高 2025 届高一（下）数学期末考试参考答案

一、单选题

1	2	3	4	5	6	7	8
A	D	A	D	B	C	C	D

1.【答案】A

【详解】由题知，这个人体重减轻的概率为$\frac{59}{100}$.故选：A

2.【答案】D

【详解】在复平面内，复数$z=\frac{8-i}{5}$对应的点$(\frac{8}{5},-\frac{1}{5})$位于第四象限.故选：D

3【答案】A

【详解】在$\triangle ABC$中，最大角为角 C，$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{12^2+13^2-17^2}{2\times9\times10}=\frac{313-289}{180}>0$.所以角$C\in(0,\frac{\pi}{2})$，则三角形为锐角三角形，故选：A

4【答案】D

【详解】【详解】因为甲，乙通过面试的概率都是$\frac{4}{5}$，且两人通过面试相互之间没有影响，所以他们只有一人通过面试的概率为$\left(1-\frac{4}{5}\right)\times\frac{4}{5}+\frac{4}{5}\times\left(1-\frac{4}{5}\right)=\frac{8}{25}$，故选:D

5.【答案】B

【详解】由图象知，函数的最小正周期$T=4\left[\frac{2\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]=4\pi$，即$\omega=\frac{2\pi}{4\pi}=\frac{1}{2}$，$A=\sqrt{3}$，由五点对应法则代入$\left(\frac{2\pi}{3},\sqrt{3}\right)$知，$\sqrt{3}\sin\left(\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{3}+\varphi\right)=\sqrt{3}$，即$\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{3}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$，因为$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，解得$\varphi=\frac{\pi}{6}$，

所以$f(x)=\sqrt{3}\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)$，则$f(x+\theta)=\sqrt{3}\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$为偶函数，有$\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in Z)$，$\theta=\frac{2\pi}{3}+2k\pi(k\in Z)$，当$k=-1,\theta=-\frac{4\pi}{3}$，故选：B

6.【答案】C

【详解】因为$a//\alpha,a//b$，所以b与平面α平行或直线b在平面α内，A 错误，C 正确；对选项 B，当$\alpha\cap\beta=c$，且$a//c//b$，此时也符合$b//\beta,a\not\subset\beta$，所以 B 错误，当$b\subset\alpha$，此时不存在平面$\beta$与$\alpha$，D 不正确.故选：C

7.【答案】C

【详解】在三角形 ABP 中，$\angle ABP=180^\circ-\gamma+\beta$，$\angle BPA=180^\circ-(\alpha-\beta)-\angle ABP=180^\circ-(\alpha-\beta)-(180^\circ-\gamma+\beta)=\gamma-\alpha$，

正弦定理：$\frac{AP}{\sin\angle ABP}=\frac{AB}{\sin\angle APB}$，所以$AP=\frac{AB\sin\angle ABP}{\sin\angle APB}=\frac{AB\sin(\gamma-\beta)}{\sin(\gamma-\alpha)}$，

$PQ=AP\sin\alpha=AB\frac{\sin\alpha\sin(\gamma-\beta)}{\sin(\gamma-\alpha)}=200\times\frac{\sin45^\circ\sin41^\circ}{\sin30^\circ}=200\sqrt{2}\sin41^\circ\approx186.12$，故选 C，

8.【答案】D

【详解】由$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=4$，所以$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{5}{2}|\vec{b}|^2-2$，又非零向量$\vec{a},\vec{b}$不共线，所以$|\vec{a}|,|\vec{b}|,|\vec{a}-\vec{b}|$为三角形三边，所以$|\vec{a}|+|\vec{b}|>|\vec{a}-\vec{b}|>|\vec{a}|-|\vec{b}|$，所以$3|\vec{b}|>2>|\vec{b}|$，$2>|\vec{b}|>\frac{2}{3}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{5}{2}|\vec{b}|^2-2\in(-\frac{8}{9},8)$选 D

