高三教学质量检测（一）

数学试题

本试卷共 22 题，全卷满分 150 分，考试用时 120 分钟．

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上．

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号．回答非选择题时，将答案写在答题卡上．写在本试卷上无效．

3．考试结束后，请将答题卡上交．

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 设全集 $U=[-2,9], A=\{x\in R|-1<x\le 2\}, B=\{-2,0,2,5\}$，则 $(\complement_U A)\cap B=$（　　）

A. $\{0,2\}$　　B. $\{-2,5\}$　　C. $\{-2,2,5\}$　　D. $\{-2,0,2\}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据补集与交集的运算求解即可.

【详解】解：因为 $U=[-2,9], A=\{x\in R|-1<x\le 2\}$，

所以 $\complement_U A=[-2,-1]\cup(2,9]$，

因为 $B=\{-2,0,2,5\}$，

所以 $(\complement_U A)\cap B=\{-2,5\}$

故选：B

2. 下列各命题的否定为真命题的是（　　）

A. $\forall x\in R, x^2-x+\frac{1}{4}\ge 0$　　B. $\exists x\in R, 2^x>x^2$

C. $\exists x\in R^+, \left(\frac{1}{3}\right)^x>\log_2 x$　　D. $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right], \sin x<x$

【答案】D

【解析】

【分析】依次判断各命题的真假即可得其否定的真假.

【详解】解：对于A，$\forall x\in R, x^2-x+\frac{1}{4}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\geq 0$为真命题，故其否定为假命题，错误；

对于B，因为$x=5$时，$2^5=32>5^2=25$，$\exists x\in R, 2^x>x^2$为真命题，故其否定为假命题，错误；

对于C，当$x\in(0,1)$时，$\left(\frac{1}{3}\right)^x>0, \log_2 x<0$，$\exists x\in R^+, \left(\frac{1}{3}\right)^x>\log_2 x$为真命题，故其否定为假命题，错误；

对于D，当$x=0$时，$\sin 0=0$，故$\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right], \sin x<x$为假命题，故其否定为真命题，正确；

故选：D

3. 函数$f(x)=2\cos^2 x-1$的图象在点$M\left(\frac{\pi}{4}, f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$处的切线方程为（　　）

A. $2x+4y-\pi=0$　　B. $2x-4y-\pi=0$　　C. $4x+2y-\pi=0$　　D. $4x-2y+\pi=0$

【答案】C

【解析】

【分析】由导数的几何意义求解，

【详解】由题意得$f(x)=2\cos^2 x-1=\cos 2x$，则$f'(x)=-2\sin 2x$，

$f(\frac{\pi}{4})=0$，$f'(\frac{\pi}{4})=-2$，则所求切线方程为$y=-2(x-\frac{\pi}{4})$，即$4x+2y-\pi=0$，

故选：C

4. 已知关于x的不等式$ax^2+(1-3a)x+2\geq 0$的解集为A，设$B=\{-1,1\}$，$B\subseteq A$，则实数a的取值范围为（　　）

A. $-\frac{3}{2}\leq a\leq\frac{1}{4}$　　B. $-\frac{1}{4}\leq a\leq\frac{3}{2}$　　C. $a\leqslant -\frac{1}{4}$　　D. $a\geq\frac{3}{2}$

【答案】B

【解析】

【分析】问题化为$a(x^2-3x)+x+2\geq 0$在$B=\{-1,1\}$上恒成立，列不等式组求参数范围即可.

【详解】由题意，$a(x^2-3x)+x+2\geq 0$在$B=\{-1,1\}$上恒成立，

所以$\begin{cases}4a+1\geq 0\\3-2a\geq 0\end{cases}$，可得$-\frac{1}{4}\leq a\leq\frac{3}{2}$.

故选：B

5. 已知直线l和两个不同的平面α,β，则下列结论正确的是（　　）

A. 若$l//\alpha,l\perp\beta$，则$\alpha\perp\beta$

B. 若$\alpha\perp\beta,l\perp\alpha$，则$l//\beta$

C. 若$\alpha//\beta,l//\alpha$，则$l//\beta$

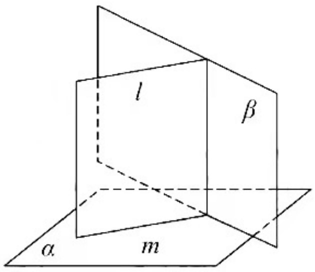
D. 若α和β相交，l与α相交，则l与β一定也相交

【答案】A

【解析】

【分析】A利用线面平行性质、面面垂直的判定即可判断；B、C、D由线面、面面的位置关系，根据平面的基本性质判断线面关系即可.

【详解】A：由$l//\alpha$，过l的平面交面α于m，则$l//m$，而$l\perp\beta$，故$m\perp\beta$，$m\subset\alpha$，所以$\alpha\perp\beta$，正确；



B：$\alpha\perp\beta,l\perp\alpha$，则$l//\beta$或$l\subset\beta$，错误；

C：$\alpha//\beta,l//\alpha$，则$l//\beta$或$l\subset\beta$，错误；

D：若α和β相交，l与α相交，则l与β可能相交、平行或$l\subset\beta$，错误.

故选：A

6. 已知$a=\sin 3$，$b=\ln 2$，$c=2^{0.3}$，则a，b，c的大小关系为（　　）

A. $a<b<c$　　B. $c<b<a$　　C. $b<a<c$　　D. $a<c<b$

【答案】A

【解析】

【分析】根据正弦函数、指对数函数的性质判断大小关系.

【详解】由$\sin\pi<\sin 3<\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}=\ln\sqrt{e}<\ln 2<\ln e=1=2^0<2^{0.3}$，

所以$a<b<c$.

