柳州高中／南宁二中高三(5月)联考

文科数学参考答案

一、(60分)

1. A(因为集合 $A=\{x\mid |x|<2\}=\{x\mid -2<x<2\}$,$B=\{-1,0,2,3\}$,所以,$A\cap B=\{-1,0\}$.

故应选 A.)

2. C(依题意,

$z=(1-\mathrm{i})(2+a\mathrm{i})=(2+a)+(a-2)\mathrm{i}$,

因为复数 z 在复平面对应的点在实轴上,

所以 $a-2=0$,解得 $a=2$.

故应选 C.)

3. A(由图1得样本容量为 $(350+200+450)\times 15\%=1000\times 15\%=150$,

抽取贫困户的户数为 $200\times 15\%=30$ 户,则抽取 C 村贫困户的户数为 $30\times 0.5=15$ 户.

故应选 A.)

4. A(记3款是用新疆超长棉纱制成的毛巾分别为 a、b、c,另外2款分别记为 A、B,

从这5款毛巾中任选2款,所有的情况分别为 ab、ac、aA、aB、bc、bA、bB、cA、cB、AB,共10种,

其中,“在这5款毛巾中任选2款,只有一款是用新疆超长棉纱制成”所包含的情况有:

aA、aB、bA、bB、cA、cB,共6种,

故所求概率为 $P=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$.

故应选 A.)

5. A(对于 A,因为 $y=\sin x$ 是奇函数,又在 $(-1,1)$ 上是增函数,所以 A 正确.

对于 B,因为 $y=x^{-\frac{2}{3}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ 为偶函数,且定义域为 $\{x\mid x\neq 0\}$,所以 B 错误.

对于 C,因为 $y=-x^3$ 是奇函数,但在 $(-1,1)$ 上为减函数,所以 C 错误.

对于 D,因为 $y=-\cos(x-\dfrac{\pi}{2})=-\sin x$ 为奇函数,在 $(-1,1)$ 上是减函数,所以 D 错误.

故应选 A.)

6. D($f(-x)=\dfrac{(-x)\sin(-x)}{2}=\dfrac{x\sin x}{2}=f(x)$,可得 $f(x)$ 为偶函数,排除 C 项,由 $\sin x$ 可正可负值,排除 B 项.

当 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 时,$f(\dfrac{\pi}{2})>0$. 排除 A 项.

故应选 D.)

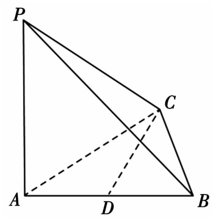
7. A(由题意得:$S_{n+1}=3^n+t$,$\therefore a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=3^n-3^{n-1}=2\times 3^{n-1}$

$\therefore a_n=2\times 3^{n-2}$,而 $a_1=2\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$,$S_1=1+t$

$\therefore 1+t=\dfrac{2}{3}$. $\therefore t=-\dfrac{1}{3}$.

故应选 A.)

8. C(根据题意可知三棱锥如图示:



在三棱锥 $P-ABC$ 中,$PA\perp$ 底面 ABC,$AC=BC$,D 为 AB 的中点,

$PA=AB=CD=2$,则 $CD\perp AB$,

故 $V=\dfrac{1}{3}\times PA\times\dfrac{1}{2}\times CD\times AB=\dfrac{1}{3}\times 2\times\dfrac{1}{2}\times 2\times 2=\dfrac{4}{3}$

故应选 C.)

9. B($\sin 3+\cos 3=\sqrt{2}\sin(3+\dfrac{\pi}{4})$,

因为 $\dfrac{3\pi}{4}<3<\pi$,所以 $\pi<3+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{5\pi}{4}$,所以 $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\sin(3+\dfrac{\pi}{4})<0$,

所以 $\sin 3+\cos 3$ 的值所在的范围是 $(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 0).

故应选 B.)