二、多选题

9	10	11	12
AB	ABD	ABD	BCD

9.【答案】AB

【详解】由图可知，$f_{[40,50)}=0.05$，$f_{[50,60)}=10x$，$f_{[60,70)}=0.2$，$f_{[70,80)}=0.3$，$f_{[80,90)}=0.25$，$f_{[90,100]}=0.05$，由频率之和为 1 可得$10x=0.15$，故$x=0.015$；所以选项 A 对；

因为$f_{[90,100]}=\dfrac{5}{N}=0.05$，所以$N=100$，所以选项 B 对；

由$f_{[40,50)}+f_{[50,60)}+f_{[60,70)}=0.4$，所以中位数位于区间$[70,80)$，设中位数为$a$，则$(a-70)\times 0.03=0.1$，解得$a=73.33$，所以选项 C 错；

平均数为$45\times 0.05+55\times 0.15+65\times 0.2+75\times 0.3+85\times 0.25+95\times 0.05=72$，所以选项 D 错；

综上所述，AB 正确，而 CD 错误；

故选：AB

10.【答案】ABD

【详解】依题意，$z_1=1-\sqrt{3}\mathrm{i}$，则$|z_1|=\left|\overrightarrow{OZ_1}\right|=2$，故 A 正确；

又$\overline{z_1}=1+\sqrt{3}\mathrm{i}$，$\left(\overline{z_1}\right)^2=-2+2\sqrt{3}\mathrm{i}$，$z_1^2=-2-2\sqrt{3}\mathrm{i}$，$\overline{z_1^2}=-2+2\sqrt{3}\mathrm{i}$，即$\overline{z_1^2}=\left(\overline{z_1}\right)^2$，故 B 正确；

对于选项 C: $\left|\dfrac{z_2}{z_1}\right|=\dfrac{|z_2|}{|z_1|}=1$，故 C 错误；

由复数几何意义知 D 选项对，

故选：ABD.

11.【答案】ABD

【详解】由题意$\sqrt{3}\sin\alpha+\cos\alpha=2\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{4}{3}$，即$\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{2}{3}$，

又$\alpha\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，知$\alpha+\dfrac{\pi}{6}\in(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{2\pi}{3})$，当$\alpha+\dfrac{\pi}{6}\in(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3})$时，$\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)\in(\dfrac{\sqrt{3}}{2},1]$，

而$\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{2}{3}<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以$\alpha\in(0,\dfrac{\pi}{6})$所以$\cos(2\alpha+\dfrac{7\pi}{6})$，

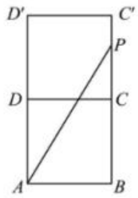
则$\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)=\sqrt{1-\sin^2(\alpha+\dfrac{\pi}{6})}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，则$\sin2\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{4\sqrt{5}}{9}$，

$\cos2\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos^2\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)-\sin^2\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{9}$

所以$\sin\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{12}\right)=\sin(2(\alpha+\dfrac{\pi}{6})-\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{\sqrt{2}}{2}[\sin(2(\alpha+\dfrac{\pi}{6}))-\cos(2(\alpha+\dfrac{\pi}{6}))]=\dfrac{4\sqrt{10}-\sqrt{2}}{18}$.

故答案为 ABD

12.【答案】 BCD



【详解】对于 A，将正方体的下面和侧面展开可得如图图形，

连接AP，则$|AP|=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}<\sqrt{17}$，故 A 错误；

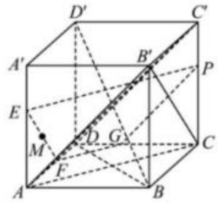
2

对于 B，当 $|PC'|=1$，所以 $\triangle BPB'$ 中，$PB'=BP=\sqrt{5},BB'=2$，则 $\sin\angle PBB'=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，

设 $\triangle BPB'$ 外接圆半径为 r，则由正弦定理知：$2r=\dfrac{PB'}{\sin\angle PBB'}=\dfrac{5}{2}$，则 $r=\dfrac{5}{4}$，

又 $AB\perp BPB'$，设三棱锥 $B'-ABP$ 的外接球半径为 R，则 $R^2=(\dfrac{AB}{2})^2+r^2=1+\dfrac{25}{16}=\dfrac{41}{16}$

，所以三棱锥 $B'-ABP$ 的外接球表面积 $S=4\pi R^2=\dfrac{41}{4}\pi$，故 B 正确；



对于 C，如图：

因为 DD' 平面 $ABCD$，$AC\subset$ 平面 $ABCD$，$DD'\perp AC$，又 $AC\perp BD$，

$DD'\cap BD=D$，DD'，$BD\subset$ 平面 $DD'B$，

所以 $AC\perp$ 平面 $DD'B$，$BD'\subset$ 平面 $DD'B$.