故选：A

7. 在$\triangle ABC$中，内角A，B，C的对边长分别为a，b，c，则下列结论正确的为（　　）

A. $\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}$不可能构成一个三角形的三边长

B. $\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}$可以构成一个直角三角形的三边长

C. $\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}$可以构成一个锐角三角形的三边长

D. $\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}$可以构成一个钝角三角形的三边长

【答案】C

【解析】

【分析】令$a=1,b=c=4$判断A、C即可；由$\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}$成直角三角形$a=b+c$、成钝角三角形$a>b+c$不满足题设判断B、D.

【详解】若$a=1,b=c=4$，则$\sqrt{a}=1,\sqrt{b}=\sqrt{c}=2$构成锐角三角形，A错误，C正确；

B：若a为最大边，且$\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}$构成直角三角形，则$a=b+c$，显然不满足题设，错误；

D：若a为最大边，且$\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}$构成钝角三角形，则$a>b+c$，显然不满足题设，错误；

故选：C

8. 已知偶函数$f(x)$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，对任意$x>0$，都有$f(x)=f\left(\frac{x}{2}\right)$，且当$x\in[1,2)$时，$f(x)=\sin\pi x$，则函数$g(x)=f(x)-\frac{1}{3}\log_2|x|+1$的零点的个数为（　　）

A. 8　　B. 10　　C. 12　　D. 14

【答案】C

【解析】

【分析】将问题化为$f(x)$与$y=\frac{1}{3}\log_2|x|-1$图象的交点个数，结合偶函数对称性只需研究$f(x)$与$g(x)=\frac{1}{3}\log_2 x-1$在$(0,+\infty)$的交点个数，数形结合判断交点个数即可.

【详解】将问题化为$f(x)$与$y=\frac{1}{3}\log_2|x|-1$图象的交点个数，显然$y=\frac{1}{3}\log_2|x|-1$也是定义在$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$上的偶函数，

所以，只需研究$f(x)$与$g(x)=\frac{1}{3}\log_2 x-1$在$(0,+\infty)$的交点个数，再乘以2即可得结果.

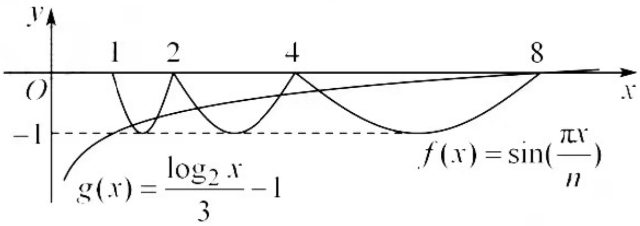
对应$f(x)$：$x\in[1,2)$时$f(x)\in[-1,0]$，在$[1,\frac{3}{2})$上递减，$(\frac{3}{2},2)$上递增；

任意$x>0$都有$f(x)=f\left(\frac{x}{2}\right)$，易知$x\in[n,2n)$上$f(x)=\sin\frac{\pi x}{n}\in[-1,0]$，在$[n,\frac{3}{2}n)$上递

减，$(\frac{3}{2}n,2n)$ 上递增，$n\in N^*$；

又 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增，且 $g(1)=-1<f(1)=0$，$g(8)=0=f(8)$，

综上，$f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x\in[1,8]$ 存在交点，且函数图象如下图：



由图知：$x\in[1,8]$ 上共有 6 个交点，根据偶函数的对称性知：共有 12 个交点，

所以原函数有 12 个零点.

故选：C

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选的得 0 分．

9. 下列命题为真命题的是（　　）

A. 若 $ac^2<bc^2$，则 $a<b$

B. 若 $a\neq 1,b\in R$，则 $a^2+b^2>2(a-b-1)$

C. 若 $a>b$，则 $\sqrt[3]{a}>\sqrt[3]{b}$

D. 若 $a<b<0$，则 $\frac{b^2}{a}+\frac{a^2}{b}>a+b$

【答案】ABC

【解析】

【分析】根据不等式的性质判断 A；作差法比较大小判断 BD；幂函数的性质判断 C.

【详解】解：对于 A，由于 $ac^2<bc^2$，$c^2>0$，故 $a<b$，A 选项正确；

对于 B，由于 $a\neq 1,b\in R$，$a^2+b^2-2(a-b-1)=(a-1)^2+(b+1)^2>0$，故 $a^2+b^2>2(a-b-1)$，B 选项正确；

对于 C，$a>b$ 时，由幂函数 $y=x^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{x}$ 在 R 上单调递增，故 $\sqrt[3]{a}>\sqrt[3]{b}$，C 选项正确；

对于 D，若 $a<b<0$，则 $a+b<0,ab>0$，

$$\frac{b^2}{a}+\frac{a^2}{b}-(a+b)=\frac{b^2}{a}-a+\frac{a^2}{b}-b=\frac{b^2-a^2}{a}+\frac{a^2-b^2}{b}$$

$=(b^2-a^2)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=\frac{(b+a)(b-a)^2}{ab}<0$，故 $\frac{b^2}{a}+\frac{a^2}{b}<a+b$，D 选项错误.

故选：ABC

10. 将函数 $f(x)=3\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ 图象上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍，纵坐标不变，得到函数 $g(x)$ 的图象，则下列结论正确的为（　　）

A. 函数 $h(x)=f\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ 为偶函数

B. 直线 $x=\frac{19}{24}\pi$ 是函数 $g(x)$ 图象的一条对称轴

C. $\left[-\frac{17\pi}{24},-\frac{11\pi}{24}\right]$ 是函数 $g(x)$ 的一个单调递减区间

D. 将 $g(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度可以得到函数 $y=3\sin 4x$ 的图象

【答案】BD

【解析】

【分析】根据余弦型函数的图象变换性质，结合余弦型函数的奇偶性、对称性、单调性逐一判断即可.

【详解】因为函数 $f(x)=3\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ 图象上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍，纵坐标不变，得到函数 $g(x)$ 的图象，

所以 $g(x)=3\cos\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)$.

