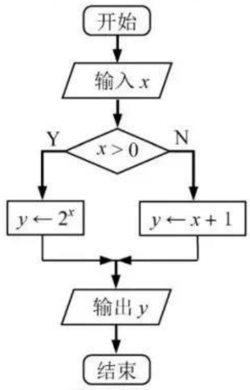
数学Ⅰ试题

参考公式：

柱体的体积 $V = Sh$，其中 S 是柱体的底面积，h 是柱体的高.

一、填空题：本大题共 14 小题，每小题 5 分，共计 70 分. 请把答案填写在答题卡相应位置上.

1. 已知集合 $A = \{-1, 0, 1, 2\}$，$B = \{0, 2, 3\}$，则 $A \cap B =$ ▲ .
2. 已知 i 是虚数单位，则复数 $z = (1 + i)(2 - i)$ 的实部是 ▲ .
3. 已知一组数据 4，$2a$，$3 - a$，5，6 的平均数为 4，则 a 的值是 ▲ .
4. 将一颗质地均匀的正方体骰子先后抛掷 2 次，观察向上的点数，则点数和为 5 的概率是 ▲ .
5. 右图是一个算法流程图. 若输出 y 的值为 -2，则输入 x 的值是 ▲ .

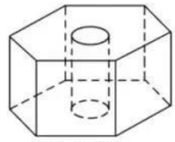


(第 5 题)

6. 在平面直角坐标系 xOy 中，若双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{5} = 1\ (a > 0)$ 的一条渐近线方程为 $y = \dfrac{\sqrt{5}}{2}x$，则该双曲线的离心率是 ▲ .
7. 已知 $y = f(x)$ 是奇函数，当 $x \geqslant 0$ 时，$f(x) = x^{\frac{2}{3}}$，则 $f(-8)$ 的值是 ▲ .

— 16 —

8. 已知 $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{2}{3}$，则 $\sin 2\alpha$ 的值是__▲__.



（第 9 题）

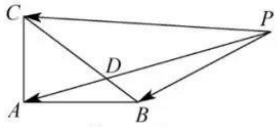
9. 如图，六角螺帽毛坯是由一个正六棱柱挖去一个圆柱所构成的. 已知螺帽的底面正六边形边长为 2 cm，高为 2 cm，内孔半径为 0.5 cm，则此六角螺帽毛坯的体积是__▲__cm^3.

10. 将函数 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，则平移后的图象中与 y 轴最近的对称轴的方程是__▲__.

11. 设 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列，$\{b_n\}$ 是公比为 q 的等比数列. 已知数列 $\{a_n+b_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=n^2-n+2^n-1\ (n\in\mathbf{N}^*)$，则 $d+q$ 的值是__▲__.

12. 已知 $5x^2y^2+y^4=1\ (x,y\in\mathbf{R})$，则 x^2+y^2 的最小值是__▲__.

13. 在△ABC 中，$AB=4$，$AC=3$，$\angle BAC=90°$，D 在边 BC 上，延长 AD 到 P，使得 $AP=9$，若 $\overrightarrow{PA}=m\overrightarrow{PB}+\left(\frac{3}{2}-m\right)\overrightarrow{PC}$（$m$ 为常数），则 CD 的长度是__▲__.



（第 13 题）

14. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知 $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，$A$，$B$ 是圆 C：$x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=36$ 上的两个动点，满足 $PA=PB$，则△PAB 面积的最大值是__▲__.

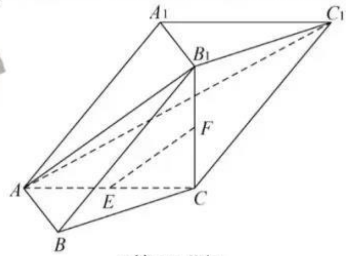
二、解答题：本大题共 6 小题，共计 90 分. 请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（本小题满分 14 分）

在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB\perp AC$，$B_1C\perp$ 平面 ABC，E，F 分别是 AC，B_1C 的中点.

（1）求证：EF∥平面 AB_1C_1；

（2）求证：平面 $AB_1C\perp$ 平面 ABB_1.



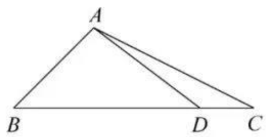
（第 15 题）

16.（本小题满分 14 分）

在△ABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c. 已知 $a=3$，$c=\sqrt{2}$，$B=45°$.

（1）求 $\sin C$ 的值；

（2）在边 BC 上取一点 D，使得 $\cos\angle ADC=-\frac{4}{5}$，求 $\tan\angle DAC$ 的值.