10. A(设该圆台的高为 h,上、下底面圆的半径分别为 r,R.

由圆台的体积公式 $V=\frac{\pi}{3}(r^2+R^2+rR)h$,

得 $\frac{\pi}{3}\times(2^2+4^2+8)\times h=28\pi$,解得 $h=3$.

故应选 A.)

11. B($\frac{1}{10001}+\frac{1}{10002}+\cdots+\frac{1}{30000}=(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{30000})-(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{10000})=\ln 30000+\gamma-(\ln 10000+\gamma)=\ln 30000-\ln 10000=\ln\frac{30000}{10000}=\ln 3$.

故应选 B.)

12. C(因为 $y=b_0+b_1x^2-b_2x^3$ 的定义域为 $\{x\mid x>0\}$,不关于原点对称,故 A 不正确;

模型函数的图象也不可能是中心对称图象,故 B 不正确;

$y'=2b_1x-3b_2x^2=x(2b_1-3b_2x)=0$,则 $x=0$ 或 $x=\frac{2b_1}{3b_2}$,

若 b_1,b_2,均是正数,则 $x=\frac{2b_1}{3b_2}>0$,

令 $y'<0$,则 $x>\frac{2b_1}{3b_2}$;令 $y'>0$,则 $0<x<\frac{2b_1}{3b_2}$,

所以函数在 $(0,\frac{2b_1}{3b_2})$ 上单调递增,在 $(\frac{2b_1}{3b_2},+\infty)$ 上单调递减,

所以当 $x=\frac{2b_1}{3b_2}$ 时,y 有最大值,故 C 正确;

$y'=2b_1x-3b_2x^2=x(2b_1-3b_2x)=0$,若 $b_1>0,b_2<0$,则 $y'>0$,

函数在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,所以 $y>b_0$,苹果树负载量的最小值不是 b_0,故 D 不正确.

故应选 C.)

二、(20 分)

13. 4(因为 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=4$,

所以 $\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=16$,

又因为 $\boldsymbol{a}=(2,1)$,$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$,

所以 $\boldsymbol{a}^2=5$,$\boldsymbol{b}^2=3$,

所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=4$.)

14. 717(由题可知,数列 $\{a_n\}$ 的奇数项成等差数列,偶数项成等比数列.

则 $a_{2n-1}=2(2n-1)-3=4n-5$,

$a_{2n}=2^{2n-1}=\frac{1}{2}\times 4^n$.

则数列 $\{a_n\}$ 的前 10 项和 $=(a_1+a_3+\cdots+a_9)+(a_2+a_4+\cdots+a_8+a_{10})$

$=\frac{5(-1+20-5)}{2}+\frac{2(4^5-1)}{4-1}=35+682=717$.

故答案为:717.)

15. $(x-\sqrt{3})^2+(y-1)^2=1$(答案不唯一)

(由题意可得,$l_1:y=0$ 为 x 轴,$l_2:y=\sqrt{3}x$ 的倾斜角为$60°$,

因为圆 C 的圆心在第一象限,且与 l_1,l_2 都相切,

所以圆心所在直线的倾斜角为$30°$,

所以圆心 C 在直线 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 上,

设圆 C 的圆心为$(\sqrt{3}a,a)(a>0)$,则

由题意可知,圆 C 的半径为 $r=|a|$,

所以圆 C 的方程为$(x-\sqrt{3}a)^2+(y-a)^2=a^2(a>0)$.

故答案为:$(x-\sqrt{3})^2+(y-1)^2=1$(答案不唯一))

16. $\pm\frac{\sqrt{39}}{6}$(由题知 $F(2,0)$,

由题意设直线方程为 $y=k(x-2)$,令 $x=0$,得 $y=-2k$,则 $M(0,-2k)$,

设 $Q(x,y)$,则$\overrightarrow{MQ}=(x,y+2k)$,$\overrightarrow{QF}=(2-x,-y)$,

因为$\overrightarrow{MQ}+2\overrightarrow{QF}=\boldsymbol{0}$,

所以 $(x,y+2k)+2(2-x,-y)=0$,则

$\begin{cases}4-x=0\\-y+2k=0\end{cases}$,

解得$\begin{cases}x=4\\y=2k\end{cases}$,因为点 Q 在双曲线上,

所以$\frac{16}{3}-4k^2=1$,解得 $k=\pm\frac{\sqrt{39}}{6}$,

所以直线 l 的斜率为 $k=\pm\frac{\sqrt{39}}{6}$.)

