密 封 线 内 不 要 答 题

2023 届“皖南八校”高三第一次大联考

数　学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
3. 本卷命题范围：集合与常用逻辑用语、不等式、函数与导数、三角函数、向量

一、选择题：共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A=\{x|x^2-4x+3<0\}$，$B=\{x|2x-4>0\}$，则 $A\cap B=$

A. $(2,3)$　　B. $\left(-3,\frac{3}{2}\right)$

C. $\left(1,\frac{3}{2}\right)$　　D. $\left(-3,-\frac{3}{2}\right)$

2. “$x=1$”是“$x^2+2x-3=0$”的

A. 充要条件　　B. 充分不必要条件

C. 必要不充分条件　　D. 既不充分也不必要条件

3. 函数 $f(x)=\dfrac{\lg(x+1)}{x-2}$ 的定义域是

A. $(-1,+\infty)$　　B. $[-1,+\infty)$

C. $(-1,2)\cup(2,+\infty)$　　D. $[-1,2)\cup(2,+\infty)$

4. 设 $a=\log_6 5$，$b=(\log_6 4)^2$，$c=\log_5 6$，则

A. $a<c<b$　　B. $b<c<a$　　C. $a<b<c$　　D. $b<a<c$

5. 设 $2^a=5^b=m$，且 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2}$，则 $m=$

A. $\sqrt{10}$　　B. 10　　C. 20　　D. 100

6. 双碳，即碳达峰与碳中和的简称，2020 年 9 月中国明确提出 2030 年实现“碳达峰”，2060 年实现“碳中和”. 为了实现这一目标，中国加大了电动汽车的研究与推广，到 2060 年，纯电动汽车在整体汽车中的渗透率有望超过 70%，新型动力电池随之也迎来了蓬勃发展的机遇. Peukert 于 1898 年提出蓄电池的容量 C（单位：A·h），放电时间 t（单位：h）与放电电流 I（单位：A）之间关系的经验公式 $C=I^n\cdot t$，其中 $n=\log_{\frac{3}{2}}2$ 为 Peukert 常数. 在电池容量不变的条件下，当放电电流 $I=10$ A 时，放电时间 $t=56$ h，则当放电电流 $I=15$ A 时，放电时间为

A. 28 h　　B. 28.5 h　　C. 29 h　　D. 29.5 h

7. 下列说法正确的有

A. 若向量 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{c}$，则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{c}$

B. 若向量 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$，则向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的夹角为锐角

C. 向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是三个非零向量，若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$

D. 向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是两个非零向量，若 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$

8. 若角 α 的终边经过点 $P(\sin 830°,\cos 430°)$，且 $\tan\alpha+\tan 2\alpha+m\tan\alpha\cdot\tan 2\alpha=\sqrt{3}$，则实数 m 的值为

A. $-\sqrt{3}$　　B. $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

C. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\sqrt{3}$

9. 已知 $4x^2y^2+y^4=1(x,y\in\mathbf{R})$，则 x^2+y^2 的最小值是

A. $2\sqrt{3}$　　B. $\dfrac{5}{4}$　　C. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\dfrac{4}{5}$

10. 已知函数 $f(x)=e^x$，若关于 x 的不等式 $f(x)>a\ln(ax-2a)-2a(a>0)$ 恒成立，则实数 a 的取值范围为

A. $(0,e^2)$　　B. $(e^2,+\infty)$

C. $(0,e^3)$　　D. $(e^3,+\infty)$

11. 已知 x_1,x_2,x_3 是函数 $f(x)=x^3+ax^2+b(a,b\in\mathbf{R})$ 的零点，且 $x_1<0<x_2<x_3$，若 $|x_1|+x_2=x_3$，则当 a,b 变化时，$3a+b$ 的最小值是

A. $-4\sqrt{2}$　　B. $-2\sqrt{2}$

C. $4\sqrt{2}$　　D. $2\sqrt{2}$

12. 若 $f(x)=|\sin x+\sqrt{3}\cos x|+|\sqrt{3}\sin x-\cos x|$，则下列说法正确的是

A. $f(x)$ 的最小正周期是 π

B. $f(x)$ 的对称轴方程为 $x=\dfrac{k\pi}{4}-\dfrac{\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$

C. 存在实数 a，使得对任意的 $x\in\mathbf{R}$，都存在 x_1、$x_2\in\left[-\dfrac{5\pi}{12},0\right]$ 且 $x_1\neq x_2$，满足 $[f(x)]^2-af(x)f(x_k)+1=0(k=1,2)$