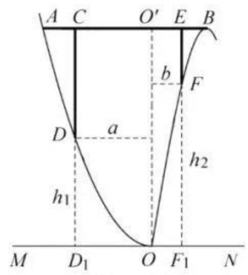
（第 16 题）

17.（本小题满分 14 分）

某地准备在山谷中建一座桥梁，桥址位置的竖直截面图如图所示：谷底 O 在水平线 MN 上，桥 AB 与 MN 平行，OO' 为铅垂线（O' 在 AB 上）. 经测量，左侧曲线 AO 上任一点 D 到 MN 的距离 h_1（米）与 D 到 OO' 的距离 a（米）之间满足关系式 $h_1=\frac{1}{40}a^2$；右侧曲线 BO 上任一点 F 到 MN 的距离 h_2（米）与 F 到 OO' 的距离 b（米）之间满足关系式 $h_2=-\frac{1}{800}b^3+6b$. 已知点 B 到 OO' 的距离为 40 米.

（1）求桥 AB 的长度；

（2）计划在谷底两侧建造平行于 OO' 的桥墩 CD 和 EF，且 CE 为 80 米，其中 C，E 在 AB 上（不包括端点）. 桥墩 EF 每米造价 k（万元），桥墩 CD 每米造价 $\frac{3}{2}k$（万元）（$k>0$），问 $O'E$ 为多少米时，桥墩 CD 与 EF 的总造价最低？



（第 17 题）

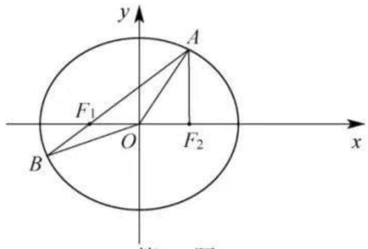
18. (本小题满分 16 分)

在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 E: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2，点 A 在椭圆 E 上且在第一象限内，$AF_2\perp F_1F_2$，直线 AF_1 与椭圆 E 相交于另一点 B.

(1)求 $\triangle AF_1F_2$ 的周长；

(2)在 x 轴上任取一点 P，直线 AP 与椭圆 E 的右准线相交于点 Q，求 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{QP}$ 的最小值；

(3)设点 M 在椭圆 E 上，记 $\triangle OAB$ 与 $\triangle MAB$ 的面积分别为 S_1, S_2，若 $S_2=3S_1$，求点 M 的坐标.



(第 18 题)

19. (本小题满分 16 分)

已知关于 x 的函数 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 与 $h(x)=kx+b\ (k,b\in\mathbf{R})$ 在区间 D 上恒有 $f(x)\geqslant h(x)\geqslant g(x)$.

(1)若 $f(x)=x^2+2x$, $g(x)=-x^2+2x$, $D=(-\infty,+\infty)$，求 $h(x)$ 的表达式；

(2)若 $f(x)=x^2-x+1$, $g(x)=k\ln x$, $h(x)=kx-k$, $D=(0,+\infty)$，求 k 的取值范围；

(3)若 $f(x)=x^4-2x^2$, $g(x)=4x^2-8$, $h(x)=4(t^3-t)x-3t^4+2t^2\ (0<|t|\leqslant\sqrt{2})$, $D=[m,n]\subseteq[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$，求证：$n-m\leqslant\sqrt{7}$.

20. (本小题满分 16 分)

已知数列 $\{a_n\}(n\in\mathbf{N}^*)$ 的首项 $a_1=1$，前 n 项和为 S_n. 设 λ 与 k 是常数，若对一切正整数 n，均有 $S_{n+1}^{\frac{1}{k}}-S_n^{\frac{1}{k}}=\lambda a_{n+1}^{\frac{1}{k}}$ 成立，则称此数列为“$\lambda\sim k$”数列.

(1)若等差数列 $\{a_n\}$ 是“$\lambda\sim 1$”数列，求 λ 的值；

(2)若数列 $\{a_n\}$ 是“$\frac{\sqrt{3}}{3}\sim 2$”数列，且 $a_n>0$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(3)对于给定的 λ，是否存在三个不同的数列 $\{a_n\}$ 为“$\lambda\sim 3$”数列，且 $a_n\geqslant 0$？若存在，求 λ 的取值范围；若不存在，说明理由.

数学Ⅰ试题参考答案

一、填空题：本题考查基础知识、基本运算和基本思想方法. 每小题 5 分，共计 70 分.

1. $\{0,2\}$　2. 3　3. 2　4. $\frac{1}{9}$　5. -3

6. $\frac{3}{2}$　7. -4　8. $\frac{1}{3}$　9. $12\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}$　10. $x=-\frac{5\pi}{24}$

11. 4　12. $\frac{4}{5}$　13. $\frac{18}{5}$或0　14. $10\sqrt{5}$

二、解答题

15. 本小题主要考查直线与直线、直线与平面、平面与平面的位置关系等基础知识，考查空间想象能力和推理论证能力. 满分 14 分.

证明：(1)因为 E, F 分别是 AC, B_1C 的中点，

所以 $EF/\!/AB_1$.