三、(70 分)

17. (1) 因为 $2\sin B=\sin A+\cos A\cdot\tan C$,所以 $2\sin B\cos C=\sin A\cos C+\cos A\sin C$, … 2 分

即 $2\sin B\cos C=\sin(A+C)$,又 $A+B+C=\pi$,所以 $\sin(A+C)=\sin B\neq 0$, ………… 4 分

所以 $\cos C=\frac{1}{2}$,又 $0<C<\pi$,即 $C=\frac{\pi}{3}$;

…………………………………………………… 6 分

(2) 由余弦定理得 $c^2=a^2+b^2-ab=16+a^2-4a$,① …………………………………… 8 分

由等面积公式得$\frac{1}{2}(a+b+c)r=\frac{1}{2}ab\sin C$.

……………………………………………………… 9 分

即$\frac{1}{2}(a+b+c)\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\times 4a\times\frac{\sqrt{3}}{2}$. …

……………………………………………… 10 分

整理得 $3a=4+c$,②

联立 ①②,解得 $a=\frac{5}{2}$,$c=\frac{7}{2}$,…… 11 分

所以 $a-c=-1$. ……………………………… 12 分

18. (1) 令时间 A 为"职工甲和职工乙微信记步数都不低于 10000",

从 3 月 2 日至 3 月 7 日这 6 天中,3 月 2 日、5 日、7 日这 3 天中,

甲乙微信记步数都不低于 10000, …… 2 分

故 $P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$. ………………………… 5 分

(2)3 月 3 日符合要求. 理由如下:根据频率分步直方图知:微信记步数落在[20,25],[15,20),[10,15),[5,10),[0,5)(单位:千步)区间内的人数依次为 $200\times0.15=30$ 人,$200\times0.25=50$ 人,

$200\times0.3=60$ 人,$200\times0.2=40$ 人,$200\times0.1=20$ 人, ……………………………… 7 分

由甲微信记步数排名第 68,可知当天甲微信记步数在 15000 到 20000 万之间,

根据折线图知:只有 3 月 2 日,3 月 3 日,3 月 7 日. …………………………………………… 9 分

由乙微信记步数排名第 142,可知当天乙微信记步数在 5000 到 10000 万之间,

根据折线图知:只有 3 月 3 日和 3 月 6 日,

…………………………………………… 11 分

所以 3 月 3 日符合要求. …………… 12 分

19. (1) 由条件易得:$AD=DC=1$,$\angle ADC=120°$,

则 $AC^2=1+1-2\times1\times1\times\cos120°=3$,$AC=\sqrt{3}$, ……………………………… 1 分

$\angle ABC=60°$,由余弦定理可知:$AB=2$,

…………………………………………… 2 分

则 $\angle ACB=90°$,所以 $AC\perp BC$. … 3 分

又平面 $PBC\perp$ 平面 $ABCD$,

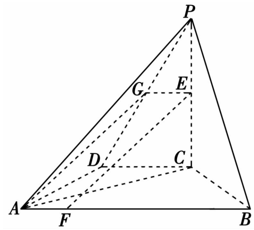
且平面 $PBC\cap$ 平面 $ABCD=BC$,

且 $AC\subset$ 平面 $ABCD$,

则 $AC\perp$ 平面 PBC, ………………… 6 分

(2) 由(1) 可知 $AB=2$.

