ C. $[1, +\infty)$ D. $(0, +\infty)$

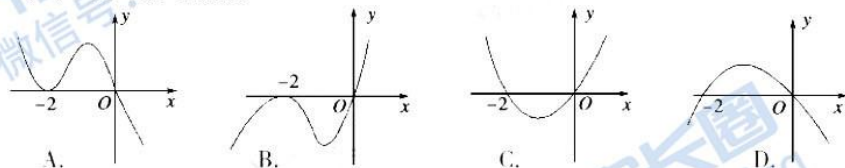
2. 已知函数 $f(x) = \ln(3x) + 4x$, 则 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1-2\Delta x) - f(1)}{\Delta x} =$

- A. 5 B. -5 C. -10 D. 10

3. 在4重伯努利试验中,事件A发生的概率相同,若事件A至少发生1次的概率为 $\frac{65}{81}$, 则事件A在一次试验中发生的概率为

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{5}{6}$ D. $\frac{3}{4}$

4. 已知 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的导函数,且函数 $f(x)$ 在 $x = -2$ 处取得极小值,则函数 $y = xf'(x)$ 的图象可能是



5. 航空母舰“山东舰”在某次舰载机起降飞行训练中,有5架飞机准备着舰,如果甲乙两机必须相邻着舰,而甲丁两机不能相邻着舰,则不同的着舰方法有

- A. 36 B. 24 C. 16 D. 12

高二数学试题 第1页 (共4页)

6. 整数 55^{55} 除以 7 的余数为

- A. 6 B. 5 C. 3 D. 1

7. 某学校高三 5 班要从 8 名班干部 (其中 5 名男生, 3 名女生) 中选取 3 人参加学校优秀班干部评选, 设事件 A = “男生甲被选中”, 事件 B = “有两名女生被选中”, 则 $P(B|A)$ =

- A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{7}$ C. $\frac{3}{8}$ D. $\frac{3}{7}$

8. 某大学暑期将开展 “贫困山区留守儿童支教” 活动, 学校打算安排 3 名老师和 4 名学生分别去甲、乙、丙三个山区, 其中 1 名老师和 2 名学生去甲地支教, 另外 2 名老师和 2 名学生分两组 (每组老师和学生各 1 人) 分别去乙、丙两地支教, 则所有不同的安排方案有

- A. 36 种 B. 48 种 C. 72 种 D. 144 种

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 下列结论正确的是

- A. 若 $C_{10}^m = C_{10}^{m-2}$, 则 $m = 3$
B. 若 $A_{n-1}^2 - A_n^2 = 12$, 则 $n = 6$
C. 在 $(1+x)^2 + (1+x)^3 + (1+x)^4 + \cdots + (1+x)^{11}$ 的展开式中, 含 x^2 的项的系数是 220
D. $(x-1)^8$ 的展开式中, 第 4 项和第 5 项的二项式系数最大

10. 若随机变量 X, Y 的概率分布函数分别为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}, \quad g(x) = \frac{1}{0.6\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+0.5)^2}{2 \times 0.6^2}},$$

$f(x), g(x)$ 的图象如图所示, $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

($\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0$), 则下列结论正确的是

附: 若随机变量 $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则

$$P(\mu - \sigma \leq Z \leq \mu + \sigma) = 0.6827, P(\mu - 2\sigma \leq Z \leq \mu + 2\sigma) = 0.9545, P(\mu - 3\sigma \leq Z \leq \mu + 3\sigma) = 0.9973.$$

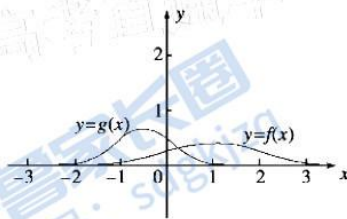
- A. $P(X > 1) = P(Y < -\frac{1}{2})$ B. $\sigma_1 < \sigma_2$
C. $P(X > 2) = 0.15865$ D. $(0.7 < Y \leq 1.3) = 0.0428$

11. 设随机变量 ξ 的分布列为 $P(\xi = k) = \frac{a}{k+1}$ ($k = 1, 2, 5$), $a \in R, E(\xi), D(\xi)$ 分别为随机变量 ξ 的数学期望与方差, 则下列结论正确的是

- A. $P(0 < \xi < 3.5) = \frac{5}{6}$ B. $E(3\xi + 1) = 7$ C. $D(\xi) = 2$ D. $D(3\xi + 1) = 6$

