# 全国大联考 2020 届高三 2 月联考

# 文科数学试卷

注意事项：

1．考试时间 120 分钟，满分 150 分。

2．因受新型冠状病毒影响，原定的考试时间无法进行考试，故本套试卷选择通过网络公布，以免影响高三考生的正常复习进度，公布后，考生和教师可自行打印使用此试卷。

**建议打印用纸**：试卷、答案：A4 纸或 A3 纸二合一打印 答题卡：A3 纸（建议彩印）

**注：本套试卷免费公布，不得为任何个人或企业盈利所用。**

**一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。**

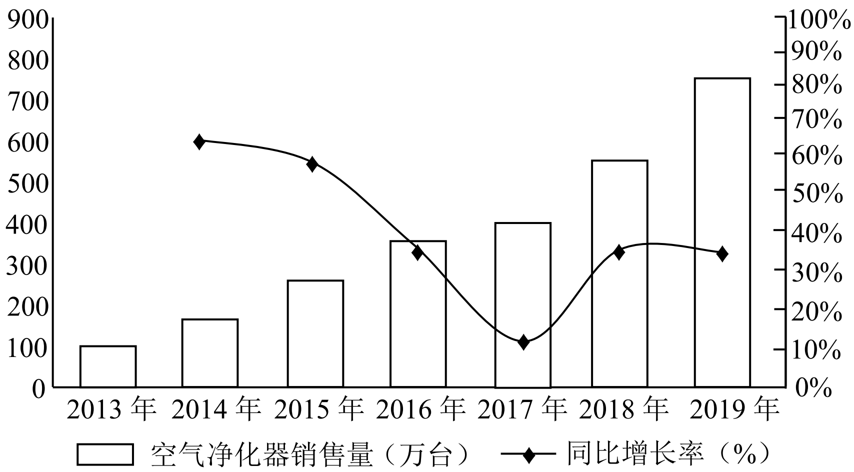
1．设集合 $A=\{x|x^2\leqslant x\}$，$B=\{x||x|\geqslant 1\}$，则 $A\cap B=$

A．$\varnothing$　　B．$[0, 1]$　　C．$\{1\}$　　D．$(-\infty, +\infty)$

2．已知 i 为虚数单位，复数 $z$ 满足 $z(1+i)=2i$，则 $z=$

A．2　　B．1+i　　C．−1+i　　D．1−i

3．自改革开放以来，我国综合国力显著提升，人民生活水平有了极大提高，也在不断追求美好生活。某研究所统计了自 2013 年至 2019 年来空气净化器的销量情况，绘制了如图的统计图．观察统计图，下列说法中不正确的是




A．2013 年——2019 年空气净化器的销售量逐年在增加

B．2017 年销售量的同比增长率最低

C．与 2018 年相比，2019 年空气净化器的销售量几乎没有增长

D．有连续三年的销售增长率超过 30%

4．“$0<x<1$”是“$\sin x^2<\sin x$”的

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　　　　　　　　　　　　　　D．既不充分也不必要条件

5．某公司的班车分别在 8:00，8:30 时刻发车，小明在 7:50 至 8:30 之间到达发车站乘坐班车，且到达发车站的时刻是随机的，则他等车时间不超过 15 分钟的概率是（　　）

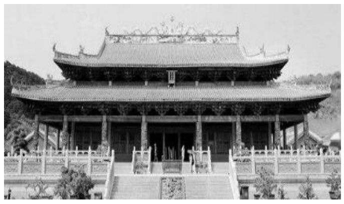
A．$\dfrac{1}{3}$　　　B．$\dfrac{3}{8}$　　　C．$\dfrac{2}{3}$　　　D．$\dfrac{5}{8}$

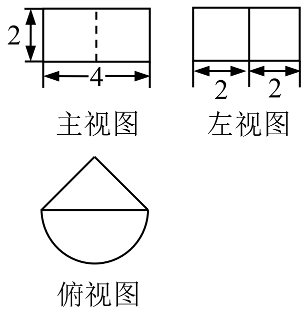
6．下列函数中，其图像与函数 $y=\ln x$ 的图像关于 $(2,0)$ 对称的是（　　）