又 $EF\not\subset$ 平面 AB_1C_1, $AB_1\subset$ 平面 AB_1C_1,

所以 $EF/\!/$ 平面 AB_1C_1.

(2)因为 $B_1C\perp$ 平面 ABC, $AB\subset$ 平面 ABC,

所以 $B_1C\perp AB$.

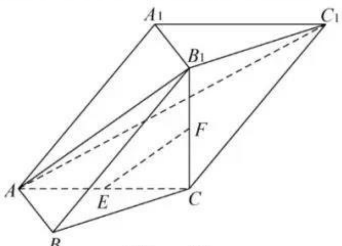
又 $AB\perp AC$, $B_1C\subset$ 平面 AB_1C,

$AC\subset$ 平面 AB_1C, $B_1C\cap AC=C$,

所以 $AB\perp$ 平面 AB_1C.

又因为 $AB\subset$ 平面 ABB_1,

所以平面 $AB_1C\perp$ 平面 ABB_1.



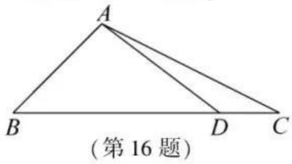
(第 15 题)

16. **本小题主要考查正弦定理、余弦定理、同角三角函数关系、两角和与差的三角函数等基础知识，考查运算求解能力. 满分14分.**

解:(1)在$\triangle ABC$中，因为$a=3$，$c=\sqrt{2}$，$B=45°$，

由余弦定理$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，得$b^2=9+2-2\times3\times\sqrt{2}\cos45°=5$，

所以$b=\sqrt{5}$.



(第16题)

在$\triangle ABC$中，由正弦定理$\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$，

得$\dfrac{\sqrt{5}}{\sin45°}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sin C}$，

所以$\sin C=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

(2)在$\triangle ADC$中，因为$\cos\angle ADC=-\dfrac{4}{5}$，所以$\angle ADC$为钝角，

而$\angle ADC+\angle C+\angle CAD=180°$，所以$\angle C$为锐角.

故$\cos C=\sqrt{1-\sin^2C}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，则$\tan C=\dfrac{\sin C}{\cos C}=\dfrac{1}{2}$.

因为$\cos\angle ADC=-\dfrac{4}{5}$，所以$\sin\angle ADC=\sqrt{1-\cos^2\angle ADC}=\dfrac{3}{5}$，

$\tan\angle ADC=\dfrac{\sin\angle ADC}{\cos\angle ADC}=-\dfrac{3}{4}$.

从而$\tan\angle DAC=\tan(180°-\angle ADC-\angle C)=-\tan(\angle ADC+\angle C)$

$=-\dfrac{\tan\angle ADC+\tan C}{1-\tan\angle ADC\times\tan C}=-\dfrac{-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{3}{4}\right)\times\frac{1}{2}}=\dfrac{2}{11}$.

17. **本小题主要考查函数的性质、用导数求最值、解方程等基础知识，考查直观想象和数学建模及运用数学知识分析和解决实际问题的能力. 满分14分.**

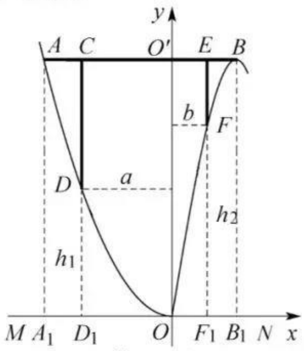
解:(1)设AA_1, BB_1, CD_1, EF_1都与MN垂直，A_1, B_1, D_1, F_1是相应垂足.

由条件知，当$O'B=40$时，

$BB_1=-\dfrac{1}{800}\times40^3+6\times40=160$，则$AA_1=160$.

由$\dfrac{1}{40}O'A^2=160$，得$O'A=80$.

所以$AB=O'A+O'B=80+40=120$(米).



(第17题)

(2)以O为原点，OO'为y轴建立平面直角坐标系xOy(如图所示).

设$F(x, y_2)$，$x\in(0, 40)$，则$y_2=-\dfrac{1}{800}x^3+6x$，

$EF=160-y_2=160+\dfrac{1}{800}x^3-6x$.

因为$CE=80$，所以$O'C=80-x$.

设$D(x-80, y_1)$，则$y_1=\dfrac{1}{40}(80-x)^2$，

所以$CD=160-y_1=160-\dfrac{1}{40}(80-x)^2=-\dfrac{1}{40}x^2+4x$.

记桥墩CD和EF的总造价为$f(x)$，

则$f(x)=k(160+\dfrac{1}{800}x^3-6x)+\dfrac{3}{2}k(-\dfrac{1}{40}x^2+4x)$

$=k(\dfrac{1}{800}x^3-\dfrac{3}{80}x^2+160)\quad(0<x<40)$.