所以 $AC\perp BD'$'，同理可得 $BD'\perp AB'$，$AC\cap AC'=A$，AC，$AB'\subset$ 平面 ACB'.所以 $BD'\perp$ 平面 ACB'.

所以过点 P 作 $PG//C'D$ 交 CD 交于 G，过 G 作 $GF//AC$ 交 AD 交于 F，

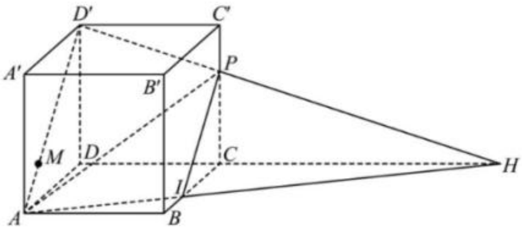
由 $AB'//C'D$，可得 $PG//AB'$，$PG\not\subset$ 平面 ACB'，$AB'\subset$ 平面 ACB'，

所以 $PG//$ 平面 ACB'，同理可得 $GF//$ 平面 ACB'.则平面 $PGF//$ 平面 ACB'.

设平面 PEF 交平面 $ADD'A'$ 于 EF，则 M 的运动轨迹为线段 EF，由点 P 在棱 CC' 上，且 $|PC'|=\dfrac{1}{2}$，可得

$|DG|=|DF|=\dfrac{1}{2},|AF|=|AE|=\dfrac{3}{2}$，所以 $|EF|=\dfrac{3}{4}|AD|=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，故 C 正确；

对于 D，如图：



延长 DC，$D'P$ 交于点 H，连接 AH 交 BC 于 I，连接 PI，

所以平面 $AD'P$ 被正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 截得的截面为 $AIPD'$.

$\triangle PCH\sim\triangle D'DH$，所以 $\dfrac{|PH|}{|D'H|}=\dfrac{|PC|}{|DD'|}=\dfrac{|HC|}{|DH|}=\dfrac{3}{4}$.$\triangle ICH\sim\triangle ADH$，所以 $\dfrac{|CI|}{|DA|}=\dfrac{|HC|}{|DH|}=\dfrac{|IH|}{|AH|}=\dfrac{3}{4}$，

所以 $\dfrac{|PH|}{|D'H|}=\dfrac{|IH|}{|AH|}=\dfrac{|PI|}{|AD'|}=\dfrac{3}{4}$，所以 $PI//AD'$，且 $|PI|\neq|AD'|$，

所以截面 $AIPD'$ 为梯形，$|AI|=|PD'|=\sqrt{4+\dfrac{1}{4}}=\dfrac{\sqrt{17}}{2}$，所以截面 $AIPD'$ 为等腰梯形.

所以 $S_{AIPD'}=\dfrac{1}{2}\times(AD'+BP)h=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{7\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{\dfrac{33}{8}}=\dfrac{7\sqrt{33}}{8}$，故 D 正确.

故选：BCD.

三、填空题

13	14	15	16
$-4+2i$	$\dfrac{3}{8}$	$\dfrac{2}{9}$	$\dfrac{\sqrt{21}}{2}$

13.【答案】$-4+2i$

【详解】由题知：$\overline{OA}=(1,2),\overline{OB}=(-3,4)$，则 $\overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}=(-4,2)$，对应复数为 $-4+2i$

14.【答案】$\frac{3}{8}$

【详解】由 $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+2\sin\alpha\cos\alpha$，则 $\frac{1}{4}=1-2\sin2\beta$，所以 $\sin2\beta=\frac{3}{8}$。