D. 若函数 $g(x)=2f(x)+b$，$x\in\left[0,\dfrac{25\pi}{12}\right]$（$b$ 是实常数），有奇数个零点 $x_1,x_2,\cdots,x_{2n},x_{2n+1}(n\in\mathbf{N})$，则 $x_1+2(x_2+x_3+\cdots+x_{2n})+x_{2n+1}=\dfrac{25\pi}{3}$

二、填空题：共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$，$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=-1$，则 $|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=$________.

14. 写出一个最小正周期为 3 的奇函数 $f(x)=$________.

15. 函数 $f(x)=\cos 2x\sin x$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上的最大值为________.

16. 设 x,y 是正实数，记 S 为 $x,y+\dfrac{2}{x},\dfrac{2}{y}$ 中的最小值，则 S 的最大值为________.

三、解答题：共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）

若正数 a,b，满足 $a+2b=1$.

(1)求 ab 的最大值；

(2)求 $\frac{5}{a+1}+\frac{1}{b}$ 的最小值.

18.（12 分）

已知 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

(1)求 $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$ 的值；

(2)求 $\cos\left(\frac{5\pi}{6}-2\alpha\right)$ 的值.

19.（12 分）

已知函数 $f(x)=-\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+6\sin x\cos x-2\cos^2 x+1, x\in\mathbf{R}$.

(1)求 $f(x)$ 的最小正周期；

(2)求 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]$ 上的最大值和最小值.

20.（12 分）

某群体的人均通勤时间，是指单日内该群体中成员从居住地到工作地的平均用时，某地上班族 S 中的成员仅以自驾或公交方式通勤，分析显示：当 S 中 $x\%(0<x<100)$ 的成员自驾时，自驾群体的人均通勤时间为

$$f(x)=\begin{cases}30, & 0<x\leqslant 30\\ 2x+\dfrac{1800}{x}-80, & 30<x<100\end{cases}\text{（单位：分钟）},$$

而公交群体的人均通勤时间不受 x 影响，恒为 50 分钟，试根据上述分析结果回答下列问题：

(1)当 x 在什么范围内时，公交群体的人均通勤时间少于自驾群体的人均通勤时间？

(2)求该地上班族 S 的人均通勤时间 $g(x)$ 的表达式；并求出 $g(x)$ 的最小值.

21.（12 分）

对于函数 $f(x)$，若其定义域内存在实数 x 满足 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为“准奇函数”.

(1)已知函数 $f(x)=\dfrac{x-3}{x+1}$，试问 $f(x)$ 是否为“准奇函数”？说明理由；

(2)若 $g(x)=3^x+m$ 为定义在 $[-1,1]$ 上的“准奇函数”，试求实数 m 的取值范围.

22.（12 分）

已知函数 $f(x)=a\ln x+2e^x-4ex+\dfrac{1}{2}ae$.

(1)当 $a=0$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

(2)若 a 为整数，当 $x\geqslant\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x)\geqslant 0$ 恒成立，求 a 的最小值.

（参考数据：$\ln 2\approx 0.6931$，$\ln 3\approx 1.0998$，$e=2.7182\ldots$）

2023 届“皖南八校”高三第一次大联考·数学
参考答案、解析及评分细则

一、选择题：共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

1. A　由题意，得 $A=\{x|1<x<3\}$，$B=\{x|x>2\}$，∴$A\cap B=\{x|2<x<3\}$. 故选 A.

2. B　当 $x=1$ 时，$x^2+2x-3=1^2+2-3=0$，充分条件成立. 解方程 $x^2+2x-3=0$，得 $x=1$ 或 -3，必要条件不成立. ∴“$x=1$”是“$x^2+2x-3>0$”成立的充分不必要条件. 故选 B.