取棱 PD 中点为 G,连接 EF、EG、AG,



因为 E 为 PC 的中点,所以 $EG\parallel DC$,且 $EG=\frac{1}{2}DC$, ……………………………… 8 分

又 $AF=\frac{1}{4}AB=\frac{1}{2}$,所以 $AF\parallel DC$,且 $AF=\frac{1}{2}DC$,

所以 $EG\parallel AF$,且 $EG=AF$,所以四边形 $AFEG$ 为平行四边形, ………………… 10 分

所以 $EF\parallel AG$. ……………………………

又 $EF\not\subset$ 平面 PAD,

且 $AG\subset$ 平面 PAD,

则 EF // 平面 PAD. ……………… 12 分

20. (1) 由题可得 $f'(x)=a^x\ln a, g'(x)=\frac{1}{x\ln a}$, …………………………………… 1 分

$l_1: y=(a^{x_1}\ln a)x+a^{x_1}(1-x_1\ln a), l_2: y=\frac{x}{x_2\ln a}+\log_a x_2-\frac{1}{\ln a}$, …………………… 2 分

因为 l_1 均过原点,所以 $a^{x_1}(1-x_1\ln a)=0\Rightarrow x_1=\frac{1}{\ln a}\Rightarrow k_1=\mathrm{e}\ln a$, ………………… 3 分

因为 l_2 均过原点,所以 $\log_a x_2-\frac{1}{\ln a}=0\Rightarrow x_2=\mathrm{e}\Rightarrow k_2=\frac{1}{\mathrm{e}\ln a}$, ………………………… 4 分

所以 $k_1k_2=1$. ………………………… 5 分

(2) 由题 $\mathrm{e}^{x_1}=\frac{1}{x_2}, b_1-b_2=\mathrm{e}^{x_1}(1-x_1)-(\ln x_2-1)=\frac{1+\ln x_2}{x_2}-\ln x_2+1$, ……… 6 分

记 $h(x)=\frac{\ln x+1}{x}-\ln x+1(x>0)$,

$h'(x)=-\frac{\ln x+x}{x^2}$,记 $\varphi(x)=-(\ln x+x)$,

…………………………………………………… 7 分

$\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减,且 $\varphi(\frac{1}{2})=\ln 2-\frac{1}{2}>0, \varphi(1)=-1<0$,

$\exists x_0\in(\frac{1}{2},1)$ 使得 $\varphi(x_0)=0$,即 $\ln x_0=-x_0$, …………………………………… 8 分

且 $h(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递增,在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递减. ………………………………… 9 分

$m=h(x_0)=\frac{\ln x_0+1}{x_0}-\ln x_0+1$, $\because h(x_0)>h(\frac{1}{2})=3-\ln 2$, ………………………… 10 分

又 $\because h(x_0)=x_0+\frac{1}{x_0}<\frac{5}{2}$,

故 $3-\ln 2<m<\frac{5}{2}$ 得证. ………… 12 分

21. (1) 由题及抛物线的定义知点 P 到抛物线准线的距离为 5,抛物线的准线方程为 $x=-\frac{p}{2}$, ………………………………………… 1 分

$\therefore 4+\frac{p}{2}=5$,解得 $p=2$,故抛物线的方程为 $y^2=4x$; ………………………………… 4 分

(2) 依题意 $O(0,0)$,设 $OA: y=kx$,

由 $\begin{cases}y=kx\\y^2=4x\end{cases}$,解得 $\begin{cases}x=\frac{4}{k^2}\\y=\frac{4}{k}\end{cases}$, ………… 5 分

所以 $A(\frac{4}{k^2},\frac{4}{k})$,

设 $AB: y-\frac{4}{k}=-\frac{1}{k}(x-\frac{4}{k^2})$, …… 6 分

由 $\begin{cases}y-\frac{4}{k}=-\frac{1}{k}(x-\frac{4}{k^2})\\y^2=4x\end{cases}$,得 $y^2+4ky-16-\frac{16}{k^2}=0$, ………………………………… 7 分