A： $h(x)=f\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=3\cos\left[2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{6}\right]=3\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=3\sin 2x$ ，

因为 $h(-x)=3\sin(-2x)=-3\sin 2x=-h(x)$，所以函数 $h(x)=f\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ 为奇函数，本选项说法不正确；

B： $g(\frac{19}{24}\pi)=3\cos\left(4\times\frac{19}{24}\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-3$，所以当 $x=\frac{19}{24}\pi$ 时，函数 $g(x)$ 有最小值，所以直线 $x=\frac{19}{24}\pi$ 是函数 $g(x)$ 图象的一条对称轴，因此本选项说法正确；

C：当 $x\in\left[-\frac{17\pi}{24},-\frac{11\pi}{24}\right]$ 时， $4x-\frac{\pi}{6}\in[-3\pi,-2\pi]$，

因为函数 $y=3\cos x$ 在 $[-\pi,0]$ 上单调递增，所以在 $[-3\pi,-2\pi]$ 上也单调递增，

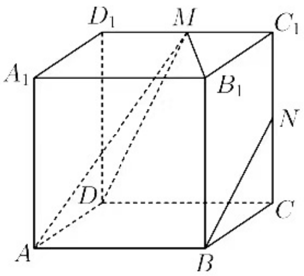
所以$\left[-\frac{17\pi}{24},-\frac{11\pi}{24}\right]$是函数$g(x)$的一个单调递增区间，因此本选项说法不正确；

D：$g(x)$的图象向右平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度可以得到函数

$g(x-\frac{\pi}{12})=3\cos\left[4\left(x-\frac{\pi}{12}\right)-\frac{\pi}{6}\right]=3\cos\left(4x-\frac{\pi}{2}\right)=3\sin 4x$，因此本选项说法正确，

故选：BD

11. 如图，在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AA_1=AB=4,BC=2$，M，N分别为棱C_1D_1,CC_1的中点，则下列说法正确的是（　　）



A. M，N，A，B四点共面

B. 直线BN与平面ADM相交

C. 直线BN和B_1M所成的角为$60°$

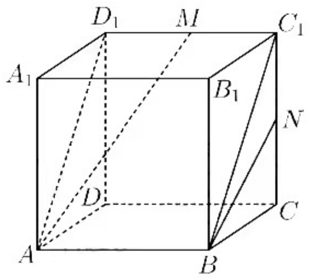
D. 平面ADM和平面$A_1B_1C_1D_1$的夹角的正切值为2

【答案】BCD

【解析】

【分析】A：连接AD_1,BC_1，根据AM、B、N与面ABC_1D_1位置关系即可判断；B：F为DD_1中点，连接AF，易得$AF//BN$，根据它们与面ADM的位置关系即可判断；C：若H,G分别是AA_1,A_1B_1中点，连接HD_1,GD_1，易知直线BN和B_1M所成的角为$\angle GD_1H$，再证明$\triangle HD_1G$为等边三角形即可得大小；D：若G分别是A_1B_1中点，求面$ADMG$和面$A_1B_1C_1D_1$的夹角即可，根据面面角的定义找到其平面角即可.

【详解】A：连接AD_1,BC_1，如下图$AM\subset$面ABC_1D_1，而$B\in$面ABC_1D_1，$N\notin$面ABC_1D_1，



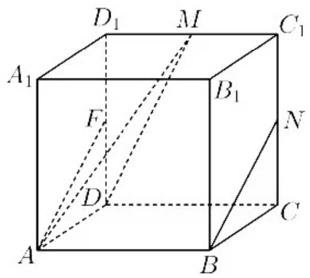
所以M，N，A，B四点不共面，错误；

B：若F为DD_1中点，连接AF，N为棱CC_1的中点，

由长方体性质知：$AF//BN$，显然$BN \not\subset$面ADM，

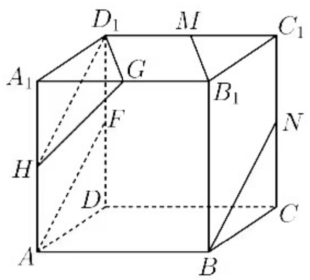
若$BN//$面ADM，而$AF \cap$面$ADM=A$，显然有矛盾，

所以直线BN与平面ADM相交，正确；



C：若H,G分别是AA_1,A_1B_1中点，连接HD_1,GD_1，

由长方体性质易知：$HD_1//AF,GD_1//B_1M$，



而$AF//BN$，故$HD_1//BN$，即直线BN和B_1M所成的角为$\angle GD_1H$，

由题设$A_1G=A_1H=A_1D_1=2$，易知$HD_1=GD_1=AG=2\sqrt{2}$，即$\triangle HD_1G$为等边三角形，

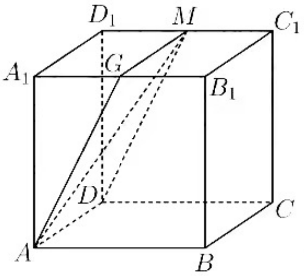
所以$\angle GD_1H$为$60°$，正确；

D：若G分别是A_1B_1中点，显然$MG//A_1D_1//AD$，易知A,D,M,G共面，

所以平面ADM和平面$A_1B_1C_1D_1$的夹角，即为面$ADMG$和面$A_1B_1C_1D_1$的夹角，

而面$ADMG\cap$面$A_1B_1C_1D_1=MG$，长方体中$AA_1\perp A_1G$，$AA_1\perp MG$，

如下图，$\angle AGA_1$ 为 $ADMG$ 和面 $A_1B_1C_1D_1$ 夹角的平面角，$\tan\angle AGA_1=\dfrac{AA_1}{GA_1}=2$，正确.



