2020 年安徽省“江南十校”综合素质检测·理科数学

参考答案、提示及评分细则

1.B 当 $a>1$ 时，$1-a<0$，$a^2-1>0$，所以复数 z 在复平面内对应的点位于第二象限. 故选 B.

2.D 由 $A=\{x|x<2\}$，$B=\{x|1<x<7\}$，则 $A\cap B=\{x|1<x<2\}$. 故选 D.

3.B 因为弧长比较短的情况下分成 6 等分，每部分的弦长和弧长相差很小，可以用弧长近似代替弦长，所以导线长度为 $\frac{2\pi}{3}\times 30=20\pi\approx 63$(厘米). 故选 B.

4.C 由 $f(-x)=-\frac{x\cos x}{2^x+2^{-x}}=-f(x)$，可知函数 $f(x)$ 为奇函数，所以函数图象关于原点对称. 当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)>0$. 故选 C.

5.B 由 $(1+ax)(1+x)^5=(1+x)^5+ax(1+x)^5$，得 x^2 的系数为 $C_5^2+aC_5^1=5a+10$，x^3 的系数为 $C_5^3+aC_5^2=10a+10$，展开式中 x^2，x^3 的系数之和为 $(5a+10)+(10a+10)=15a+20=-10$，得 $a=-2$. 故选 B.

6.A 因 $\log_3\sqrt{2}<\log_3\sqrt{3}$，所以 $a<\frac{1}{2}$，因为 $3>e$，所以 $\ln 3>1$，$2^0>c=2^{-0.99}>2^{-1}=\frac{1}{2}$，即 $\frac{1}{2}<c<1$，故有 $b>c>a$. 故选 A.

7.D $S=\frac{1}{5}(1+2+3+4+5)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)=\frac{43}{60}$. 故选 D.

8.A 由古典概型的基本事件的等可能性可得 6 拆成两个正整数的和含有的基本事件有：(1,5)，(2,4)，(3,3)，(4,2)，(5,1)，而加数全为质数的有(3,3)，所以所求概率为 $\frac{1}{5}$. 故选 A.

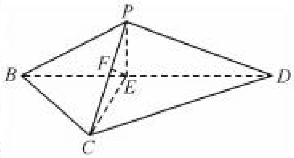
9.D 由题意有 $a_3=S_3-S_2=\frac{4}{27}$，得 $\begin{cases}a_1q^2=\frac{4}{27},\\ a_1+a_1q=\frac{1}{9},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=\frac{1}{27},\\ q=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a_1=\frac{1}{3},\\ q=-\frac{2}{3}\end{cases}$(舍去)，得 $a_n=\frac{2^{n-1}}{27}$. 当 $1\leqslant n\leqslant 5$ 时，$a_n<1$；当 $n\geqslant 6$ 时，$a_n>1$，则 $a_1a_2\cdots a_n$ 的最小值为 $a_1a_2a_3a_4a_5=(a_3)^5=\left(\frac{4}{27}\right)^5$，所以 $a_1a_2\cdots a_n$ 的最小值为 $\left(\frac{4}{27}\right)^5$. 故选 D.

10.A 设点 P 的坐标为 (m,n)，有 $\frac{m^2}{a^2}-\frac{n^2}{b^2}=1$，得 $b^2m^2-a^2n^2=a^2b^2$. 双曲线的两条渐近线方程为 $bx-ay=0$ 和 $bx+ay=0$，则点 P 到双曲线 C 的两条渐近线的距离之积为 $\frac{|bm-an|}{\sqrt{a^2+b^2}}\times\frac{|bm+an|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|b^2m^2-a^2n^2|}{a^2+b^2}=\frac{a^2b^2}{c^2}$，则有 $\frac{a^2b^2}{c^2}=\frac{1}{4}c^2$，所以 $4a^2(c^2-a^2)=c^4$，所以 $4e^2-4=e^4$，所以 $e^2=2$，所以 $e=\sqrt{2}$. 故选 A.