则 $y_A+y_B=-4k$,所以 $y_B=-4k-\frac{4}{k}, x_B=\frac{{y_B}^2}{4}=\frac{(-4k-\frac{4}{k})^2}{4}=4(k+\frac{1}{k})^2$,

即 $B(-4k-\frac{4}{k},4(k+\frac{1}{k})^2)$, ……… 9 分

所以 $|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{{x_B}^2+{y_B}^2}=\sqrt{(-4k-\frac{4}{k})^2+[4(k+\frac{1}{k})^2]^2}=4\sqrt{(k+\frac{1}{k})^4+(k+\frac{1}{k})^2}$, ………… 10 分

设 $t=(k+\frac{1}{k})^2\geqslant 4$,当且仅当 $k=\pm 1$ 时等号成立,

则 $|\overrightarrow{OB}|=4\sqrt{t^2+t}=4\sqrt{(t+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}$,

……………………………………………… 11 分

所以当 $t=4$ 时,$|\overrightarrow{OB}|$ 取最小值为 $8\sqrt{5}$.

……………………………………………… 12 分

22. (1) 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=m+\frac{1}{2m}\\y=m-\frac{1}{2m}\end{cases}$

(m 为参数),

由 $x^2=m^2+1+\frac{1}{4m^2}$, $y^2=m^2-1+\frac{1}{4m^2}$,

故 $x^2-y^2=2$,即 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$, ………… 2 分

又直线 l: $\rho\cos(\theta+\frac{\pi}{3})=1$,所以 $\rho(\cos\theta\cos\frac{\pi}{3}-\sin\theta\sin\frac{\pi}{3})=1$,

即 $\rho(\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta)=1$,即 $\frac{1}{2}\rho\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\rho\sin\theta=1$, ………………………………… 3 分

所以 $\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y=1$,即 $x-\sqrt{3}y-2=0$,

所以曲线 C: $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$,直线 l: $x-\sqrt{3}y-2=0$. ………………………………………… 5 分

(2) 解:由 $k=\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$,所以 $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\theta=\frac{1}{2}$,

故直线 l 的标准参数方程为 $\begin{cases} x=2+\frac{\sqrt{3}}{2}t \\ y=\frac{1}{2}t \end{cases}$ (t 为参数), ……………………………… 7 分

将其代入曲线 C 中,得 $\frac{1}{2}t^2+2\sqrt{3}t+2=0$,

所以 $\begin{cases} t_1+t_2=-4\sqrt{3} \\ t_1t_2=4 \end{cases}$, ……………… 8 分

故 $\frac{1}{|MP|}+\frac{1}{|MQ|}=\frac{1}{|t_1|}+\frac{1}{|t_2|}=\frac{|t_1+t_2|}{|t_1t_2|}=\sqrt{3}$. ………………………… 10 分

23. (1) 当 $a=-1$ 时, $f(x)=|x+1|-2|x-1|$.

$f(x)=|x+1|-2|x-1|=\begin{cases} x-3, x<-1, \\ 3x-1, -1\leqslant x\leqslant 1,, \\ -x+3, x>1 \end{cases}$ ………………… 2 分

所以 $f(x)>-1$ 等价于 $\begin{cases} x<-1 \\ x-3>-1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} -1\leqslant x\leqslant 1 \\ 3x-1>-1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x>1 \\ -x+3>-1 \end{cases}$, ………… 3 分

解得 $0<x<4$,所以不等式 $f(x)>-1$ 的解集为 $(0,4)$. ……………………………… 5 分

(2) 因为 $x\in[-3,-2]$,所以 $f(x)>0$ 等价于 $-x-1-2|x+a|>0$,

所以 $|2x+2a|<-x-1$,即 $x+1<2x+2a<-x-1$, ……………………………… 7 分

所以 $-x+1<2a<-3x-1$ 在 $x\in[-3,-2]$ 时恒成立. …………………………… 8 分

所以 $4<2a<5$,解得 $2<a<\frac{5}{2}$,即实数 a 的取值范围是 $(2,\frac{5}{2})$. …………………… 10 分