3. C　由题可得 $\begin{cases}x+1>0\\x-2\neq 0\end{cases}$ 解得 $x>-1$ 且 $x\neq 2$. 故选 C.

4. D　∵$c=\log_5 6>\log_5 5=1$，$a=\log_6 5<\log_6 6=1$，$\log_6 4<1$ ∴$(\log_6 4)^2<\log_6 4<\log_6 5<1<\log_5 6$，∴$b<a<c$. 故选 B.

5. D　由 $2^a=5^b=m$，可得 $a=\log_2 m$，$b=\log_5 m$，∴$\frac{1}{a}=\log_m 2$，$\frac{1}{b}=\log_m 5$，∴$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\log_m 2+\log_m 5=\log_m^{10}=\frac{1}{2}$，∴$10=m^{\frac{1}{2}}$，∴$m=100$. 故选 D.

6. A　由 $C=I^{\log_{\frac{3}{2}}2}t$，得 $I=10$ 时，$t=56$，即 $10^{\log_{\frac{3}{2}}2}\cdot 56=C$；$I=15$ 时，$C=15^{\log_{\frac{3}{2}}2}\cdot t$；∴$10^{\log_{\frac{3}{2}}2}\cdot 56=15^{\log_{\frac{3}{2}}2}\cdot t$，∴$t=\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_{\frac{3}{2}}2}\cdot 56=\left(\frac{3}{2}\right)^{\log_{\frac{3}{2}}2}\cdot 56=2^{-1}\cdot 56=\frac{1}{2}\times 56=28$. 故选 A.

7. D　对于 A，若 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 不一定平行，故 A 错误；对于 B，由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$ 得 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\in[0^\circ,90^\circ)$，∴向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为锐角或 0° 角；对于 C，由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$ 得 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 或 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{c}$；对于 D，由题可知，向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共起点，作平行四边形，对角线相等，∴此四边形是矩形，∴$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$. 故选 D.

8. D　$\sin 830^\circ=\sin 70^\circ=\cos 20^\circ$，$\cos 430^\circ=\cos 70^\circ=\sin 20^\circ$，∴$P(\cos 20^\circ,\sin 20^\circ)$，∴$\cos\alpha=\cos 20^\circ$，$\sin\alpha=\sin 20^\circ$，$\tan\alpha=\tan 20^\circ$，$\tan 2\alpha=\tan 40^\circ$，$\tan 3\alpha=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$，$\tan\alpha+\tan 2\alpha=\tan 3\alpha\cdot(1-\tan\alpha\cdot\tan 2\alpha)$，
∴$\tan 3\alpha-\tan 3\alpha\tan\alpha\cdot\tan 2\alpha+m\cdot\tan\alpha\cdot\tan 2\alpha=\sqrt{3}$，
∴$\sqrt{3}-\sqrt{3}\tan\alpha\cdot\tan 2\alpha+m\cdot\tan\alpha\cdot\tan 2\alpha=\sqrt{3}$
∴$m=\sqrt{3}$. 故选 D.

9. C　由 $4x^2y^2+y^4=1$ 得 $x^2=\frac{1}{4y^2}-\frac{y^2}{4}$，所以 $x^2+y^2=\frac{1}{4y^2}+\frac{3}{4}y^2\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{4y^2}\cdot\frac{3}{4}y^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，当且仅当 $\frac{1}{4y^2}=\frac{3}{4}y^2$，即 $y^2=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，等号成立. 故选 C.

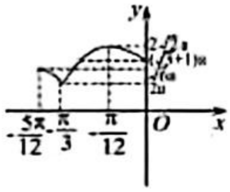
10. C　由 $e^x>a\ln(ax-2a)-2a(a>0)$，得 $\frac{e^x}{a}>\ln a+\ln(x-2)-2$，∴$e^{x-\ln a}+x-\ln a>\ln(x-2)+x-2=e^{\ln(x-2)}+\ln(x-2)$. 记 $g(x)=e^x+x$，易知 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，∴$g(x-\ln a)>g(\ln(x-2))$，∴$x-\ln a>\ln(x-2)$，∴$\ln a<x-\ln(x-2)$，记 $h(x)=x-\ln(x-2)$，$h'(x)=1-\frac{1}{x-2}=\frac{x-3}{x-2}$，$x\in(2,3)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，$x\in(3,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，∴$h(x)_{\min}=h(3)=3-\ln 1=3$，∴$\ln a<3$，∴$0<a<e^3$. 故选 C.