故选：BCD

12. 已知函数 $f(x)=x+\dfrac{1}{e^x},g(x)=x^m-m\ln x(m<0)$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，关于 x 的不等式 $f(x)\ge g(x)$ 恒成立，则下列选项中实数 m 可以取到的值为（　　）

A. -4　　B. $-\dfrac{10}{3}$　　C. $-e$　　D. $-\dfrac{5}{4}$

【答案】CD

【解析】

【分析】构造函数 $h(x)=x-\ln x$，判断单调性后转化求解

【详解】$f(x)\ge g(x)$ 即 $e^{-x}-\ln e^{-x}\ge x^m-\ln x^m$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 恒成立，

设 $h(x)=x-\ln x$，$h'(x)=1-\dfrac{1}{x}$，当 $0<x<1$ 时 $h'(x)<0$，$x>1$ 时 $h'(x)>0$，

则 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减，在 $(1,+\infty)$ 单调递增，

则 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h(e^{-x})\ge h(x^m)$ 可转化为 $0<e^{-x}\le x^m<1$，

即 $m\ln x\ge -x$，$m\ge -\dfrac{x}{\ln x}$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 时恒成立，

令 $t(x)=-\dfrac{x}{\ln x},x\in(1,+\infty)$，$t'(x)=\dfrac{1-\ln x}{\ln^2 x}$，当 $1<x<e$ 时 $t'(x)>0$，$x>e$ 时 $t'(x)<0$，

则 $t(x)$ 在 $(1,e)$ 单调递增，在 $(e,+\infty)$ 单调递减，得 $m\ge t(x)_{\max}=t(e)=-e$，且 $m<0$，

则 -4，$-\dfrac{10}{3}$ 不能取到，$-e$，$-\dfrac{5}{4}$ 可以取到

故选：CD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 函数 $y=x+\dfrac{1}{x-2}(x>2)$ 的值域是______.

【答案】$[4,+\infty)$

【解析】

【分析】令 $t=x-2>0$，将函数转化为对勾函数 $y=t+\frac{1}{t}+2$ 求解.

【详解】函数 $y=x+\frac{1}{x-2}=x-2+\frac{1}{x-2}+2$ ，

令 $t=x-2>0$，

则 $y=t+\frac{1}{t}+2$ 在 $(0,1]$ 上递减，在 $[1,+\infty)$ 上递增，

当 $t=1$，即 $x=3$ 时，y 取得最小值 4，

所以函数的值域是 $[4,+\infty)$，

故答案为：$[4,+\infty)$

14. 已知 $\vec{m}=(-1,3\lambda+2),\vec{n}=(-\lambda,-1-2\lambda)$，若 $\vec{m}//\vec{n}$，则实数 $\lambda=$________.

【答案】-1 或 $-\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】根据向量共线的坐标表示求解即可.

【详解】解：因为 $\vec{m}=(-1,3\lambda+2),\vec{n}=(-\lambda,-1-2\lambda)$，$\vec{m}//\vec{n}$，

所以 $2\lambda+1+\lambda(3\lambda+2)=0$，即 $3\lambda^2+4\lambda+1=0$，解得 $\lambda=-1$ 或 $\lambda=-\frac{1}{3}$，

故答案为：-1 或 $-\frac{1}{3}$

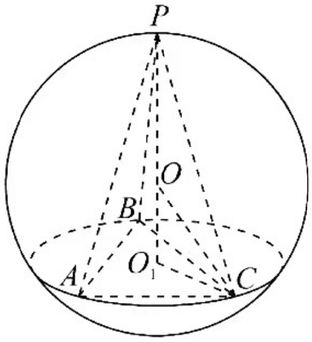
15. 已知三棱锥 $P-ABC$ 的外接球 O 的半径为 5，$AC=4,\angle ABC=\frac{\pi}{6}$，则 P 到平面 ABC 距离的最大值为________________.

【答案】8

【解析】

【分析】根据 $AC=4$，$\angle ABC=\frac{\pi}{6}$ 得到三角形 ABC 外接圆的半径为 4，然后根据几何图形可知点 P 在如图所示的位置时，P 到平面 ABC 的距离最大，然后利用勾股定理求距离即可.

【详解】



因为 $AC=4$，$\angle ABC=\dfrac{\pi}{6}$，所以 $\dfrac{AC}{\sin\angle ABC}=8$，则三角形 ABC 外接圆的半径为 4，

当点 P 在上图中的位置时，P 到平面 ABC 的距离最大，此时 $OO_1=\sqrt{5^2-4^2}=3$，

$PO_1=3+5=8$，所以 P 到平面 ABC 的最大距离为 8.

故答案为：8.

16. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，给出以下命题：

①若 $\tan A+\tan B+\tan C>0$，则 $\triangle ABC$ 为锐角三角形；

②若 $a\cos A=b\cos B$，则 $\triangle ABC$ 为等腰三角形；

③若 $b\cos C+c\cos B=b$，则 $\triangle ABC$ 为等腰三角形；

④若 $\dfrac{a}{\cos A}=\dfrac{b}{\cos B}=\dfrac{c}{\cos C}$，则 $\triangle ABC$ 为等边三角形.

以上命题中，所有真命题的序号为________________.

【答案】①③④

【解析】

【分析】①利用切弦关系及三角恒等变换、三角形内角性质可得 $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C>0$，即可判断；②③④利用正弦边角关系、三角恒等变换得到三角形内角的关系，即可判断正误.