11.B 因为 $f(x)=1-2\cos^2\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\left(2\omega x+\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$，所以周期 $T=\frac{2\pi}{2\omega}=\frac{\pi}{\omega}$. 对于①，由条件知，周期为 2π，所以 $\omega=\frac{1}{2}$，故①错误；对于②，函数图象右移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后得到的函数为 $y=\sin\left(2\omega x-\frac{\omega\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)$，其图象关于 y 轴对称，则 $-\frac{\omega\pi}{3}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，解得 $\omega=-1-3k(k\in\mathbf{Z})$，故对任意整数 k，$\omega\notin(0,2)$，所以②错误；对于③，由条件得 $\frac{7\pi}{2\omega}-\frac{\pi}{12\omega}\leqslant 2\pi<\frac{4\pi}{\omega}-\frac{\pi}{12\omega}$，解得 $\frac{41}{24}\leqslant\omega<\frac{47}{24}$，故③正确；对于④，由条件得 $\begin{cases}-\frac{\omega\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\geqslant-\frac{\pi}{2},\\ \frac{\omega\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2},\end{cases}$ 解得 $\omega\leqslant\frac{2}{3}$，又 $\omega>0$，所以 $0<\omega\leqslant\frac{2}{3}$，故④正确. 故选 B.

官方微信公众号：zizzsw 咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com 微信客服：zizzs2018

12. C　过 P 作 $PE\perp BD$ 于 E，连接 CE，由题意知 $\triangle BPD\cong\triangle BCD$，易证 $CE\perp BD$，且 $PE=CE$，所以 $BD\perp$ 平面 PCE，所以 $V_{P\text{-}BCD}=V_{B\text{-}PCE}+V_{D\text{-}PCE}=\frac{1}{3}S_{\triangle PCE}\cdot BD=\frac{8}{3}S_{\triangle PCE}$，所以当 $S_{\triangle PCE}$ 最大时，$V_{P\text{-}BCD}$ 取得最大值. 取 PC 的中点 F，则 $EF\perp PC$，所以 $S_{\triangle PCE}=\frac{1}{2}PC\cdot EF=\sqrt{PE^2-1}$，因为 $PB+PD=10$，$BD=8$ 所以点 P 在以 BD 为焦点的椭圆上，所以 PE 的最大值为对应短半轴长，所以 PE 最大值为 $\sqrt{5^2-4^2}=3$，所以 $S_{\triangle PCE}$ 最大值为 $2\sqrt{2}$，所以 $V_{P\text{-}BCD}$ 的最大值为 $\frac{16\sqrt{2}}{3}$. 故选 C.

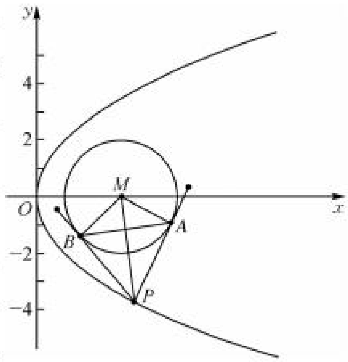


13. $3x-y-2=0$　由 $f(1)=1$，$f'(x)=\frac{1}{x}+2x$，有 $f'(1)=3$，故所求切线方程为 $y-1=3(x-1)$，整理为 $3x-y-2=0$.

14. $(-\infty,4]$　因为 $\exists x_0\in\mathbf{R}$，$x_0^2-a\sqrt{x_0^2+1}+5<0$ 为假，则其否定为真，即 $\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-a\sqrt{x^2+1}+5\geqslant 0$ 为真，所以 $a\leqslant\frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+1}}$ 对任意实数恒成立，所以 $a\leqslant\left(\frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+1}}\right)_{\min}$. 又 $\frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{x^2+1}+\frac{4}{\sqrt{x^2+1}}\geqslant 4$，当且仅当 $\sqrt{x^2+1}=\frac{4}{\sqrt{x^2+1}}$，即 $x=\pm\sqrt{3}$ 时，等号成立，所以 $a\leqslant 4$.

15. $(-3,9)$　∵点 C 在 $\angle AOB$ 的平线上，∴存在 $\lambda\in(0,+\infty)$ 使 $\overrightarrow{OC}=\lambda\left(\frac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|}+\frac{\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|}\right)=\lambda(0,1)+\lambda\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)=\left(-\frac{3}{5}\lambda,\frac{9}{5}\lambda\right)$，又∵ $|\overrightarrow{OC}|=3\sqrt{10}$，∴ $\lambda=5$，∴ $\overrightarrow{OC}=(-3,9)$.