— 19 —

$f'(x)=k(\frac{3}{800}x^2-\frac{3}{40}x)=\frac{3k}{800}x(x-20)$,

令 $f'(x)=0$, 得 $x=20$.

x	$(0,20)$	20	$(20,40)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	极小值	↗

所以当 $x=20$ 时, $f(x)$ 取得最小值.

答:(1)桥 AB 的长度为 120 米;

(2)当 $O'E$ 为 20 米时, 桥墩 CD 和 EF 的总造价最低.

18. **本小题主要考查直线方程、椭圆方程、椭圆的几何性质、直线与椭圆的位置关系、向量数量积等基础知识, 考查推理论证能力、分析问题能力和运算求解能力. 满分 16 分.**

解:(1)设椭圆 E: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的长轴长为 $2a$, 短轴长为 $2b$, 焦距为 $2c$,

则 $a^2=4$, $b^2=3$, $c^2=1$.

所以 $\triangle AF_1F_2$ 的周长为 $2a+2c=6$.

(2)椭圆 E 的右准线为 $x=4$.

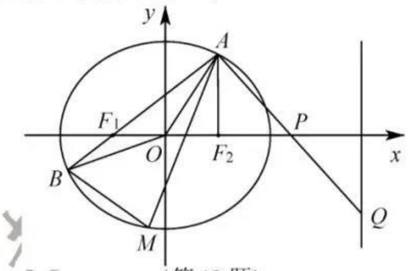
设 $P(x,0)$, $Q(4,y)$,

则 $\overrightarrow{OP}=(x,0)$, $\overrightarrow{QP}=(x-4,-y)$,

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{QP}=x(x-4)=(x-2)^2-4\geqslant-4$,

在 $x=2$ 时取等号.

所以 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{QP}$ 的最小值为 -4.



(第 18 题)

(3)因为椭圆 E: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2, 点 A 在椭圆 E 上且在第一象限内, $AF_2\perp F_1F_2$, 则 $F_1(-1,0)$, $F_2(1,0)$, $A(1,\frac{3}{2})$,

所以直线 AB: $3x-4y+3=0$.

设 $M(x,y)$, 因为 $S_2=3S_1$,

所以点 M 到直线 AB 距离等于点 O 到直线 AB 距离的 3 倍.

由此得 $\frac{|3x-4y+3|}{5}=3\times\frac{|3\times0-4\times0+3|}{5}$,

则 $3x-4y+12=0$ 或 $3x-4y-6=0$.

由 $\begin{cases}3x-4y+12=0,\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 得 $7x^2+24x+32=0$, 此方程无解;

由 $\begin{cases}3x-4y-6=0,\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 得 $7x^2-12x-4=0$, 所以 $x=2$ 或 $x=-\frac{2}{7}$.

代入直线 l: $3x-4y-6=0$, 对应分别得 $y=0$ 或 $y=-\frac{12}{7}$.

因此点 M 的坐标为 $(2,0)$ 或 $(-\frac{2}{7},-\frac{12}{7})$.

19. **本小题主要考查利用导数研究函数的性质, 考查综合运用数学思想方法分析与解决问题以及逻辑推理能力. 满分 16 分.**

解:(1)由条件 $f(x)\geqslant h(x)\geqslant g(x)$, 得 $x^2+2x\geqslant kx+b\geqslant-x^2+2x$,

取 $x=0$, 得 $0\geqslant b\geqslant0$, 所以 $b=0$.

由 $x^2+2x\geqslant kx$, 得 $x^2+(2-k)x\geqslant0$, 此式对一切 $x\in(-\infty,+\infty)$ 恒成立,

所以 $(2-k)^2\leqslant0$, 则 $k=2$, 此时 $2x\geqslant-x^2+2x$ 恒成立,

所以 $h(x)=2x$.

(2) $h(x)-g(x)=k(x-1-\ln x)$, $x\in(0,+\infty)$.

令 $u(x)=x-1-\ln x$, 则 $u'(x)=1-\frac{1}{x}$, 令 $u'(x)=0$, 得 $x=1$.

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$u'(x)$	$-$	0	$+$
$u(x)$	↘	极小值	↗

所以 $u(x)_{\min}=u(1)=0$. 则 $x-1\geqslant\ln x$ 恒成立,

所以当且仅当 $k\geqslant0$ 时, $h(x)\geqslant g(x)$ 恒成立.

另一方面, $f(x)\geqslant h(x)$ 恒成立, 即 $x^2-x+1\geqslant kx-k$ 恒成立,

也即 $x^2-(1+k)x+1+k\geqslant0$ 恒成立.

因为 $k\geqslant0$, 对称轴为 $x=\frac{1+k}{2}>0$,

所以 $(1+k)^2-4(1+k)\leqslant0$, 解得 $-1\leqslant k\leqslant3$.

因此, k 的取值范围是 $0\leqslant k\leqslant3$.