A．$y=-\ln(2-x)$　　　B．$y=-\ln(2+x)$

C．$y=-\ln(4+x)$　　　D．$y=-\ln(4-x)$

7．我国古代木匠精于钻研，技艺精湛，常常设计出巧夺天工的建筑．在一座宫殿中，有一件特别的“柱脚”的三视图如右图所示，则其体积为






A．$\dfrac{8}{3}+4\pi$　　　B．$\dfrac{8}{3}+8\pi$

C．$8+4\pi$　　　D．$8+8\pi$

8．将函数 $f(x)=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x$ 的图象向右平移 $\varphi$ ($\varphi>0$)个单位，再向上平移 1 个单位，所得图象经过点($\dfrac{\pi}{8}$，1)，则 $\varphi$ 的最小值为

A．$\dfrac{5\pi}{12}$　　　B．$\dfrac{7\pi}{12}$　　　C．$\dfrac{5\pi}{24}$　　　D．$\dfrac{7\pi}{24}$

9．已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ($a>0$，$b>0$)的左、右焦点分别为 $F_1$，$F_2$，过 $F_1$ 作 $x^2+y^2=a^2$ 的切线，交双曲线右支于点 $M$，若 $\angle F_1MF_2=45^\circ$，则双曲线的离心率为

A．2　　　B．3　　　C．$\sqrt{2}$　　　D．$\sqrt{3}$

10．有一个长方体木块，三个侧面积分别为 8，12，24，现将其削成一个正四面体模型，则该正四面体模型棱长的最大值为

A．2　　　B．$2\sqrt{2}$　　　C．4　　　D．$4\sqrt{2}$

11．已知在平面直角坐标系 $xOy$ 中，$O$ 为坐标原点，$A(0，2)$，$|OB|^2+|OA|^2=20$，若平面内点 $P$ 满足 $\overrightarrow{PB}=3\overrightarrow{PA}$，则 $|PO|$ 的最大值为

A．7　　　B．6　　　C．5　　　D．4

12．已知函数 $f(x)=x^2-2x-m\ln x$ ($m\in\mathbf{R}$)存在两个极值点 $x_1$，$x_2$($x_1<x_2$)，$g(x)=(x-\dfrac{1}{2})\mathrm{e}^x$，　则 $g(x_1-x_2)$ 的最小值为

A．$-\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$　　　B．$-\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$　　　C．$\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$　　　D．$\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$

**二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.**

13．已知函数 $f(x)=\begin{cases}\log_2 x, & x>1,\\ f(x+3), & x\le 1,\end{cases}$ 则 $f(-2)=$________.

14．已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角为 45°，若 $\boldsymbol{a}=(1，1)$，$|\boldsymbol{b}|=2$，则 $|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=$________.

15．设 $x$，$y$ 满足约束条件 $\begin{cases}x+y\ge a,\\ x-y\ge -1,\end{cases}$ 且 $z=x+ay$ 的最大值为 7，则 $a=$________.

16．已知△$ABC$ 的内角 $A$，$B$，$C$ 所对边分别为 $a$，$b$，$c$，且 $a\cos C-c\cos A=\frac{3}{5}b$，则 $\tan(A-C)$ 的最大值为________.

**三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。**

**（一）必考题：（共 60 分）**

17．（本题满分 12 分）

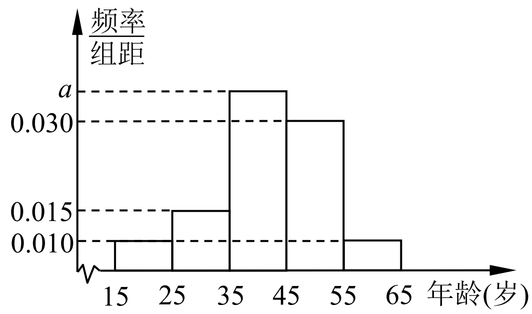
设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q$，$S_n$ 是 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和，已知 $a_1+2$，$2a_2$，$a_3+1$ 成等差数列，且 $S_3=4a_2-1$，$q>1$.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）记数列 $\{\frac{n}{a_n}\}$ 的前 $n$ 项和为 $T_n$，若 $4-T_n=(n+2)S_n$ 成立，求 $n$.