15.【答案】$\frac{2}{9}$

【详解】设第一次点数为x,第二次点数为y,则两次结果记为（x,y）.样本空间包含基本事件数为 $6\times6=36$ 个，事件A包含(1,3),(2,4),(3,5),(4,6),(6,4),(5,3),(4,2),(3,1)共8个基本事件，则 $P(A)=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$

16.　【答案】$\frac{\sqrt{21}}{2}$

【详解】由题意得：$2c\cdot\sin A\cos B=a\cdot\sin A-b\cdot\sin B+\frac{1}{4}b\cdot\sin C$，

在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$，得 $2ac\cdot\cos B=a^2-b^2+\frac{1}{4}bc$，

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，所以 $a^2+c^2-b^2=a^2-b^2+\frac{1}{4}bc$，

得 $b=4c$，又∵ $c=1$，∴ $b=4$.

设 $\angle BAC=\theta$，∵AD为 BC 边上的中线，∴ $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，

则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}\cdot\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos\theta=2\cos\theta+\frac{1}{2}$，

$\left|\overrightarrow{AD}\right|=\sqrt{\overrightarrow{AD}^2}=\sqrt{\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)}=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{AC}\right|^2+2\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos\theta}=\frac{\sqrt{17+8\cos\theta}}{2}$，

由 $\tan\angle BAD=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，则 $\cos\angle BAD=\frac{\sqrt{21}}{7}$，

又 $\cos\angle BAD=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AD}\right|}=\frac{4\cos\theta+1}{\sqrt{17+8\cos\theta}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$，①

整理得 $28\cos^2\theta+8\cos\theta-11=0$，即 $(2\cos\theta-1)(14\cos\theta+11)=0$，得 $\cos\theta=\frac{1}{2}$ 或 $\cos\theta=-\frac{11}{14}$，

由①，得 $4\cos\theta+1>0$，∴ $\cos\theta>-\frac{1}{4}$，∴ $\cos\theta=\frac{1}{2}$，∴ $AD=\frac{\sqrt{21}}{2}$

四、解答题

17.【答案】(1) 80，　86　(2) $\frac{2}{5}$

【详解】（1）高一年级随机抽取的10名毕业生问卷计分调查的平均值为：

$\overline{x}_A=\frac{1}{10}\times(64+72+79+78+78+75+86+85+92+91)=80$，

将高一年级得分排序：64，72，75，78，78，79，85，86，91，92

由 $i=10\times75\%=7.5$ 不是整数，则 i 取8，即第8个数据：86.所以第75百分位数为86.……　5分

（2）由已知，上述毕业生中，高一打分为满意的学生共有3人，分别记为 a,b,c，

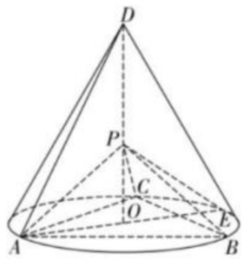
高二打分为满意的学生共有2人，分别记为x,y，

从这5人中任取2人，所有的基本事件有：ab，ac，ax，ay，bc，bx，by，cx，cy，xy，共10个，

设事件A="2人来自同一年级"，则事件A中的基本事件有：ab，ac，bc，xy，共4个，

∴从上述满意的学生中任取2人，这2人来自同一年级的概率$P(A)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$…… 10分

18【详解】:（1）圆锥底面周长为4π，底面积为$S_{底面}=4\pi$，侧面展开为以D圆心，半径$AD=4$，弧长为4π的扇形，所以侧面积为$S_{侧面}=\frac{1}{2}\times4\times4\pi=8\pi$，所以该圆锥的表面积为$S_{表}=S_{底面}+S_{侧面}=12\pi$…… 6分



（2）直角三角形ADO中，$AD=4,AO=2$，所以$DO=2\sqrt{3}$，$DP=\frac{2}{3}DO=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，

$PO=\frac{1}{3}DO=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$S_{\triangle ABO}=\frac{1}{2}AO\cdot BO\sin\angle AOB=\frac{1}{2}\times2\times2\times\sin120^\circ=\sqrt{3}$，