12. 已知函数 $f(x) = \ln(x+1) - a \sin x, a \in R$, 则下列结论正确的是

- A. 当 $a = 1$ 时, $f(x)$ 在 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y = 0$
B. 当 $a = 1$ 时, $f'(x)$ 在 $(-1, \frac{\pi}{2})$ 上存在唯一极大值点 x_0
C. 存在 a , 使得 $f(x)$ 有且仅有 2 个零点
D. 存在 a , 使得 $f(x)$ 有且只有一个零点



三、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分。

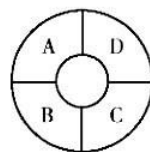
13. 某射手射击所得环数 ξ 的分布列如下:

ξ	7	8	9	10
P	x	0.1	y	0.4

已知 ξ 的数学期望 $E(\xi) = 8.9$, 则 $y =$ _____.

14. 有3台车床加工同一型号的零件,第1台加工的次品率为6%,第2,3台加工的次品率均为5%;加工出来的零件混放在一起,且第1,2,3台车床加工的零件数分别占总数的25%,30%,45%.现从加工出来的零件中任取一个零件,则取到的零件是次品的概率为_____,取到的零件是次品,且是第3台车床加工的概率为_____.

15. 如图所示,将一环形花坛分成A,B,C,D四块,现有5种不同的花供选种,要求在每块里种1种花,且相邻的2块种不同的花,则不同的种法总数为_____.



16. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ 2x + 1, & x \leq 0 \end{cases}$,若方程 $f(x) = ax$ 有三个不同的实数根,则实数 a 的取值范围为_____.

四、解答题:本题共6小题,共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10分)

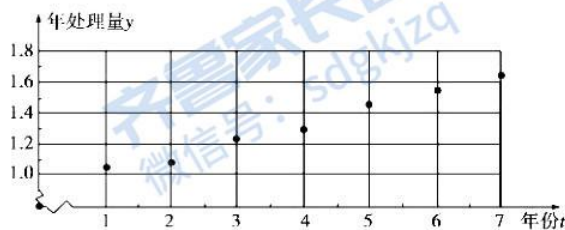
已知在二项式 $(\sqrt{x} - \frac{2}{x})^n$ ($n \geq 2, n \in \mathbb{N}^+$)的展开式中,前三项系数的和是97.

- (1)求 n 的值;
- (2)求其展开式中所有的有理项.

18. (12分)

右图是某市2014年至2020年生活垃圾无害化处理量(单位:万吨)的散点图.

注:年份代码1~7分别对应年份2014~2020.



- (1)由散点图看出,可用一元线性回归模型拟合 y 与 t 的关系,请用相关系数加以说明;
- (2)建立 y 关于 t 的经验回归方程(系数精确到0.01),预测2022年该市生活垃圾无害化处理量.

$$\text{参考公式: } r = \frac{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$$

$$\text{经验回归方程 } \hat{y} = \hat{b}t + \hat{a} \text{ 中 } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2}, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{t}.$$

$$\text{参考数据: } \sum_{i=1}^7 y_i = 9.32, \sum_{i=1}^7 t_i y_i = 40.17, \sum_{i=1}^7 (y_i - \bar{y})^2 = 0.55, \sqrt{7} \approx 2.646.$$

19. (12分)

已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - ax + (a-1)\ln x$, 其中 $a > 1$.

- (1) 若 $a = 2$, 求函数 $f(x)$ 的图象在点 $(2, f(2))$ 处的切线方程;
(2) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

20. (12分)

某工厂为提高生产效率, 开展技术创新活动, 提出了完成某项生产任务的甲、乙两种新的生产方式. 为比较两种生产方式的效率, 选取40名工人, 将他们随机分成两组, 每组20人, 第一组工人用甲种生产方式, 第二组工人用乙种生产方式. 根据工人完成生产任务的工作时间(单位: min)绘制了如下表格:

完成任务工作时间	(60,70]	(70,80]	(80,90]	(90,100]
甲种生产方式	2人	3人	10人	5人
乙种生产方式	5人	10人	4人	1人

- (1) 将完成生产任务所需时间超过80min和不超过80min的工人数填入下面的列联表:

生产方式	工作时间		合计
	超过80min	不超过80min	
甲			
乙			
合计			

- (2) 根据(1)中的列联表, 依据小概率值 $\alpha = 0.01$ 的独立性检验, 能否认为甲、乙两种生产方式的效率有差异?
(3) 若从完成生产任务所需的工作时间在(60,70]的工人中选取3人去参加培训, 设 X 为选出的3人中采用甲种生产方式的人数, 求随机变量 X 的分布列和数学期望.

$$\text{附: } \chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

α	0.1	0.05	0.01	0.005	0.001
χ_{α}^2	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

21. (12分)

某果农在其承包的100亩果园中种植一种原生态水果(每年种植一季), 每亩的种植成本为5000元, 由于受天气和市场供求关系的影响, 此水果的亩产量和销售价格均具有随机性, 且互不影响. 根据近几年的数据得知, 每季亩产量为500kg的概率为0.4, 亩产量为800kg的概率为0.6, 市场销售价格 c (单位: 元/kg) 与其概率 p 的关系满足 $c = \begin{cases} 20, & p = 0.3 \\ 30, & p = 0.7 \end{cases}$.

- (1) 设 X 表示此果农某季所获得的利润, 求 X 的分布列和数学期望;
(2) 求5年中恰有4年此果农的利润高于100万元的概率.

22. (12分)

已知函数 $f(x) = \ln x + \frac{1}{2}mx^2 - x + 2$, 其中 $m \leq 2$.

- (1) 若 $m = -2$, 求 $f(x)$ 的极值;
(2) 证明: $f'(x) < \frac{e^x}{x}$.

高二年级考试 数学试题参考答案及评分标准

2021.07

一、选择题:

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8
答 案	B	C	A	C	A	A	B	C

二、选择题:

题 号	9	10	11	12
答 案	BC	AC	ABC	ACD

三、填空题:

13. 0.3 14. 0.0525 (2分), $\frac{3}{7}$ (3分) 15. 260 16. $(0, \frac{1}{e})$

四、解答题:

17. (10分)

解:依题意: $T_{k+1} = C_n^k (\sqrt{x})^{n-k} (-\frac{2}{x})^k = (-2)^k C_n^k x^{\frac{n-k}{2}-k} = (-2)^k C_n^k x^{\frac{n-3k}{2}}$ 3分

$= (-2)^k C_n^k x^{\frac{n-3k}{2}} (k=0,1,\dots,n)$ 3分

(1) $\therefore$ 前3项系数和是97,

$\therefore 1 - 2C_n^1 + 4C_n^2 = 97$, 解得 $n=8$ 或 $n=-6$ (舍)

$\therefore n=8$ 5分

(2) 若 T_{k+1} 为有理数, 当且仅当 $\frac{8-3k}{2}$ 为整数时, 7分

$\therefore 0 \leq k \leq 8, k \in \mathbb{Z}$,

$\therefore k=0,2,4,6,8$ 8分

$\therefore$ 展开式中的有理项共有5项, 分别为

$T_1 = x^4, T_3 = 112x, T_5 = 1120x^{-2}, T_7 = 1792x^{-5}, T_9 = 256x^{-8}$ 10分

18. (12分)

解: (1) 由散点图中数据和参考数据得,

$\bar{t} = 4, \sum_{i=1}^7 (t_i - \bar{t})^2 = 28, \sqrt{\sum_{i=1}^7 (y_i - \bar{y})^2} = 0.55$, 2分

$\sum_{i=1}^7 (t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^7 t_i y_i - \bar{t} \sum_{i=1}^7 y_i = 40.17 - 4 \times 9.32 = 2.89$,

$\therefore r \approx \frac{2.89}{0.55 \times 2 \times 2.646} \approx 0.99$, 4分

因为 y 与 t 的相关系数近似为0.99, 说明 y 与 t 的线性相关程度相当高, 从而可以用一元线性回归模型拟合 y 与 t 的关系, 6分

高二数学试题参考答案 第1页 (共4页)

(2) 由 $\bar{y} = \frac{9.32}{7} \approx 1.331$ 及 (1) 得

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^7 (t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^7 (t_i - \bar{t})^2} = \frac{2.89}{28} \approx 0.10, \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{t} \approx 1.331 - 0.10 \times 4 \approx 0.93.$$

所以 y 关于 t 的经验回归方程为: $\hat{y} = 0.93 + 0.10t$ 10 分

将 2022 年对应的 $t = 9$ 代入经验回归方程得, $\hat{y} = 0.93 + 0.10 \times 9 = 1.83$.