16. $[2\sqrt{2},4)$　如图，连接 PM，PA，PB，易得 $MA\perp PA$，$MB\perp PB$，$PM\perp AB$，所以四边形 $PAMB$ 的面积为 $\frac{1}{2}PM\cdot AB$，另外四边形 $PAMB$ 的面积为三角形 PAM 面积的两倍，所以 $\frac{1}{2}|PM|\cdot|AB|=|PA|\cdot|MA|$，所以 $|AB|=\frac{2|PA|\cdot|MA|}{|PM|}=\frac{4\sqrt{|PM|^2-4}}{|PM|}=4\sqrt{1-\frac{4}{|PM|^2}}$，所以当 $|PM|$ 最小时，$|AB|$ 最小，设点 $P(x,y)$，则 $|PM|=\sqrt{(x-3)^2+y^2}=\sqrt{x^2-6x+9+4x}=\sqrt{x^2-2x+9}$，所以当 $x=1$ 时，$|PM|_{\min}=2\sqrt{2}$，所以 $|AB|_{\min}=4\sqrt{1-\frac{4}{8}}=2\sqrt{2}$，当点 P 向无穷远处运动时，$|AB|$ 的长度趋近于圆的直径，故 $|AB|$ 的取值范围为 $[2\sqrt{2},4)$.



17. 解：(1)因为 $c\sin B=b\sin\left(\frac{\pi}{3}-C\right)+\sqrt{3}b$，

由正弦定理有 $\sin C\sin B=\sin B\sin\left(\frac{\pi}{3}-C\right)+\sqrt{3}\sin B$.

因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $\sin B>0$，所以 $\sin C=\sin\left(\frac{\pi}{3}-C\right)+\sqrt{3}$，所以 $\sin\left(C-\frac{\pi}{6}\right)=1$. ………………… 3 分

因为 $0<C<\pi$，所以 $-\frac{\pi}{6}<C-\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$，……………………………………………… 4 分

所以 $C-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，所以 $C=\frac{2\pi}{3}$. ……………………………………………………… 5 分

(2)由余弦定理有 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，有 $a^2+b^2+ab=7$，得 $(a+b)^2-ab=7$，得 $ab=2$，…………… 7 分

故 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}ab\sin C=\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. …………………………………………… 9 分

设 AB 边上的高为 h，有 $\frac{\sqrt{7}}{2}h=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故有 $h=\frac{\sqrt{21}}{7}$，

即 AB 边上的高为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$. …………………………………………………………………… 12 分

18. (1)证明：如图 1，取 PC 的中点 F，连接 EF，BF. ……………………………… 1 分

∵$PE=DE$，$PF=CF$，∴$EF/\!/CD$，$CD=2EF$.

∵$AB/\!/CD$，$CD=2AB$，∴$AB/\!/EF$，且 $EF=AB$，

∴四边形 $ABFE$ 为平行四边形，∴$AE/\!/BF$. ……………………………… 3 分

∵$BF\subset$平面 PBC，$AE\not\subset$平面 PBC，∴$AE/\!/$平面 PBC. ……………………… 5 分

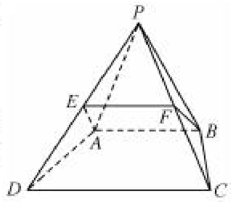


图 1

(2)解：如图 2，取 AB 中点 O，CD 中点 Q，连接 OQ.

∵$OA=OB$，$CQ=DQ$，$PA=PB$，∴$PO\perp AB$，$OQ\perp AB$.

∵平面 $PAB\perp$平面 $ABCD$，平面 $PAB\cap$平面 $ABCD=AB$，

∴$PO\perp$平面 $ABCD$，$OQ\perp$平面 PAB，

∴AB，OQ，OP 两两垂直.

以点 O 为坐标原点，向量 $\overrightarrow{OQ}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OP}$ 方向分别为 x，y，z 轴正方向建立如图所示空间直角坐标系.

由 $PA\perp PB$，$AB=2$，可得 $OA=OB=OP=1$，$DQ=CQ=2$，在等腰梯形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$CD=4$，$AD=\sqrt{2}$，所以 $OQ=1$，

∴$O(0,0,0)$，$A(0,-1,0)$，$B(0,1,0)$，$C(1,2,0)$，$P(0,0,1)$，$D(1,-2,0)$，

$E\left(\frac{1}{2},-1,\frac{1}{2}\right)$. ………………………………………………………… 7 分

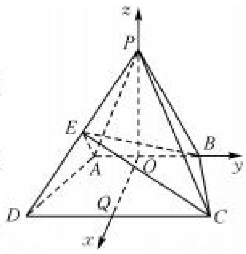


图 2

设平面 PAD 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，$\overrightarrow{AP}=(0,1,1)$，$\overrightarrow{AD}=(1,-1,0)$，

由 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AP}=y+z=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AD}=x-y=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}z=-y,\\ x=y,\end{cases}$ 取 $y=1$，得 $\boldsymbol{m}=(1,1,-1)$. ……………………………………… 8 分