(3) ①当 $1\leqslant t\leqslant\sqrt{2}$ 时,

由 $g(x)\leqslant h(x)$, 得 $4x^2-8\leqslant4(t^3-t)x-3t^4+2t^2$, 整理得

$x^2-(t^3-t)x+\frac{3t^4-2t^2-8}{4}\leqslant0$. (*)

令 $\Delta=(t^3-t)^2-(3t^4-2t^2-8)$, 则 $\Delta=t^6-5t^4+3t^2+8$.

记 $\varphi(t)=t^6-5t^4+3t^2+8(1\leqslant t\leqslant\sqrt{2})$,

则 $\varphi'(t)=6t^5-20t^3+6t=2t(3t^2-1)(t^2-3)<0$ 恒成立,

所以 $\varphi(t)$ 在 $[1,\sqrt{2}]$ 上是减函数, 则 $\varphi(\sqrt{2})\leqslant\varphi(t)\leqslant\varphi(1)$, 即 $2\leqslant\varphi(t)\leqslant7$.

所以不等式(*)有解, 设解为 $x_1\leqslant x\leqslant x_2$,

因此 $n-m\leqslant x_2-x_1=\sqrt{\Delta}\leqslant\sqrt{7}$.

②当 $0<t<1$ 时,

$f(-1)-h(-1)=3t^4+4t^3-2t^2-4t-1$.

设 $v(t)=3t^4+4t^3-2t^2-4t-1$,

$v'(t)=12t^3+12t^2-4t-4=4(t+1)(3t^2-1)$,

令 $v'(t)=0$, 得 $t=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

当 $t\in(0,\frac{\sqrt{3}}{3})$ 时, $v'(t)<0$, $v(t)$ 是减函数;

当 $t\in(\frac{\sqrt{3}}{3},1)$ 时, $v'(t)>0$, $v(t)$ 是增函数.

$v(0)=-1$, $v(1)=0$, 则当 $0<t<1$ 时, $v(t)<0$.

(或证: $v(t)=(t+1)^2(3t+1)(t-1)<0$.)

则 $f(-1)-h(-1)<0$, 因此 $-1\notin(m,n)$.

因为 $[m,n]\subseteq[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$, 所以 $n-m\leqslant\sqrt{2}+1<\sqrt{7}$.

③当 $-\sqrt{2}\leqslant t<0$ 时, 因为 $f(x)$, $g(x)$ 均为偶函数, 因此 $n-m\leqslant\sqrt{7}$ 也成立.

综上所述, $n-m\leqslant\sqrt{7}$.

20. **本小题主要考查等差和等比数列的定义、通项公式、性质等基础知识, 考查代数推理、转化与化归及综合运用数学知识探究与解决问题的能力. 满分 16 分.**

解: (1) 因为等差数列 $\{a_n\}$ 是"$\lambda\sim1$"数列, 则 $S_{n+1}-S_n=\lambda a_{n+1}$, 即 $a_{n+1}=\lambda a_{n+1}$,

也即 $(\lambda-1)a_{n+1}=0$, 此式对一切正整数 n 均成立.

若 $\lambda\neq1$, 则 $a_{n+1}=0$ 恒成立, 故 $a_3-a_2=0$, 而 $a_2-a_1=-1$,

这与 $\{a_n\}$ 是等差数列矛盾.

所以 $\lambda=1$. (此时, 任意首项为 1 的等差数列都是"$1\sim1$"数列)

— 21 —

(2)因为数列$\{a_n\}(n\in\mathbf{N}^*)$是“$\frac{\sqrt{3}}{3}\sim 2$”数列，

所以$\sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n}=\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{a_{n+1}}$，即$\sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n}=\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{S_{n+1}-S_n}$.

因为$a_n>0$，所以$S_{n+1}>S_n>0$，则$\sqrt{\frac{S_{n+1}}{S_n}}-1=\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{\frac{S_{n+1}}{S_n}-1}$.

令$\sqrt{\frac{S_{n+1}}{S_n}}=b_n$，则$b_n-1=\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{b_n^2-1}$，即$(b_n-1)^2=\frac{1}{3}(b_n^2-1)\quad(b_n>1)$.

解得$b_n=2$，即$\sqrt{\frac{S_{n+1}}{S_n}}=2$，也即$\frac{S_{n+1}}{S_n}=4$，

所以数列$\{S_n\}$是公比为4的等比数列.

因为$S_1=a_1=1$，所以$S_n=4^{n-1}$. 则$a_n=\begin{cases}1(n=1),\\3\times4^{n-2}(n\geq2).\end{cases}$

(3)设各项非负的数列$\{a_n\}(n\in\mathbf{N}^*)$为“$\lambda\sim 3$”数列，

则$S_{n+1}^{\frac{1}{3}}-S_n^{\frac{1}{3}}=\lambda a_{n+1}^{\frac{1}{3}}$，即$\sqrt[3]{S_{n+1}}-\sqrt[3]{S_n}=\lambda\sqrt[3]{S_{n+1}-S_n}$.