【详解】

① $\tan A+\tan B+\tan C=\dfrac{\sin A\cos B+\cos A\sin B}{\cos A\cos B}+\dfrac{\sin C}{\cos C}=\dfrac{\sin(A+B)}{\cos A\cos B}+\dfrac{\sin C}{\cos C}$

$=\dfrac{\sin C}{\cos A\cos B}+\dfrac{\sin C}{\cos C}=\sin C\cdot(\dfrac{\cos C+\cos A\cos B}{\cos A\cos B\cos C})=\sin C\cdot\dfrac{\cos A\cos B-\cos(A+B)}{\cos A\cos B\cos C}$

$=\dfrac{\sin A\sin B\sin C}{\cos A\cos B\cos C}=\tan A\tan B\tan C>0$，而 $A,B,C\in(0,\pi)$，

所以 A,B,C 都为锐角，正确；

②由正弦边角关系：$\sin A\cos A=\sin B\cos B$，则 $\sin 2A=\sin 2B$，$A,B\in(0,\pi)$，

所以 $A=B$ 或 $2A+2B=\pi$（$A+B=\dfrac{\pi}{2}$），故 $\triangle ABC$ 为等腰或直角三角形，错误；

③由正弦边角关系：$\sin B\cos C+\sin C\cos B=\sin(B+C)=\sin A=\sin B$，$A+B\in(0,\pi)$，

所以 $A=B$，故 $\triangle ABC$ 为等腰三角形，正确；

④由 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$，而 $\dfrac{a}{\cos A}=\dfrac{b}{\cos B}=\dfrac{c}{\cos C}$，故 $\tan A=\tan B=\tan C$，

且 $A,B,C\in(0,\pi)$，故 $A=B=C$，则 $\triangle ABC$ 为等边三角形，正确.

故答案为：①③④

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17. 试分别解答下列两个小题：

（1）已知函数 $f(x)=\sqrt{\log_{0.5}(4x-3)}$ 的定义域为 A，当 $x\in A$ 时，函数

$g(x)=4\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的图象与直线 $y=m$ 没有公共点，求实数 m 的取值范围；

（2）若奇函数 $y=f(x)$ 是定义在 $[-1,1]$ 上的减函数，且 $f(1-2a)+f\left(1-4a^2\right)<0$，求实数 a 的取值范围.

【答案】（1）$m<2$ 或 $m\geq 2\sqrt{3}$；

（2）$0\leq a<\dfrac{1}{2}$.

【解析】

【分析】（1）根据对数函数的性质可得 $A=\left(\dfrac{3}{4},1\right]$，然后利用三角函数的性质可得

$2\leq g(x)<2\sqrt{3}$，结合条件即得；

（2）根据函数的奇偶性及单调性可得 $\begin{cases}-1\leq 1-2a\leq 1\\-1\leq 1-4a^2\leq 1\\1-4a^2>2a-1\end{cases}$，进而即得.

【小问 1 详解】

由 $\log_{0.5}(4x-3)\geq 0$ 可得：$\begin{cases}4x-3>0\\4x-3\leq 1\end{cases}\Rightarrow \dfrac{3}{4}<x\leq 1$，

所以 $f(x)$ 的定义域 $A=\left(\dfrac{3}{4},1\right]$，

当 $x\in A$ 时，$\dfrac{2\pi}{3}<\dfrac{2\pi}{3}x+\dfrac{\pi}{6}\leq\dfrac{5\pi}{6}$，

所以$\frac{1}{2}\le\sin\left(\frac{2\pi}{3}x+\frac{\pi}{6}\right)<\frac{\sqrt{3}}{2}$，

从而$2\le g(x)<2\sqrt{3}$，又函数$g(x)=4\sin\left(\frac{2\pi}{3}x+\frac{\pi}{6}\right)$的图象与直线$y=m$没有公共点，

所以$m<2$或$m\ge2\sqrt{3}$；

【小问 2 详解】

由$f(1-2a)+f\left(1-4a^2\right)<0$可得：$f\left(1-4a^2\right)<-f(1-2a)$

因为$f(x)$为奇函数，

所以$f\left(1-4a^2\right)<f(2a-1)$，

又因为函数$y=f(x)$是定义在$[-1,1]$上的减函数，

$$\therefore\begin{cases}-1\le1-2a\le1\\-1\le1-4a^2\le1,\\1-4a^2>2a-1\end{cases}$$

解得$0\le a<\frac{1}{2}$.

18. 在$\triangle ABC$中，内角A，B，C所对的边分别为a，b，c，已知$b+c=2a$，$3b\sin C=4c\sin A$.

（1）求$\cos B$的值；

（2）求$\sin\left(B-\frac{\pi}{3}\right)+2\cos^2\frac{B}{2}$的值.

【答案】（1）$-\frac{1}{4}$

（2）$\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}+6}{8}$

【解析】

【分析】（1）由正弦定理边角互化得$b=\frac{4}{3}a$，进而得$c=\frac{2}{3}a$，再根据余弦定理求解即可；

（2）结合（1）得$\sin B=\frac{\sqrt{15}}{4}$，再根据三角恒等变换求解即可.

【小问 1 详解】

解：$\because 3b\sin C=4c\sin A$，

$\therefore 3\sin B\sin C=4\sin A\sin C$

$\because C\in(0,\pi),\sin C\ne0$

$\therefore 3\sin B=4\sin A$，即 $b=\dfrac{4}{3}a$

$\because b+c=2a$，

$\therefore c=\dfrac{2}{3}a$

$\therefore \cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=-\dfrac{1}{4}$

【小问 2 详解】

解：$\because \cos B=-\dfrac{1}{4}, 0<B<\pi$，

$\therefore \sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

$\therefore \sin\left(B-\dfrac{\pi}{3}\right)+2\cos^2\dfrac{B}{2}=\left(\sin B\cos\dfrac{\pi}{3}-\cos B\sin\dfrac{\pi}{3}\right)+(1+\cos B)$

$=\left(\dfrac{1}{2}\sin B-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos B\right)+(1+\cos B)$

$=\left[\dfrac{\sqrt{15}}{4}\times\dfrac{1}{2}-\left(-\dfrac{1}{4}\right)\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]+\left(1-\dfrac{1}{4}\right)$