11. A　∵$f(x)=x^3+ax^2+b$，
∴$f'(x)=3x^2+2ax=0$ 两根为 0 和 $-\frac{2}{3}a$，
∵$f(x)=0$ 的三个零点，x_1，x_2，x_3 满足：$x_1<0<x_2<x_3$，
∴$-\frac{2}{3}a>0$ 即 $a<0$，且 $f(0)=b>0$，
又 $f(x)=x^3+ax^2+b=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$
∴$x^3+ax^2+b=x^3+(-x_1-x_2-x_3)x^2+(x_1x_2+x_1x_3+x_3x_1)x-x_1x_2x_3$
∴$\begin{cases}a=-x_1-x_2-x_3,\\x_1x_2x_3=-b,\\-x_1+x_3=x_2,\\x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-2x_2\\b=x_2^3\end{cases}(x_2>0)$ ∴$3a+b=-6x_2+x_2^3$，设 $g(x)=x^3-6x(x>0)$ $g'(x)=3x^2-6$，$x\in(0,\sqrt{2})$ 时，$g'(x)<0$，$x\in(\sqrt{2},+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，∴$g(x)$ 在 $(0,\sqrt{2})$ 上单调递减，在 $(\sqrt{2},+\infty)$ 单调递增，∴$x>0$ 时，$g(x)_{\min}=g(\sqrt{2})=-4\sqrt{2}$，∴$(3a+b)_{\min}=-4\sqrt{2}$. 故选 A.

12. B　$f(x)=2\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right|+2\left|\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right|$，$[f(x)]^2=4\left(1+\left|\sin(2x+\frac{2}{3}\pi)\right|\right)$. ∵$f(x)\geqslant 0$，
∴$f(x)=2\sqrt{1+\left|\sin\left(2x+\frac{2}{3}\pi\right)\right|}$. 对于 A，∵$f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=2\sqrt{1+\left|\sin\left(2x+\pi+\frac{2}{3}\pi\right)\right|}=$

$2\sqrt{1+\left|\sin\left(2x+\frac{2}{3}\pi\right)\right|}=f(x)$. ∴ $\frac{\pi}{2}$ 为 $f(x)$ 的周期. A 错误；对于 B，$y=\left|\sin\left(2x+\frac{2}{3}\pi\right)\right|$ 的对称轴方程为 $2x+\frac{2}{3}\pi=\frac{k\pi}{2}$. ∴ $x=\frac{k\pi}{4}-\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$. 即 $x=\frac{(k_1+1)\pi}{4}-\frac{\pi}{3}=\frac{k_1\pi}{4}-\frac{\pi}{12}(k_1\in\mathbf{Z})$. ∴ B 正确. 对于 C，对 $\forall x\in\mathbf{R}$，有 $f(x)\in[2,2\sqrt{2}]$，∴ $f(x)+\frac{1}{f(x)}\in\left[\frac{5}{2},\frac{9}{4}\sqrt{2}\right]$.

由已知 $af(x_k)=f(x)+\frac{1}{f(x)}(k=1,2)$，$x_1,x_2\in\left[-\frac{5}{12}\pi,0\right]$ 的 $f(x)$ 图象如图所示



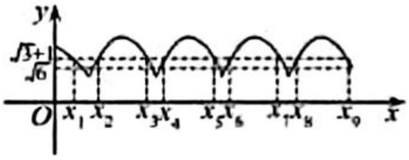
∴ $af(x_k)\in(2a,\sqrt{6}a]\cup[(\sqrt{3}+1)a,2\sqrt{2}a]$.

∴ $\left[\frac{5}{2},\frac{9}{4}\sqrt{2}\right]\subseteq(2a,\sqrt{6}a]\cup[(\sqrt{3}+1)a,2\sqrt{2}a)$.