因为$a_n\geq0$，而$a_1=1$，所以$S_{n+1}\geq S_n>0$，则$\sqrt[3]{\frac{S_{n+1}}{S_n}}-1=\lambda\sqrt[3]{\frac{S_{n+1}}{S_n}-1}$.

令$\sqrt[3]{\frac{S_{n+1}}{S_n}}=c_n$，则$c_n-1=\lambda\sqrt[3]{c_n^3-1}(c_n\geq1)$，即$(c_n-1)^3=\lambda^3(c_n^3-1)(c_n\geq1)$. (*)

①若$\lambda\leq0$或$\lambda=1$，则(*)只有一解为$c_n=1$，即符合条件的数列$\{a_n\}$只有一个.
(此数列为1，0，0，0，…)

②若$\lambda>1$，则(*)化为$(c_n-1)\left(c_n^2+\frac{\lambda^3+2}{\lambda^3-1}c_n+1\right)=0$，

因为$c_n\geq1$，所以$c_n^2+\frac{\lambda^3+2}{\lambda^3-1}c_n+1>0$，则(*)只有一解为$c_n=1$，

即符合条件的数列$\{a_n\}$只有一个.(此数列为1，0，0，0，…)

③若$0<\lambda<1$，则$c_n^2+\frac{\lambda^3+2}{\lambda^3-1}c_n+1=0$的两根分别在$(0,1)$与$(1,+\infty)$内，

则方程(*)有两个大于或等于1的解：其中一个为1，另一个大于1(记此解为t).

所以$S_{n+1}=S_n$或$S_{n+1}=t^3S_n$.

由于数列$\{S_n\}$从任何一项求其后一项均有两种不同结果，所以这样的数列$\{S_n\}$有无数多个，则对应的$\{a_n\}$有无数多个.

综上所述，能存在三个各项非负的数列$\{a_n\}$为“$\lambda\sim 3$”数列，λ的取值范围是$0<\lambda<1$.

数学Ⅱ(附加题)

21.【选做题】本题包括A、B、C三小题，请选定其中两小题，并在相应的答题区域内作答. 若多做，则按作答的前两小题评分. 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

A. [选修4-2:矩阵与变换](本小题满分10分)

平面上点$A(2,-1)$在矩阵$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}a&1\\-1&b\end{bmatrix}$对应的变换作用下得到点$B(3,-4)$.

(1)求实数a，b的值;(2)求矩阵$\boldsymbol{M}$的逆矩阵$\boldsymbol{M}^{-1}$.

B. [选修4-4:坐标系与参数方程](本小题满分10分)

在极坐标系中，已知点$A(\rho_1,\frac{\pi}{3})$在直线l: $\rho\cos\theta=2$上，点$B(\rho_2,\frac{\pi}{6})$在圆C: $\rho=4\sin\theta$上(其中$\rho\geq0$，$0\leq\theta<2\pi$).

(1)求ρ_1，ρ_2的值;(2)求出直线l与圆C的公共点的极坐标.

C. [选修4-5:不等式选讲](本小题满分10分)

设$x\in\mathbf{R}$，解不等式$2|x+1|+|x|<4$.

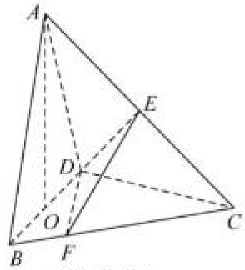
【必做题】第22题、第23题，每题10分，共计20分. 请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

22.（本小题满分10分）

在三棱锥 $A-BCD$ 中，已知 $CB=CD=\sqrt{5}$，$BD=2$，O 为 BD 的中点，$AO\perp$ 平面 BCD，$AO=2$，E 为 AC 的中点.

（1）求直线 AB 与 DE 所成角的余弦值；

（2）若点 F 在 BC 上，满足 $BF=\frac{1}{4}BC$，设二面角 $F-DE-C$ 的大小为 θ，求 $\sin\theta$ 的值.



（第22题）

23.（本小题满分10分）

甲口袋中装有2个黑球和1个白球，乙口袋中装有3个白球. 现从甲、乙两口袋中各任取一个球交换放入另一口袋，重复 n 次这样的操作，记甲口袋中黑球个数为 X_n，恰有2个黑球的概率为 p_n，恰有1个黑球的概率为 q_n.

（1）求 p_1，q_1 和 p_2，q_2；

（2）求 $2p_n+q_n$ 与 $2p_{n-1}+q_{n-1}$ 的递推关系式和 X_n 的数学期望 $E(X_n)$（用 n 表示）.

数学Ⅱ（附加题）参考答案

21.【选做题】

A.［选修4-2：矩阵与变换］

本小题主要考查矩阵的运算、逆矩阵等基础知识，考查运算求解能力. 满分10分.