所以预测 2022 年该市生活垃圾无害化处理量将约 1.83 万吨. 12 分

19. (12 分)

解: (1) 当 $a = 2$ 时, $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \ln x$, 则 $f'(x) = x - 2 + \frac{1}{x}$, 1 分

$$\therefore f'(2) = \frac{1}{2}.$$

$\therefore$ 函数 $y = f(x)$ 的图象在点 $(2, f(2))$ 处的切线的斜率为 $k = \frac{1}{2}$ 3 分

又点 $(2, f(2))$ 在切线上, 且 $f(2) = \ln 2 - 2$.

$\therefore$ 函数 $y = f(x)$ 的图象在点 $(2, f(2))$ 处的切线方程为 $x - 2y + 2\ln 2 - 6 = 0$ 5 分

(2) $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ 6 分

$$f'(x) = x - a + \frac{a-1}{x} = \frac{x^2 - ax + a - 1}{x} = \frac{(x-1)(x+1-a)}{x} \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

① 若 $a - 1 = 1$, 即 $a = 2$ 时, 则 $f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x} > 0$,

$\therefore f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. 8 分

② 若 $a - 1 < 1$, 即 $1 < a < 2$ 时,

当 $x \in (a-1, 1)$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x \in (0, a-1)$, $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$.

$\therefore f(x)$ 在 $(a-1, 1)$ 上单调递减, 在 $(0, a-1)$, $(1, +\infty)$ 上单调递增. 9 分

③ 若 $a - 1 > 1$, 即 $a > 2$ 时,

当 $x \in (1, a-1)$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x \in (0, 1)$, $x \in (a-1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$,

$\therefore f'(x)$ 在 $(1, a-1)$ 上单调递减, 在 $(0, 1)$, $(a-1, +\infty)$ 上单调递增. 12 分

20. (12 分)

(1) 列联表如下:

生产方式	工作时间		合计
	超过 80min	不超过 80min	
甲	15	5	20
乙	5	15	20
合计	20	20	40

..... 2 分

(2)零假设为

H_0 :甲、乙两种生产方式的效率无差异

根据(1)中列联表中的数据,经计算得到

$$\chi^2 = \frac{40(15 \times 15 - 5 \times 5)^2}{20 \times 20 \times 20 \times 20} = 10 > 6.635 = \chi_{0.01}^2 \dots\dots\dots 4 \text{分}$$

依据小概率值 $\alpha = 0.01$ 的独立性检验,我们推断 H_0 不成立,即认为甲、乙两种生产方式的效率有差异,此推断犯错误的概率不大于0.01.

(3)由题意知,随机变量 X 的所有可能取值为0,1,2 $\dots\dots\dots 6 \text{分}$

$$P(X=0) = \frac{C_5^3}{C_7^3} = \frac{2}{7}, P(X=1) = \frac{C_5^1 C_2^2}{C_7^3} = \frac{4}{7}, P(X=2) = \frac{C_5^2 C_1^1}{C_7^3} = \frac{1}{7} \dots\dots\dots 8 \text{分}$$

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

$\dots\dots\dots 10 \text{分}$

$$\therefore E(X) = 0 \times \frac{2}{7} + 1 \times \frac{4}{7} + 2 \times \frac{1}{7} = \frac{6}{7} \dots\dots\dots 12 \text{分}$$

21. (12分)

解:(1)设事件 A ="此水果的亩产量为500kg",事件 B ="此水果的市场销售价格为20元/kg",

由题知, $P(A) = 0.4, P(B) = 0.3$

因为利润=产量 $\times$ 市场销售价格-成本,所以 X 的所有可能取值为

$$100(500 \times 20 - 5000) = 500000.$$

$$100(500 \times 30 - 5000) = 1000000.$$

$$100(800 \times 20 - 5000) = 1100000.$$

$$100(800 \times 30 - 5000) = 1900000. \dots\dots\dots 2 \text{分}$$

$$\therefore P(X = 500000) = P(A)P(B) = 0.4 \times 0.3 = 0.12,$$

$$P(X = 1000000) = P(A)P(\bar{B}) = 0.4 \times (1 - 0.3) = 0.28,$$

$$P(X = 1100000) = P(\bar{A})P(B) = (1 - 0.4) \times 0.3 = 0.18,$$

$$P(X = 1900000) = P(\bar{A})P(\bar{B}) = (1 - 0.4) \times (1 - 0.3) = 0.42. \dots\dots\dots 4 \text{分}$$