∴ $\begin{cases}\frac{5}{2}>2a\\ \frac{9}{4}\sqrt{2}\leqslant\sqrt{6}a\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\frac{5}{2}\geqslant(\sqrt{3}+1)a\\ \frac{9}{4}\sqrt{2}<2\sqrt{2}a\end{cases}$，无解. ∴ C 错误；

对于 D，$g(x)=0$ 的根为 $f(x)$ 与 $y=-\frac{b}{2}$ 交点横坐标.

∵ 有奇数个交点，∴ $\sqrt{6}\leqslant-\frac{b}{2}\leqslant\sqrt{3}+1$，



且 $\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{\pi}{6}$，$\frac{x_2+x_3}{2}=\frac{5\pi}{12}$，$\frac{x_3+x_4}{2}=\frac{8\pi}{12}$，$\frac{x_4+x_5}{2}=\frac{11\pi}{12}$，$\frac{x_5+x_6}{2}=\frac{14\pi}{12}$，$\frac{x_6+x_7}{2}=\frac{17\pi}{12}$，$\frac{x_7+x_8}{2}=\frac{20\pi}{12}$，$\frac{x_8+x_9}{2}=\frac{23\pi}{12}$，∴ $x_1+2(x_2+x_3+\cdots+x_8)+x_9=\frac{50\pi}{3}$，∴ D 错误. 故选 B.

二、填空题：共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $\sqrt{5}$　$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}^2=-1$，∴ $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$. ∴ $|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{4\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}=\sqrt{5}$.

14. $\sin\frac{2}{3}\pi x$　答案不唯一. $f(x)=\sin\frac{2}{3}\pi x$.

15. $\frac{\sqrt{6}}{9}$　$f(x)=\cos 2x\cdot\sin x=(1-2\sin^2 x)\cdot\sin x$. 令 $t=\sin x\in(0,1)$，$g(t)=(1-2t^2)t=-2t^3+t$.

$g'(t)=-6t^2+1$，$x\in\left(0,\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ 时，$g'(x)>0$，$x\in\left(\frac{\sqrt{6}}{6},+\infty\right)$ 时，$g'(x)<0$，∴ $g(t)$ 在 $\left(0,\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ 单调递增，在 $\left(\frac{\sqrt{6}}{6},+\infty\right)$ 单调递减. ∴ $g(t)_{max}=g\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)=\frac{\sqrt{6}}{9}$.

16. 2　由题意知 $0<S\leqslant x$，$0<S\leqslant\frac{2}{y}$，则 $\frac{1}{x}\leqslant\frac{1}{S}$，$\frac{y}{2}\leqslant\frac{1}{S}$，所以 $S\leqslant y+\frac{2}{x}\leqslant\frac{2}{S}+\frac{2}{S}=\frac{4}{S}$，解得 $0<S\leqslant2$. 当且仅当 $\frac{1}{x}=\frac{y}{2}=\frac{1}{2}$ 时取等号. 故 S 的最大值为 2.

三、解答题：共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 解：(1) 因为 $a+2b\geqslant2\sqrt{2ab}$，所以 $1\geqslant2\sqrt{2ab}$，当且仅当 $a=2b$ 时等号成立，

所以当 $a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{4}$ 时，$(ab)_{max}=\frac{1}{8}$. ………………………………………… 4 分

(2) $\frac{5}{a+1}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{a+1}+\frac{2}{2b}\right)(a+1+2b)=\frac{1}{2}\left(7+\frac{10b}{a+1}+\frac{a+1}{b}\right)\geqslant\frac{7}{2}+\sqrt{10}$. ………………… 8 分

当且仅当 $\frac{10b}{a+1}=\frac{a+1}{b}$ 时等号成立，

所以当 $a=\frac{7-2\sqrt{10}}{3}$，$b=\frac{\sqrt{10}-2}{3}$ 时取最小值 $\frac{7}{2}+\sqrt{10}$. ………………………… 10 分

18. 解：(1) ∵ $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，∴ $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，………………………………………… 3 分

∴ $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha=\frac{\sqrt{10}}{10}$；………………………………………… 6 分

(2) ∵ $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}>\frac{\sqrt{3}}{2}$，