解：（1）因为 $\begin{bmatrix} a & 1 \\ -1 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$，所以 $\begin{cases} 2a-1=3, \\ -2-b=-4. \end{cases}$

解得 $a=b=2$，所以 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

（2）因为 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$，$\det(\boldsymbol{M})=2\times2-1\times(-1)=5\neq0$，所以 $\boldsymbol{M}$ 可逆，

从而 $\boldsymbol{M}^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$.

B.［选修4-4：坐标系与参数方程］

本小题主要考查曲线的极坐标方程等基础知识，考查运算求解能力. 满分10分.

解：（1）由 $\rho_1\cos\frac{\pi}{3}=2$，得 $\rho_1=4$；$\rho_2=4\sin\frac{\pi}{6}=2$，又 $(0,0)$（即 $(0,\frac{\pi}{6})$）也在圆 C 上，

因此 $\rho_2=2$ 或 0.

（2）由 $\begin{cases} \rho\cos\theta=2, \\ \rho=4\sin\theta, \end{cases}$ 得 $4\sin\theta\cos\theta=2$，所以 $\sin2\theta=1$.

因为 $\rho\geqslant0$，$0\leqslant\theta<2\pi$，所以 $\theta=\frac{\pi}{4}$，$\rho=2\sqrt{2}$.

所以公共点的极坐标为 $\left(2\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right)$.

C.［选修4-5：不等式选讲］

本小题主要考查解不等式等基础知识，考查运算求解和推理论证能力. 满分10分.

解：当 $x>0$ 时，原不等式可化为 $2x+2+x<4$，解得 $0<x<\frac{2}{3}$；

当 $-1\leqslant x\leqslant0$ 时，原不等式可化为 $2x+2-x<4$，解得 $-1\leqslant x\leqslant0$；

当 $x<-1$ 时，原不等式可化为 $-2x-2-x<4$，解得 $-2<x<-1$.

综上，原不等式的解集为 $\left\{x\middle|-2<x<\frac{2}{3}\right\}$.

22.【必做题】本小题主要考查空间向量、异面直线所成角和二面角等基础知识，考查空间想象能力和运算求解能力. 满分 10 分.

解：(1) 连结 OC，因为 $CB=CD$，O 为 BD 中点，所以 $CO\perp BD$.

又 $AO\perp$ 平面 BCD，所以 $AO\perp OB$，$AO\perp OC$.

以 $\{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA}\}$ 为基底，建立空间直角坐标系 $O-xyz$.

因为 $BD=2$，$CB=CD=\sqrt{5}$，$AO=2$，

所以 $B(1,0,0)$，$D(-1,0,0)$，$C(0,2,0)$，$A(0,0,2)$.

因为 E 为 AC 的中点，所以 $E(0,1,1)$.

则 $\overrightarrow{AB}=(1,0,-2)$，$\overrightarrow{DE}=(1,1,1)$，

所以 $|\cos<\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DE}>|=\dfrac{|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DE}|}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{DE}|}=\dfrac{|1+0-2|}{\sqrt{5}\times\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{15}}{15}$.

因此，直线 AB 与 DE 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{15}}{15}$.

(2) 因为点 F 在 BC 上，$BF=\dfrac{1}{4}BC$，$\overrightarrow{BC}=(-1,2,0)$.

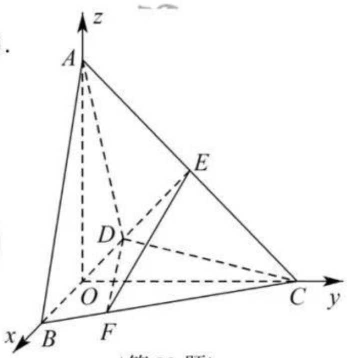
所以 $\overrightarrow{BF}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{BC}=\left(-\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2},0\right)$.

又 $\overrightarrow{DB}=(2,0,0)$，

故 $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BF}=\left(\dfrac{7}{4},\dfrac{1}{2},0\right)$.

设 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$ 为平面 DEF 的一个法向量，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{DE}\cdot\boldsymbol{n}_1=0,\\ \overrightarrow{DF}\cdot\boldsymbol{n}_1=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_1+y_1+z_1=0,\\ \dfrac{7}{4}x_1+\dfrac{1}{2}y_1=0,\end{cases}$



(第 22 题)

取 $x_1=2$，得 $y_1=-7$，$z_1=5$，所以 $\boldsymbol{n}_1=(2,-7,5)$.

设 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$ 为平面 DEC 的一个法向量，又 $\overrightarrow{DC}=(1,2,0)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{DE}\cdot\boldsymbol{n}_2=0,\\ \overrightarrow{DC}\cdot\boldsymbol{n}_2=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_2+y_2+z_2=0,\\ x_2+2y_2=0,\end{cases}$ 取 $x_2=2$，得 $y_2=-1$，$z_2=-1$，

所以 $\boldsymbol{n}_2=(2,-1,-1)$.