$=\dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{3}+6}{8}$

19. 在图 1 中，四边形 $ABCD$ 为梯形，$AD//BC$，$\angle ABC=\dfrac{\pi}{6}$，$\angle BCD=\dfrac{\pi}{3}$，$AD=CD=2$，过点 A 作 $AE\perp AB$，交 BC 于 E．现沿 AE 将 $\triangle ABE$ 折起，使得 $BC\perp DE$，得到如图 2 所示的四棱锥 $B-AECD$，在图 2 中解答下列两问：

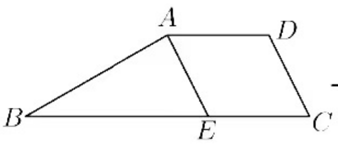


图1

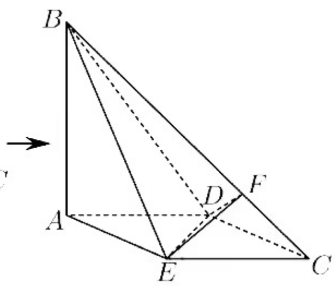


图2

（1）求四棱锥 $B-AECD$ 的体积；

（2）若 F 在侧棱 BC 上，$BF=\frac{3}{4}BC$，求证：二面角 $C-EF-D$ 为直二面角.

【答案】(1) 4

(2) 证明见解析

【解析】

【分析】(1)利用线面垂直的判定定理确定高，再用体积公式直接求解；

(2)利用空间向量的坐标运算，证明两平面的法向量数量积等于 0 即可.

【小问 1 详解】

在图 1 中，$\because \angle ABC=\frac{\pi}{6}, AE\perp AB$，$\therefore \angle AEB=\frac{\pi}{3}$，

又 $\angle BCD=\frac{\pi}{3}$，$\therefore AE//CD$，

又 $AD//BC$，

$\therefore$四边形 $AECD$ 为平行四边形，

$\because AD=CD$，

$\therefore$平行四边形 $AECD$ 为菱形.

在图 2 中，连接 AC，则 $DE\perp AC$，

又 $BC\perp DE, AC, BC\subset$ 平面 ABC，

$AC\cap BC=C$，$\therefore DE\perp$ 平面 ABC，

$\because AB\subset$ 平面 ABC，$\therefore AB\perp DE$

$\because AE\perp AB, AE\cap DE=E$，$AE, DE\subset$ 平面 $AECD$，

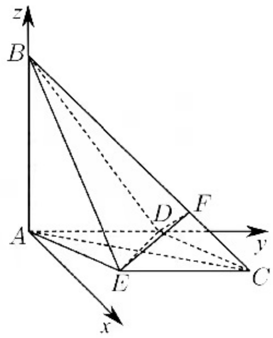
$\therefore AB\perp$ 平面 $AECD$

$$V_{B-AECD}=\frac{1}{3}S_{AECD}\times AB=\frac{1}{3}\times\left(AD\times AE\sin\frac{\pi}{3}\right)\times\left(AE\tan\frac{\pi}{3}\right)=4$$

【小问 2 详解】

在图 2 中，以 A 为原点，以 AD 所在的直线为 y 轴建立如图所示的直角坐标系，则

$B(0,0,2\sqrt{3})$，$D(0,2,0)$，$E(\sqrt{3},1,0)$，$C(\sqrt{3},3,0)$，



$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{EB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}=(-\sqrt{3},-1,2\sqrt{3})+\frac{3}{4}(\sqrt{3},3,-2\sqrt{3})=\left(-\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{5}{4},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

设面 CEF 的一个法向量为 $\vec{n_1}=(x_1,y_1,z_1),\overrightarrow{EC}=(0,2,0)$，

由 $\begin{cases}\vec{n_1}\cdot\overrightarrow{EC}=0\\ \vec{n_1}\cdot\overrightarrow{EF}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2y_1=0\\ -\frac{\sqrt{3}}{4}x_1+\frac{5}{4}y_1+\frac{\sqrt{3}}{2}z_1=0\end{cases}$

令 $z_1=1$，则 $x_1=2,y_1=0$，取 $\vec{n_1}=(2,0,1)$

设面 DEF 的一个法向量为 $\vec{n_2}=(x_2,y_2,z_2),\overrightarrow{ED}=(-\sqrt{3},1,0)$，

由 $\begin{cases}\vec{n_2}\cdot\overrightarrow{ED}=0\\ \vec{n_2}\cdot\overrightarrow{EF}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\sqrt{3}x_2+y_2=0\\ -\frac{\sqrt{3}}{4}x_2+\frac{5}{4}y_2+\frac{\sqrt{3}}{2}z_2=0\end{cases}$

令 $x_2=1$，则 $y_2=\sqrt{3},z_2=-2$，取 $\vec{n_2}=(1,\sqrt{3},-2)$

所以 $\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=0$，$\therefore\vec{n_1}\perp\vec{n_2}$，从而二面角 $C-EF-D$ 为直二面角

20. 已知 a，b，c 分别为 $\triangle ABC$ 三个内角 A，B，C 的对边，且满足 $b\cos C+\sqrt{3}b\sin C-a-c=0, AC=4\sqrt{3}$，$D$ 为 BC 边上的一个点.

（1）若 $\triangle ACD$ 的面积为 $2\sqrt{3}$，$AD=2$，求 CD 的长；

（2）若 $AB=AD$，$f(C)=2AD\cos C+CD\cos C$，求 $f(C)$ 的最大值及此时角 C 的大小.

【答案】（1）$CD=2\sqrt{7}$

（2）$f(C)$ 的最大值为 $6\sqrt{3}$，此时 $C=\frac{\pi}{6}$

【解析】

【分析】（1）由正弦定理边角互化，结合三角恒等变换得 $\sin\left(B-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$，进而得 $B=\frac{\pi}{3}$，

再根据$\triangle ACD$的面积得$\angle CAD=\dfrac{\pi}{6}$，再利用余弦定理求解即可；

（2）由题知$\angle ADB=\dfrac{\pi}{3},\angle ADC=\dfrac{2\pi}{3}$，进而在$\triangle ADC$中利用正弦定理$AD=8\sin C,CD=8\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-C\right)$，再根据三角恒等变换得$f(C)=4\sqrt{3}\sin\left(2C+\dfrac{\pi}{6}\right)+2\sqrt{3}$，最后根据三角函数的性质求最大值即可.