$V_{D-APB}=V_{D-ABO}-V_{P-ABO}=\frac{1}{3}DO\times S_{\triangle ABO}-\frac{1}{3}PO\times S_{\triangle ABO}=\frac{1}{3}DP\times S_{\triangle ABO}=\frac{1}{3}\times\frac{4\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{3}=\frac{4}{3}$…… 12分

19.【详解】(1) $f(x)=2\sin x\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+m=2\sin x\left(\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)+m$

$=\sin x\cos x-\sqrt{3}\sin^2x+m=\frac{1}{2}\sin2x-\frac{\sqrt{3}}{2}(1-\cos2x)+m=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+m-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

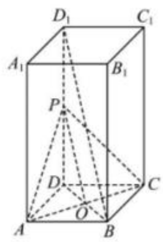
由$-1\le\sin(2x+\frac{\pi}{3})\le1$，则$f(x)$最大值为$1+m-\frac{\sqrt{3}}{2}=2m$，所以$m=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$…… 6分

（2）令$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le2x+\frac{\pi}{3}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in Z$，解得$-\frac{5\pi}{12}+k\pi\le x\le\frac{\pi}{12}+k\pi$，$k\in Z$，

所以$f(x)$的单调递减区间为$\left[-\frac{5\pi}{12}+k\pi,\frac{\pi}{12}+k\pi\right]$，$k\in Z$；

所以$[0,a]\subseteq\left[-\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{12}\right]$，故$a$的取值范围为$\left(0,\frac{\pi}{12}\right]$，则$a$的最大值为$\frac{\pi}{12}$…… 12分

20.【详解】(1) 设AC和BD交于点O，则O为BD的中点，连接PO，



∵P是DD_1的中点，　∴$PO//BD_1$，

又∵$PO\subset$平面PAC，$BD_1\not\subset$平面PAC，

∴直线BD_1 // 平面PAC…… 5分

（2）设$AA_1=2AB=4$，则三角形APC为正三角形，$AP=AC=PC=2\sqrt{2}$，$S_{\triangle APC}=\frac{\sqrt{3}}{4}AP^2=2\sqrt{3}$

设点D到平面APC的距离为d，由等体积法：

$V_{P-ADC}=V_{D-PAC}$，所以$\frac{1}{3}PD\cdot S_{\triangle ADC}=\frac{1}{3}d\cdot S_{\triangle APC}$，则$d=\frac{PD\cdot S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle APC}}=\frac{4}{2\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$，

由点 P 为中点，所以点 D,D_1 到平面 APC 距离相等，由 $AD_1//BC_1$，所以直线 BC_1 与平面 APC 所成线面角，与直线 AD_1 与平面 APC 所成线面角相等，设直线 AD_1 与平面 APC 所成线面角为 θ，所以 $\sin\theta=\dfrac{d}{AD_1}=\dfrac{\sqrt{15}}{15}$。…… 12 分

21.【详解】：设 $\angle ABC=\alpha,\angle ADC=\beta$

（1）在 $\triangle ABC$ 中，$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos\alpha=8-8\cos\alpha$，

在 $\triangle ACD$ 中，$AC^2=AD^2+DC^2-2AD\cdot DC\cdot\cos\beta=16-8\sqrt{3}\cos\beta$，

所以 $8-8\cos\alpha=16-8\sqrt{3}\cos\beta$，则有：$\sqrt{3}\cos\beta-\cos\alpha=1$

由 $\alpha+\beta=\pi$，所以 $-\cos\alpha=\cos\beta$，所以 $\sqrt{3}\cos\beta+\cos\beta=1$，所以 $\cos\beta=\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

所以 $AC^2=16-8\sqrt{3}\cos\beta=4+4\sqrt{3}$，则 $AC=2\sqrt{1+\sqrt{3}}$ …… 6 分

（2）$S_{ABCD}=S_{\Delta ABC}+S_{\Delta ACD}=2\sin\alpha+2\sqrt{3}\sin\beta$

所以 $\dfrac{S_{ABCD}}{2}=S_{\Delta ABC}+S_{\Delta ACD}=\sqrt{3}\sin\beta+\sin\alpha\cdots(1)$