所以 X 的分布列为

X	500000	1000000	1100000	1900000
P	0.12	0.28	0.18	0.42

$$\therefore E(X) = 500000 \times 0.12 + 1000000 \times 0.28 + 1100000 \times 0.18 + 1900000 \times 0.42 = 1336000. \dots\dots\dots 6 \text{分}$$

(2) 设事件 C_i = “第 i 年利润高于 100 万元” ($i = 1, 2, 3, 4, 5$)

由题知, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 相互独立, 由 (1) 知,

$$P(C_i) = P(X = 1100000) + P(X = 1900000) = 0.18 + 0.42 = 0.6 (i = 1, 2, 3, 4, 5) \quad \cdots 9 \text{ 分}$$

5 年中恰有 4 年此果农的利润高于 100 万元的概率为 $P = C_5^4 \times 0.6^4 \times (1 - 0.6) = 0.2592$

所以 5 年中恰有 4 年此果农的利润高于 100 万元的概率为 0.2592. $\cdots \cdots 12$ 分

22. (12 分)

解: 由题知, $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{1}{x} + mx - 1 = \frac{mx^2 - x + 1}{x}$.

(1) 若 $m = -2$, 则 $f(x) = \ln x - x^2 - x + 2$.

$$f'(x) = \frac{-2x^2 - x + 1}{x} = -\frac{(x+1)(x-\frac{1}{2})}{x} \quad \cdots \cdots 2 \text{ 分}$$

当 $0 < x < \frac{1}{2}$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x > \frac{1}{2}$ 时, $f'(x) < 0$.

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 上单调递增, 在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递减. $\cdots \cdots 4$ 分

$\therefore$ 当 $x = \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 取得极大值, 极大值为 $f(\frac{1}{2}) = \ln \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{4} - \ln 2$, 无极小值. $\cdots \cdots 6$ 分

(2) 由 (1) 知, 原不等式等价于 $\frac{mx^2 - x + 1}{e^x} < 1 (x > 0)$ 恒成立.

$\because m \leq 2$,

$$\therefore \frac{mx^2 - x + 1}{e^x} \leq \frac{2x^2 - x + 1}{e^x}.$$

要证 $\frac{mx^2 - x + 1}{e^x} < 1 (x > 0)$ 恒成立, 只需证 $\frac{2x^2 - x + 1}{e^x} < 1 (x > 0)$ 恒成立即可. $\cdots \cdots 8$ 分

$$\text{令 } g(x) = \frac{2x^2 - x + 1}{e^x} (x \geq 0), \text{ 则 } g'(x) = \frac{-2x^2 + 5x - 2}{e^x}.$$

令 $g'(x) > 0$, 解得 $\frac{1}{2} < x < 2$, 令 $g'(x) < 0$, 解得 $0 \leq x < \frac{1}{2}$ 或 $x > 2$.

$\therefore g(x)$ 在 $(\frac{1}{2}, 2)$ 上单调递增, 在 $[0, \frac{1}{2})$, $(2, +\infty)$ 上单调递减. $\cdots \cdots 10$ 分

$\therefore g(x)$ 的最大值在 $x = 0$ 或 $x = 2$ 处取得, 又 $g(0) = 1$, $g(2) = \frac{7}{e^2}$,

$$\therefore g(x)_{\max} = g(0) = 1$$

$$\therefore \frac{2x^2 - x + 1}{e^x} < 1 (x > 0) \text{ 恒成立,}$$

$$\therefore \frac{mx^2 - x + 1}{e^x} \leq \frac{2x^2 - x + 1}{e^x} < 1 \text{ 在 } x \in (0, +\infty) \text{ 上恒成立,}$$

$$\therefore f'(x) < \frac{e^x}{x} \quad \cdots \cdots 12 \text{ 分}$$

关于我们

齐鲁家长圈系业内权威、行业领先的自主选拔在线旗下子平台，集聚高考领域权威专家，运营团队均有多年高考特招研究经验，熟知山东新高考及特招政策，专为山东学子服务！聚焦山东新高考，提供新高考资讯、新高考政策解读、志愿填报、综合评价、强基计划、专项计划、双高艺体、选科、生涯规划等政策资讯服务，致力于做您的山东高考百科全书。

第一时间获取山东高考升学资讯，关注**齐鲁家长圈**微信号：**sdgkjzq**。



微信搜一搜

Q 齐鲁家长圈

打开“微信 / 发现 / 搜一搜”搜索