【小问1详解】

解：$\because b\cos C+\sqrt{3}b\sin C-a-c=0$，

$\therefore \sin B\cos C+\sqrt{3}\sin B\sin C-\sin A-\sin C=0$

$\because \sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C$

$\therefore \sqrt{3}\sin B\sin C-\cos B\sin C-\sin C=0$

$\because 0<C<\pi$，$\therefore \sin C>0,\sqrt{3}\sin B-\cos B=1$，即$\sin\left(B-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$，

$\because 0<B<\pi$，

$\therefore -\dfrac{\pi}{6}<B-\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{5\pi}{6},B=\dfrac{\pi}{3}$

$\because \triangle ACD$的面积为$2\sqrt{3}$，

$\therefore S_{\triangle ACD}=\dfrac{1}{2}AC\cdot AD\sin\angle CAD=\dfrac{1}{2}\times 2\times 4\sqrt{3}\sin\angle CAD=2\sqrt{3}$

$\therefore \sin\angle CAD=\dfrac{1}{2}$

$\because B=\dfrac{\pi}{3}$，

$\therefore \angle CAD<A<\dfrac{2\pi}{3}$，$\angle CAD=\dfrac{\pi}{6}$，

$\therefore CD^2=AD^2+AC^2-2AC\cdot AD\cos\angle CAD=28$，解得$CD=2\sqrt{7}$.

【小问2详解】

解：$\because$由（1）知$AB=AD, B=\dfrac{\pi}{3}$，

$\therefore \triangle ABD$为正三角形，从而$\angle ADB=\dfrac{\pi}{3},\angle ADC=\dfrac{2\pi}{3}$

在$\triangle ADC$中，由正弦定理得$\dfrac{4\sqrt{3}}{\sin\dfrac{2\pi}{3}}=\dfrac{AD}{\sin C}=\dfrac{CD}{\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-C\right)}$

$\therefore AD=8\sin C, CD=8\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-C\right)$

$\therefore f(C)=16\sin C\cos C+8\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-C\right)\cos C$

$=16\sin C\cos C+8\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos C-\dfrac{1}{2}\sin C\right)\cos C$

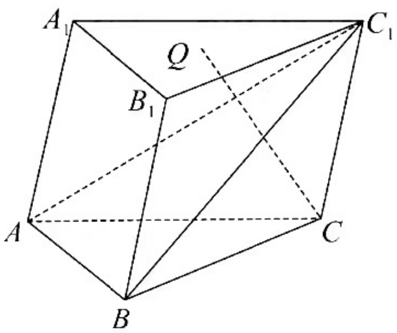
$=12\sin C\cos C+4\sqrt{3}\cos^2 C=6\sin 2C+2\sqrt{3}\cos 2C+2\sqrt{3}$

$=4\sqrt{3}\sin\left(2C+\dfrac{\pi}{6}\right)+2\sqrt{3}$

$\because 0<C<\dfrac{\pi}{3}$，$\therefore \dfrac{\pi}{6}<2C+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{5\pi}{6}$

所以当$2C+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$，即$C=\dfrac{\pi}{6}$时，$f(C)_{\max}=6\sqrt{3}$

21. 如图，在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$\angle ABC=90°$，$AB=BC=2$，平面$ABC_1\perp$平面BB_1C_1C.



（1）求证：$AB\perp$平面BB_1C_1C；

（2）若$\angle BB_1C_1=120°$，Q是$\triangle A_1B_1C_1$的重心，直线A_1B_1与CQ所成角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，求直线CQ和平面ABC_1所成角的正弦值.

【答案】（1）证明见解析；

（2）$\dfrac{5\sqrt{2}}{8}$.

【解析】

【分析】(1)根据线面垂直的判定定理，结合面面垂直的性质进行证明即可;

(2)建立空间直角坐标系，利用空间向量夹角公式进行求解即可.

【小问1详解】

作$CH \perp BC_1$于H,

$\because$平面$ABC_1 \perp$平面BB_1C_1C，平面$ABC_1 \perp$平面$BB_1C_1C = BC_1$

$\therefore CH \perp$平面ABC_1

$\because AB \subset$平面ABC_1,

$\therefore AB \perp CH$,

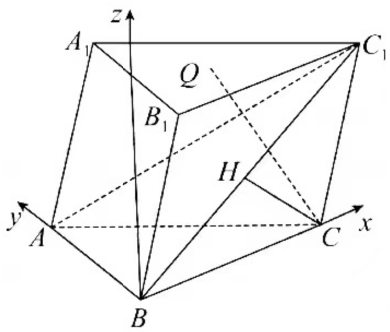
$\because \angle ABC = 90°$，$\therefore AB \perp BC, \because BC \cap CH = C, BC, CH \subset$平面$BB_1C_1C$,

$\therefore AB \perp$平面BB_1C_1C;

【小问2详解】

设$CC_1 = a$，以B为原点，以BC所在的直线为x轴，建立如图所示的直角坐标系，则

$A(0,2,0)$,



由(1)可知$AB \perp$平面BB_1C_1C，$\therefore C(2,0,0), B_1\left(\frac{1}{2}a, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$,

$\because \overrightarrow{BA_1} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB_1} = \left(\frac{1}{2}a, 2, \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$，$\therefore A_1\left(\frac{1}{2}a, 2, \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$

$\because \overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1} = \left(\frac{1}{2}a + 2, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}a\right) \therefore C_1\left(\frac{1}{2}a + 2, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$

$\because Q$是$\triangle A_1B_1C_1$的重心，$\therefore Q\left(\frac{1}{2}a + \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$,

$\overrightarrow{CQ} = \left(\frac{1}{2}a - \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$

而 $\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{AB}=(0,-2,0)$

设直线 A_1B_1 与 CQ 所成角为 θ，则

$$\cos\theta=\left|\frac{\overrightarrow{A_1B_1}\cdot\overrightarrow{CQ}}{\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CQ}\right|}\right|=\frac{2}{\sqrt{9a^2-12a+20}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$\Rightarrow a=2$.