∴ $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{2}{3}\pi\right)$，$2\alpha\in\left(\pi,\frac{4}{3}\pi\right)$

∵$\sin 2\alpha=2\cos\alpha\sin\alpha=-\frac{4}{5}$，∴$\cos 2\alpha=-\frac{3}{5}$. ………………………………… 9分

∴$\cos(\frac{5}{6}\pi-2\alpha)=\cos\frac{5\pi}{6}\cos 2\alpha+\sin\frac{5}{6}\pi\sin 2\alpha=\frac{3\sqrt{3}-4}{10}$. ………………………… 12分

19. 解：(1)$f(x)=-\sqrt{2}\sin 2x\cdot\cos\frac{\pi}{4}-\sqrt{2}\cos 2x\cdot\sin\frac{\pi}{4}+3\sin 2x-\cos 2x$

$=2\sin 2x-2\cos 2x=2\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$. ………………………………… 4分

所以 $f(x)$的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$. ………………………………… 6分

(2)由$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x-\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,得$-\frac{\pi}{8}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{3}{8}\pi+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,

所以 $f(x)$在区间$\left[0,\frac{3\pi}{8}\right]$上是增函数,在区间$\left[\frac{3\pi}{8},\frac{3\pi}{4}\right]$上是减函数. ………………………… 9分

又 $f(0)=-2,f\left(\frac{3\pi}{8}\right)=2\sqrt{2}$,

$f(\frac{3\pi}{4})=-2$,故函数 $f(x)$在区间$\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]$上的最大值为$2\sqrt{2}$,最小值为$-2$. ………………… 12分

20. 解：(1)当$0<x\leqslant 30$时，$f(x)=30<50$恒成立，公交群体的人均通勤时间不可能少于自驾群体的人均通勤时间；

当$30<x<100$时，若$50<f(x)$，即$2x+\frac{1800}{x}-80>50$，解得$x<20$(舍)或$x>45$；

所以当$45<x<100$时，公交群体的人均通勤时间少于自驾群体的人均通勤时间； ………………… 4分

(2)设该地上班族总人数为n，则自驾人数为$n\cdot x\%$，乘公交人数为$n\cdot(1-x\%)$.

因此人均通勤时间

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{30n\cdot x\%+50n(1-x\%)}{n},0<x\leqslant 30\\ \dfrac{(2x+\frac{1800}{x}-80)n\cdot x\%+50n(1-x\%)}{n},30<x<100\end{cases}$$ ………………………… 6分

整理得：$g(x)=\begin{cases}50-\frac{x}{5},0<x\leqslant 30\\ \frac{1}{50}(x-32.5)^2+46.875,30<x<100\end{cases}$. ………………………… 8分

因为$g(x)$在$(0,30]$和$(30,32.5]$为减函数；

$g(x)$在$(32.5,100]$为增函数，$g(30)=44$，$g(32.5)=46.875$.

所以$g(x)$的最小值为44. ………………………………………… 12分

21. 解：(1)假设$f(x)$为"准奇函数"，∴存在x满足$f(-x)=-f(x)$，

$\frac{-x-3}{-x+1}=-\frac{x-3}{x+1}$有解，化为$x^2+3=0$，无解，∴$f(x)$不是"准奇函数"； ………………… 4分

(2)$g(x)=3^x+m$为定义在$[-1,1]$的"准奇函数".

$3^{-x}+m=-3^x-m$在$[-1,1]$上有解，$2m=-(3^x+3^{-x})$在$[-1,1]$上有解. ………………… 6分

令$t=3^x\in\left[\frac{1}{3},3\right]$，∴$2m=-\left(t+\frac{1}{t}\right)$在$t\in\left[\frac{1}{3},3\right]$上有解， ………………………… 7分

又对勾函数$y=t+\frac{1}{t}$在$\left[\frac{1}{3},1\right)$上单调递减，在$(1,3]$上单调递增，且$t=\frac{1}{3}$时，$y=\frac{10}{3}$；

$t=3$时，$y=\frac{10}{3}$. ………………………………………… 9分

∴$y_{\min}=1+1=2$，$y=t+\frac{1}{t}$的值域为$\left[2,\frac{10}{3}\right]$. ………………………………… 10分