设平面 EBC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$，$\overrightarrow{BC}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{EB}=\left(-\frac{1}{2},2,-\frac{1}{2}\right)$，

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=a+b=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BP}=-\frac{1}{2}a+2b-\frac{1}{2}c=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a=-b,\\ c=5b,\end{cases}$ 取 $b=-1$，得 $\boldsymbol{n}=(1,-1,-5)$. ……………………… 9 分

有 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=5$，$|\boldsymbol{m}|=\sqrt{3}$，$|\boldsymbol{n}|=3\sqrt{3}$，则 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{5}{9}$，………………………………… 11 分

∴平面 EBC 与平面 PAD 所成二面角的正弦值为 $\sqrt{1-\frac{25}{81}}=\sqrt{\frac{56}{81}}=\frac{2\sqrt{14}}{9}$. ……………………… 12 分

19. 解：(1)变量 X 的所有可能取值为 4，5，6，7，8.

由每次抛掷一次硬币，正面向上的概率为 $\frac{1}{2}$，反面向上的概率也为 $\frac{1}{2}$，……………………………… 2 分

则 $P(X=4)=\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$，$P(X=5)=C_4^1\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{4}$，$P(X=6)=C_4^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{3}{8}$，

$P(X=7)=C_4^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{4}$，$P(X=8)=C_4^4\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$. ……………………………………… 4 分

所以变量 X 的分布列为

X	4	5	6	7	8
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

故变量 X 的数学期望为 $E(X)=4\times\frac{1}{16}+5\times\frac{1}{4}+6\times\frac{3}{8}+7\times\frac{1}{4}+8\times\frac{1}{16}=6$. ……………………… 6 分

官方微信公众号：zizzsw　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　微信客服：zizzs2018

(2)①得 2 分只需要抛掷一次正面向上或两次反面向上，概率的和为 $Q_2=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$. ……… 8 分

②得 n 分分两种情况，第一种为得 $n-2$ 分后抛掷一次正面向上，第二种为得 $n-1$ 分后抛掷一次反面向上，

故有当 $n\geqslant 3$ 且 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，$Q_n=\frac{1}{2}Q_{n-1}+\frac{1}{2}Q_{n-2}$.

$A_{n+1}=Q_{n+2}+\frac{1}{2}Q_{n+1}=\frac{1}{2}Q_{n+1}+\frac{1}{2}Q_n+\frac{1}{2}Q_{n+1}=Q_{n+1}+\frac{1}{2}Q_n=A_n$，

故数列 $\{A_n\}$ 为常数列；………………………………………………………………………… 10 分

因为 $B_{n+1}=Q_{n+2}-Q_{n+1}=\frac{1}{2}Q_{n+1}+\frac{1}{2}Q_n-Q_{n+1}=-\frac{1}{2}Q_{n+1}+\frac{1}{2}Q_n=-\frac{1}{2}(Q_{n+1}-Q_n)=-\frac{1}{2}B_n$，

又 $B_1=P_2-P_1=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，故数列 $\{B_n\}$ 为等比数列. ……………………………… 12 分

20. 解：(1)由题意得 $\begin{cases}\frac{7}{4a^2}+\frac{9}{16b^2}=1,\\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2},\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a^2=4,\\ b^2=1.\end{cases}$ ……………………………………………… 4 分

所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ………………………………………………………… 5 分

(2)由(1)知点 $A(-2,0)$，$B(0,-1)$，

由题意可设直线 AP：$y=k(x+2)$ $\left(0<k<\frac{1}{2}\right)$，所以点 C 的坐标为 $(0,2k)$，

联立方程 $\begin{cases}y=k(x+2),\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$ 消去 y 并整理得 $(1+4k^2)x^2+16k^2x+16k^2-4=0$.

设 $P(x_1,y_1)$，则 $-2\cdot x_1=\frac{16k^2-4}{1+4k^2}$，所以 $x_1=-\frac{8k^2-2}{1+4k^2}$. ……………………………… 6 分

所以 $y_1=k\left(-\frac{8k^2-2}{1+4k^2}\right)=\frac{4k}{1+4k^2}$，所以 $P\left(-\frac{8k^2-2}{1+4k^2},\frac{4k}{1+4k^2}\right)$.