此时 $\overrightarrow{CQ}=\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},\sqrt{3}\right),\overrightarrow{BA}=(0,2,0),\overrightarrow{BC_1}=(3,0,\sqrt{3})$

设平面 ABC_1 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$

由 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BA}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BC_1}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2y=0\\ 3x+\sqrt{3}z=0\end{cases}$

令 $z=\sqrt{3}$，则 $x=-1,y=0$，取 $\vec{n}=(-1,0,\sqrt{3})$

设直线 CQ 和平面 ABC_1 所成角为 γ，则

$$\sin\gamma=\left|\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{CQ}}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{CQ}|}\right|=\frac{\frac{1}{3}+3}{2\times\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+3}}=\frac{5\sqrt{2}}{8}.$$

22. 已知函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$.

（1）这比较 $f(x)$ 与 $1-\dfrac{x^2}{6}$ 的大小；

（2）求证：当 $0<x\le 1.1$ 时，$f(x)>\dfrac{\ln(1+x)}{x}$. 参考数据：$2.1^4=19.4481,2.7^3=19.683$.

【答案】（1） $f(x)>1-\dfrac{x^2}{6}$

（2）证明见解析

【解析】

【分析】（1）根据题意，构造函数 $g(x)=\sin x-x+\dfrac{x^3}{6}(x\in\mathrm{R})$，再利用导数研究函数最值即可得答案；

（2）根据题意，结合（1）将问题转化为证明 $x-\dfrac{x^3}{6}>\ln(1+x)$，进而设 $r(x)=x-\dfrac{x^3}{6}-\ln(1+x),0\le x\le 1.1$，再根据函数单调性证明即可；

【小问 1 详解】

解：$f(x)-\left(1-\frac{x^2}{6}\right)=\frac{\sin x}{x}-\left(1-\frac{x^2}{6}\right)=\frac{1}{x}\left(\sin x-x+\frac{x^3}{6}\right)(x\neq 0)$

令 $g(x)=\sin x-x+\frac{x^3}{6}(x\in \mathrm{R})$，则 $g'(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2}$

设 $h(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2}$，则 $h'(x)=x-\sin x$，令 $\varphi(x)=h'(x)=x-\sin x$，

则 $\varphi'(x)=1-\cos x\geq 0,\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为增函数，

$\because \varphi(0)=h'(0)=0$，

$\therefore$ 当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$h'(x)<0,h(x)$ 为减函数；当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$h'(x)>0,h(x)$ 为增函数，

$\therefore h(x)\geq h(0)=0$，即 $g'(x)\geq g'(0)=0$．

$\therefore g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，

由于 $g(0)=0$，

所以当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$g(x)<0,f(x)-\left(1-\frac{x^2}{6}\right)>0,f(x)>1-\frac{x^2}{6}$

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$g(x)>0,f(x)-\left(1-\frac{x^2}{6}\right)>0,f(x)>1-\frac{x^2}{6}$．

综上可知：$f(x)>1-\frac{x^2}{6}$

【小问 2 详解】

解：当 $0<x\leq 1.1$ 时，要证明 $f(x)>\frac{\ln(1+x)}{x}$，只需证明 $\sin x>\ln(1+x)$．

由（1）可知，当 $0<x\leq 1.1$ 时，$\sin x>x-\frac{x^3}{6}$ 恒成立，

因此只需证明当 $0<x\leq 1.1$ 时，$x-\frac{x^3}{6}>\ln(1+x)$ 即可．

设 $r(x)=x-\frac{x^3}{6}-\ln(1+x),0\leq x\leq 1.1$，

则 $r'(x)=1-\frac{x^2}{2}-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}-\frac{x^2}{2}=\frac{x\left(2-x-x^2\right)}{2(1+x)}=\frac{x(1-x)(2+x)}{2(1+x)}$，

因此当 $0\leq x<1$ 时，$r'(x)\geq 0,r(x)$ 单调递增；

当 $1<x\leq 1.1$ 时，$r'(x)<0,r(x)$ 单调递减

所以 $r(x)$ 的最小值只能是 $r(0)$ 与 $r(1.1)$ 中最小的一个．

因为$r(0)=0,r(1.1)=1.1-\frac{1.1^3}{6}-\ln 2.1$，

而$1.1-\frac{1.1^3}{6}=1.1\times\left(1-\frac{1.1^2}{6}\right)>0.878$.

因为$2.1^4=19.4481,2.7^3=19.683$，

所以$2.1^4<2.7^3<e^3$，所以$2.1<e^{\frac{3}{4}}$，$\ln 2.1<\frac{3}{4}=0.75$，

所以，$r(1.1)>0.878-0.75>0$.

所以，当$0<x\le 1.1,r(x)>0$恒成立，即$x-\frac{x^3}{6}>\ln(1+x)$，

所以，当$0<x\le 1.1$时，$f(x)>\frac{\ln(1+x)}{x}$.

【点睛】关键点点睛：本题第二小问解题的关键在于结合（1）的结论，将问题转化为证明$x-\frac{x^3}{6}>\ln(1+x)$，再构造函数求解最小值；再比较是$r(0)$与$r(1.1)$的大小时，借助中间量$\frac{3}{4}$实现大小比较.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

微信搜一搜

自主选拔在线