由（1）知：$1=\sqrt{3}\cos\beta-\cos\alpha\cdots(2)$，

把（1)，（2）两式平方后相加：

所以 $(\dfrac{S_{ABCD}}{2})^2+1=(\sqrt{3}\sin\beta+\sin\alpha)^2+(\sqrt{3}\cos\beta-\cos\alpha)^2$

$(\dfrac{S_{ABCD}}{2})^2+1=4-2\sqrt{3}\cos(\alpha+\beta)$，

$(\dfrac{S_{ABCD}}{2})^2=3-2\sqrt{3}\cos(\alpha+\beta)$

当 $\alpha+\beta=\pi$ 时，$(\dfrac{S_{ABCD}}{2})^2$ 取最大值 $3+2\sqrt{3}$，

所以四边形面积最大值为 $2\sqrt{3+2\sqrt{3}}$ …… 12 分

22.【详解】：（1）由 $PD\perp$ 面$ABCD$，所以 $PD\perp BC$，

又 $CD\perp BC$，所以 $BC\perp$ 面PQCD，所以 $ND\perp BC$，

在直角三角形 PCD 中，设 $PD=\dfrac{\sqrt{2}}{2}CD=\sqrt{3}$，则 $CD=\sqrt{6}$，$PC=3$，所以 $NC=2,PN=1$

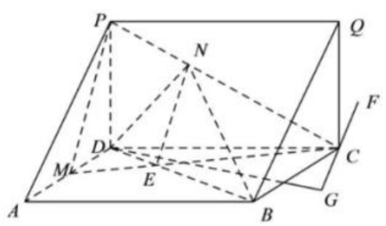
由 $\dfrac{PN}{PD}=\dfrac{PD}{PC}$，$\angle DPN=\angle CPD$，所以 $\Delta PDN\sim\Delta PCD$，所以 $DN\perp PC$，则 $DN\perp$ 面BCN，

所以 $DN\perp BN$ …… 5 分

(2)在平面 QBC 中，过点 C 作射线 $CF\perp BC$，

因为底面 ABCD 为矩形，所以 $BC\perp CD$，

所以 $\angle DCF$ 为二面角 $Q-BC-D$ 的平面角，且 $\angle DCF=\theta$。



又$CF\cap CD=C$，所以$BC\perp$平面 CDF，

在平面 DCF 中，过点 D 作$DG\perp FC$，垂足为 G，

因为$BC\perp$平面 DCF，$DG\subset$平面 DCF，

所以$DG\perp BC$，又$BC\cap FC=C$，$BC\subset$平面 BCQ，$FC\subset$平面 BCQ，

所以$DG\perp$平面 BCQ，

于是 DG 为点 D 到平面 BCQ 的距离，且$DG=DC\sin\theta$，

设直线 BD 和平面 PAD 所成角为α，则$\sin\alpha=\dfrac{DG}{BD}=\dfrac{AB\sin\theta}{\sqrt{AB^2+AD^2}}=\dfrac{\sin\theta}{\sqrt{1+4\cos^2\dfrac{\theta}{2}}}=\dfrac{\sin\theta}{\sqrt{3+2\cos\theta}}$，

由$\theta\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{2\pi}{3}\right]$，可得$\cos\theta\in\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right],\cos^2\theta\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$，

$\therefore t=\sqrt{3+2\cos\theta},t\in[\sqrt{2},\sqrt{3+\sqrt{2}}]$，$\cos\theta=\dfrac{t^2-3}{2},\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\dfrac{(t^2-3)^2}{4}}$

所以$\sin\alpha=\dfrac{1}{t}\times\sqrt{1-\dfrac{(t^2-3)^2}{4}}=\dfrac{\sqrt{-(t^2+\dfrac{5}{t^2})+6}}{2}\le\dfrac{\sqrt{-2\sqrt{t^2\times\dfrac{5}{t^2}}+6}}{2}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$（当且仅当$t^2=\sqrt{5}$取“=”）

所以直线 BD 和平面 PAD 所成角的正弦值最大值为$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

又$\sin\alpha\le\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}<\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sin\dfrac{\pi}{3}$，所以取不到。........ 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。