设 D 点的坐标为 $(x_0,0)$，因为点 P,B,D 三点共线，所以 $k_{BD}=k_{PB}$，即

$\frac{1}{-x_0}=\frac{\frac{4k}{1+4k^2}+1}{-\frac{8k^2-2}{1+4k^2}}$，所以 $x_0=\frac{2-4k}{1+2k}$，所以 $D\left(\frac{2-4k}{1+2k},0\right)$. ……………………… 8 分

因为 $CD/\!/AB$，

所以 $k_{CD}=k_{AB}$，

即 $\frac{k(2k+1)}{2k-1}=-\frac{1}{2}$，

所以 $4k^2+4k-1=0$，

所以 $k=\frac{-1\pm\sqrt{2}}{2}$. ……………………………………………………………………… 10 分

又 $0<k<\frac{1}{2}$，

所以 $k=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$，

所以点 P 的坐标为 $\left(\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. ……………………………………………………………… 12 分

21. 解：(1)方法一：$\because x>0$，

$\therefore$由 $f(x)\leqslant 0$ 恒成立，得 $a\leqslant x-\dfrac{\ln x}{x}$ 恒成立. …………………… 1 分

令 $g(x)=x-\dfrac{\ln x}{x}$，则 $g'(x)=\dfrac{x^2-1+\ln x}{x^2}$.

令 $h(x)=x^2-1+\ln x$，则 $h'(x)=2x+\dfrac{1}{x}$，$\because x>0$，$\therefore h'(x)>0$，

$\therefore h(x)=x^2-1+\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，又 $h(1)=0$， …………………… 3 分

$\therefore x\in(0,1)$，$h(x)<0$，$x\in(1,+\infty)$，$h(x)>0$，

即 $x\in(0,1)$，$g'(x)<0$，$x\in(1,+\infty)$，$g'(x)>0$，

$\therefore x\in(0,1)$，$g(x)$ 单调递减；$x\in(1,+\infty)$，$g(x)$ 单调递增，

$\therefore x=1$ 时，$g(x)$ 取极小值，即最小值 $g(1)=1$，

$\therefore a\leqslant 1$. …………………… 5 分

方法二：$f'(x)=\dfrac{1}{x}-2x+a=\dfrac{-2x^2+ax+1}{2}$. …………………… 1 分

由二次函数性质可知，存在 $x_0\in(0,+\infty)$，使得 $f'(x_0)=0$，

即 $-2x^2+ax+1=0$，且当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)>0$；

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，

$\therefore f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递增，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递减，

$\therefore f(x)_{\max}=f(x_0)=\ln x_0-x_0^2+ax_0=\ln x_0+x_0^2-1$. …………………… 3 分

由题意可知 $f(x)_{\max}=f(x_0)=\ln x_0+x_0^2-1\leqslant 0$.

设 $g(x)=\ln x+x^2-1$，则 $g'(x)=\dfrac{1}{x}+2x>0$，即 $g(x)$ 单调递增.

又 $g(1)=0$

$\therefore g(x)\leqslant 0$ 的解集为 $(0,1]$，即 $x_0\in(0,1]$，

$\therefore a=2x_0-\dfrac{1}{x_0}\in(-\infty,1]$. …………………… 5 分

(2)证明：由(1)可知 $f(x_0)=\ln x_0-x_0^2+ax_0$，$a=2x_0-\dfrac{1}{x_0}$，

$\therefore f(x_0)=\ln x_0+x_0^2-1$，$\therefore$ 曲线 M 的方程为 $y=\ln x+x^2-1$.

由题意可知，对任意 $k\in\mathbf{R}$，方程 $\ln x+x^2-1=kx$ 有唯一解. …………………… 6 分

设 $h(x)=\ln x+x^2-kx-1$，

则 $h'(x)=\dfrac{1}{x}+2x-k=\dfrac{2x^2-kx+1}{x}$.

①当 $k\leqslant 0$ 时，$h'(x)>0$ 恒成立，$\therefore h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

$\because h(1)=-k\geqslant 0$，$f(e^k)=k+e^{2k}-ke^k-1=k(1-e^k)+e^{2k}-1\leqslant 0$，

$\therefore$ 存在 x_0 满足 $e^k\leqslant x_0\leqslant 1$ 时，使得 $h(x_0)=0$.