∴$2m\in\left[-\frac{10}{3},-2\right]$，$m\in\left[-\frac{5}{3},-1\right]$. ………………………………… 12分

22. 解：(1)当$a=0$，$f(x)=2e^x-4ex$

$f'(x)=2e^x-4e$ ………………………………………… 1分

$f'(1)=-2e$

$f(1)=-2e$

∴曲线$y=f(x)$过点$(1,-2e)$，在$x=1$处的切线方程为$y+2e=-2e(x-1)$，即$2ex+y=0$ ………… 3分

(2)$f(1)=2e-4e+\frac{1}{2}ae=\frac{1}{2}ae-2e\geqslant 0\Rightarrow a\geqslant 4$.

$f'(x)=\frac{a}{x}+2e^x-4e=\frac{2xe^x-4ex+a}{x}$，

令 $\varphi(x)=2xe^x-4ex+a$，

$\varphi(1)=a-2e$，$\varphi'(x)=(2x+2)e^x-4e$，$\varphi'(1)=0$，

易知 $\varphi'(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$ 单调递增，∴当 $x\in\left[\frac{1}{2},1\right)$，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$ 单调递减，$x\in(1,+\infty)$，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$ 单调递增. ………………………………………………………………………………………… 5 分

1° 当 $a\geq 2e$ 时，$\varphi(x)\geq\varphi(1)\geq 0$，∴$f'(x)\geq 0$ 在 $[\frac{1}{2},+\infty)$ 上恒成立，∴$f(x)$ 单调递增.

$f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}ae-a\ln 2+2\sqrt{e}-2e$，

记 $M(x)=\frac{1}{2}ex-x\ln 2+2\sqrt{e}-2e(x\geq 2e)$，

$M'(x)=\frac{1}{2}e-\ln 2>0$，

∴$M(x)$ 在区间 $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调增递.

∴$M(x)\geq M(2e)=e^2+2\sqrt{e}-(2\ln 2+2)e>0$

∴$f(\frac{1}{2})>0$，∴$x\in[\frac{1}{2},+\infty)$ 时，$f(x)>0$ 恒成立. ………………………………………… 7 分

2° 当 $4<a<2e$ 时，又 $a\in Z$，即 $a=5$ 时，$f(x)=5\ln x+2e^x-4ex+\frac{5}{2}e$，

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}e+2\sqrt{e}-5\ln 2>0$，$f'(x)=\frac{2xe^x-4ex+5}{x}$，

记 $h(x)=2xe^x-4ex+5$，

$h'(x)=(2x+2)e^x-4e$，$h'(1)=0$，$h'(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，$h(x)$ 在 $[\frac{1}{2},1)$ 单调递减，$(1,+\infty)$ 单调递增，$h\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}-2e+5>0$，$h(1)=5-2e<0$，$h(\frac{3}{2})=3e^{\frac{3}{2}}-6e+5>0$，

$\exists x_1\in(\frac{1}{2},1)$，$x_2\in(1,\frac{3}{2})$，$h(x_1)=h(x_2)=0$，

$f(x)$ 在 $(\frac{1}{2},x_1)$ 单调递增，在 (x_1,x_2) 单调递减，$(x_2,+\infty)$ 单调递增，$2x_2e^{x_2}-4ex_2+5=0\Rightarrow e^{x_2}=2e-\frac{5}{2x_2}$，

$f(x_2)=5\ln x_2+2e^{x_2}-4ex_2+\frac{5}{2}e=5\ln x_2-\frac{5}{x_2}-4ex_2+\frac{13}{2}e$

令 $N(x)=5\ln x-\frac{5}{x}-4ex+\frac{13}{2}e$，$x\in\left(1,\frac{3}{2}\right)$

$N'(x)=\frac{5x+5-4ex^2}{x^2}$

$x\in\left(1,\frac{3}{2}\right)$ 时，$5x+5-4ex^2<5+5-4e<0$，∴$N'(x)<0$，$N(x)$ 单调递减，

∴$N(x)>N\left(\frac{3}{2}\right)=5(\ln 3-\ln 2)-\frac{10}{3}+\frac{1}{2}e>0$

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。