故 $|\cos\theta|=\dfrac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\dfrac{|4+7-5|}{\sqrt{78}\times\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{13}}{13}$.

所以 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\dfrac{2\sqrt{39}}{13}$.

23.【必做题】本小题主要考查随机变量及其概率分布等基础知识，考查逻辑思维能力和推理论证能力. 满分 10 分.

解：(1) $p_1=\dfrac{C_1^1}{C_3^1}\cdot\dfrac{C_3^1}{C_3^1}=\dfrac{1}{3}$，$q_1=\dfrac{C_2^1}{C_3^1}\cdot\dfrac{C_3^1}{C_3^1}=\dfrac{2}{3}$，

$$p_2=\frac{C_1^1}{C_3^1}\cdot\frac{C_3^1}{C_3^1}\cdot p_1+\frac{C_2^1}{C_3^1}\cdot\frac{C_1^1}{C_3^1}\cdot q_1+0\cdot(1-p_1-q_1)=\frac{1}{3}p_1+\frac{2}{9}q_1=\frac{7}{27},$$

$$q_2=\frac{C_2^1}{C_3^1}\cdot\frac{C_3^1}{C_3^1}\cdot p_1+\left(\frac{C_2^1}{C_3^1}\cdot\frac{C_2^1}{C_3^1}+\frac{C_1^1}{C_3^1}\cdot\frac{C_1^1}{C_3^1}\right)\cdot q_1+\frac{C_3^1}{C_3^1}\cdot\frac{C_2^1}{C_3^1}\cdot(1-p_1-q_1)$$

$$=-\frac{1}{9}q_1+\frac{2}{3}=\frac{16}{27}.$$

(2) 当 $n\geqslant 2$ 时，

$$p_n=\frac{C_1^1}{C_3^1}\cdot\frac{C_3^1}{C_3^1}\cdot p_{n-1}+\frac{C_2^1}{C_3^1}\cdot\frac{C_1^1}{C_3^1}\cdot q_{n-1}+0\cdot(1-p_{n-1}-q_{n-1})=\frac{1}{3}p_{n-1}+\frac{2}{9}q_{n-1},\qquad ①$$

$q_n=\frac{C_2^1}{C_3^1}\cdot\frac{C_3^1}{C_3^1}\cdot p_{n-1}+\left(\frac{C_2^1}{C_3^1}\cdot\frac{C_2^1}{C_3^1}+\frac{C_1^1}{C_3^1}\cdot\frac{C_1^1}{C_3^1}\right)\cdot q_{n-1}+\frac{C_3^1}{C_3^1}\cdot\frac{C_2^1}{C_3^1}\cdot(1-p_{n-1}-q_{n-1})$

$=-\frac{1}{9}q_{n-1}+\frac{2}{3}$, ②

$2\times$① + ②，得 $2p_n+q_n=\frac{2}{3}p_{n-1}+\frac{4}{9}q_{n-1}-\frac{1}{9}q_{n-1}+\frac{2}{3}=\frac{1}{3}(2p_{n-1}+q_{n-1})+\frac{2}{3}$.

从而 $2p_n+q_n-1=\frac{1}{3}(2p_{n-1}+q_{n-1}-1)$，又 $2p_1+q_1-1=\frac{1}{3}$，

所以 $2p_n+q_n=1+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=1+\left(\frac{1}{3}\right)^n$，$n\in\mathbf{N}^*$. ③

由②，有 $q_n-\frac{3}{5}=-\frac{1}{9}\left(q_{n-1}-\frac{3}{5}\right)$，又 $q_1-\frac{3}{5}=\frac{1}{15}$，

所以 $q_n=\frac{1}{15}\left(-\frac{1}{9}\right)^{n-1}+\frac{3}{5}$，$n\in\mathbf{N}^*$.

由③，有 $p_n=\frac{1}{2}\left[1+\left(\frac{1}{3}\right)^n-q_n\right]=\frac{3}{10}\left(-\frac{1}{9}\right)^n+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{5}$，$n\in\mathbf{N}^*$.

故 $1-p_n-q_n=\frac{3}{10}\left(-\frac{1}{9}\right)^n-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{5}$，$n\in\mathbf{N}^*$.

X_n 的概率分布

X_n	0	1	2
P	$1-p_n-q_n$	q_n	p_n

则 $E(X_n)=0\times(1-p_n-q_n)+1\times q_n+2\times p_n=1+\left(\frac{1}{3}\right)^n$，$n\in\mathbf{N}^*$.

关于我们

自主招生在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（http://www.zizzs.com/）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

关注后获取更多资料：

1、回复“**2020 高考真题**”即可下载 2020 年全国高考真题及答案

2、回复“**百问百答**”即可获取《强基计划政策百问百答》