又 $\because h(x)$ 单调递增. 所以 $x=x_0$ 为唯一解. …………………… 8 分

②当 $k>0$ 且 $\Delta=k^2-8\leqslant 0$，即 $0<k\leqslant 2\sqrt{2}$ 时，

$h'(x)\geqslant 0$ 恒成立，$\therefore h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

$\because h(1)=-k<0$，$f(e^3)=3+e^6-ke^3-1=(e^3-\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2}-k)e^3>0$，

$\therefore$ 存在 $x_0\in(1,e^3)$ 使得 $h(x_0)=0$，

又 $\because h(x)$ 单调递增，$\therefore x=x_0$ 为唯一解. …………………… 10 分

③当 $k>2\sqrt{2}$ 时，$h'(x)=0$ 有两解 $x=x_1,x_2$，不妨设 $x_1<x_2$，

$\because x_1\cdot x_2=\frac{1}{2}$，$\therefore x_1<\frac{\sqrt{2}}{2}<x_2$.

列表如下：

x	$(0,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,+\infty)$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

由表可知，当 $x=x_1$ 时，

$h(x)$的极大值为 $h(x_1)=\ln x_1+x_1^2-kx_1-1$.

$\because 2x_1^2-kx_1+1=0$，$\therefore h(x_1)=\ln x_1-x_1^2-2<0$.

$\therefore h(x_2)<h(x_1)<0$，

$h(e^{k^2})=k^2+e^{2k^2}-ke^{k^2}-1=(e^{k^2}-k)e^{k^2}+k^2-1>0$.（令 $m(x)=e^{x^2}-x\left(x\in(2\sqrt{2},+\infty)\right)$，

则 $m'(x)=2x\cdot e^{x^2}-1>0$，所以 $m(x)>m(2\sqrt{2})>0$）

$\therefore$存在 $x_0\in(x_2,e^{k^2})$，使得 $h(x_0)=0$.

又$\because h(x)$在$(x_2,+\infty)$单调递增，$\therefore x=x_0$ 为唯一解.

综上，过原点任意的直线 $y=kx$ 与曲线 M 有且仅有一个公共点. …… 12 分

22. 解：(1)直线 l_1 的普通方程为 $y=k(-x)$，直线 l_2 的普通方程为 $y-2=\frac{x}{k}$， …… 2 分

联立直线 l_1,l_2 方程消去参数 k，得曲线 C 的普通方程为 $y(y-2)=-x^2$， …… 4 分

整理得 $x^2+(y-1)^2=1(x\neq 0)$. …… 5 分

(2)设 Q 点的直角坐标系坐标为$(\rho\cos\alpha,\rho\sin\alpha)(\rho>0)$， …… 7 分

由 $\tan\alpha=\frac{4}{3}\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$，可得 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$，$\cos\alpha=\frac{3}{5}$，代入曲线 C 的方程可得 $\rho^2-\frac{8}{5}\rho=0$，

解得 $\rho=\frac{8}{5}$，$\rho=0$(舍)，所以点 Q 的极径为$\frac{8}{5}$. …… 10 分

23. 解：(1)①当 $x<-2$ 时，不等式 $f(x)<x+3$ 可化为 $1-x-x-2<x+3$，得 $x>-\frac{4}{3}$，无解； …… 1 分

②当$-2\leqslant x\leqslant 1$ 时，不等式 $f(x)<x+3$ 可化为 $1-x+x+2<x+3$，得 $x>0$，故 $0<x\leqslant 1$； …… 2 分

③当 $x>1$ 时，不等式 $f(x)<x+3$ 可化为 $x-1+x+2<x+3$，得 $x<2$，故 $1<x<2$. …… 3 分

综上，不等式 $f(x)<x+3$ 的解集为$\{x|0<x<2\}$. …… 5 分

(2)由题意知 $m\leqslant x^2+2x+f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，所以 $m\leqslant(x^2+2x+f(x))_{\min}$. …… 6 分

令 $g(x)=x^2+2x$，则当 $x=-1$ 时，$g(x)_{\min}=-1$. …… 7 分

又当$-2\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)$取得最小值，且 $f(x)_{\min}=3$. …… 8 分

又$-1\in[-2,1]$，所以当 $x=-1$ 时，$f(x)$与 $g(x)$同时取得最小值.

所以$(x^2+2x+f(x))_{\min}=-1+3=2$， …… 9 分

所以 $m\leqslant 2$.

即实数 m 的取值范围为$(-\infty,2]$. …… 10 分

官方微信公众号：zizzsw　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　微信客服：zizzs2018

自主招生在线创始于 2014 年，致力于提供强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛、新高考生涯规划等政策资讯的服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国强基计划、综合评价领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

识别二维码，快速关注

温馨提示：

全国中学大联考 2020 届高三下学期模考试题及答案汇总（更新下载中），点击链接获得

http://www.zizzs.com/c/202002/42364.html