18．（本题满分 12 分）

第十三届全国人大第二次会议于 2019 年 3 月 5 日在北京开幕．为广泛了解民意，某人大代表利用网站进行民意调查．数据调查显示，民生问题是百姓最为关心的热点，参与调查者中关注此问题的约占 80%．现从参与调查者中随机选出 200 人，并将这 200 人按年龄分组，第 1 组[15，25)，第 2 组[25，35)，第 3 组[35，45)，第 4 组[45，55)，第 5 组[55，65)，得到的频率分布直方图如上图所示．




（1）求 $a$；

（2）现在要从年龄较小的第 1 组和第 2 组中用分层抽样的方法抽取 5 人，并再从这 5 人中随机抽取 2 人接受现场访谈，求这两人恰好属于不同组别的概率；

（3）把年龄在第 1，2，3 组的居民称为青少年组，年龄在第 4，5 组的居民称为中老年组，若选出的 200 人中不关注民生问题的中老年人有 10 人，问是否有 99%的把握认为是否关注民生与年龄有关？

附：

| $P(K^2\geqslant k_0)$ | 0.150 | 0.100 | 0.050 | 0.025 | 0.010 | 0.005 | 0.001 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k_0$ | 2.072 | 2.706 | 3.841 | 5.024 | 6.635 | 7.879 | 10.828 |

$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，$n=a+b+c+d$.

19．（本小题满分 12 分）

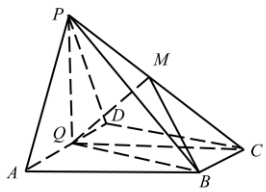
已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$，左右端点为 $A_1$，$A_2$，其中 $A_2$ 的横坐标为 2. 过点 $B(4,0)$ 的直线交椭圆于 $P,Q$ 两点（P,Q 不与 $A_1,A_2$ 重合），$P$ 在 $Q$ 的左侧，点 $Q$ 关于 $x$ 轴的对称点为 $R$，射线 $A_1R$ 与 $PA_2$ 交于点 $M$.

（1）求椭圆的方程；

（2）求证：$M$ 点在直线 $x=4$ 上.

20.（本小题满分 12 分）

如图，在四棱锥 P－ABCD 中，底面 ABCD 为直角梯形，AD∥BC，∠ADC=90°，平面 PAD⊥底面 ABCD，Q 为 AD 的中点，M 是棱 PC 的中点，PA=PD=2，BC= $\frac{1}{2}$AD=1，CD=$\sqrt{3}$.




（1）求证：平面 PBQ⊥平面 PAD；

（2）求四面体 C－BQM 的体积.

21. （本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=a(1-x)+2\ln x$ $(a\in\mathbf{R})$ 在定义域上满足 $f(x)\leqslant 0$ 恒成立.

（1）求实数 $a$ 的值；

（2）令 $g(x)=x\cdot\frac{f(x)+ax}{x-a}$ 在 $(a,+\infty)$ 上的最小值为 $m$，求证：$-11<f(m)<-10$ .

**（二）选考题：共 10 分．请考生在第 22、23 题中任选一题做答。如果多做，则按所做的第一题记分。**

22. ［选修 4−4：坐标系与参数方程］（10 分）

在平面直角坐标系 $xOy$ 中，$P(2,0)$. 以坐标原点为极点，$x$ 轴正半轴为极轴建立极坐标系，已知曲线 $C$ 的极坐标方程为 $\rho=2$，点 $Q(\rho,\theta)(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$为 $C$ 上的动点，$M$ 为 $PQ$ 的中点.

（1）请求出 $M$ 点轨迹 $C_1$ 的直角坐标方程；

（2）设点 $A$ 的极坐标为 $A(1,\pi)$，若直线 $l$ 经过点 $A$ 且与曲线 $C_1$ 交于点 $E$，$F$，弦 $EF$ 的中点为 $D$，求 $\frac{|AD|}{|AE|\cdot|AF|}$ 的取值范围.

23. ［选修 4−5：不等式选讲］（10 分）

已知 $a>0$，$b>0$.

（1）若关于 $x$ 的不等式$|x+3|-|x-1|\leqslant a^2-3a$ 对任意实数 $x$ 都成立，求实数 $a$ 的最小值；

（2）求证：$\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$

# 全国大联考 2020 届高三 2 月联考

# 文科数学参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.

| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 答案 | C | B | C | A | D | D | A | D | D | B | C | B |

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13．2　　14．$2\sqrt{5}$　　15．$-5$　　16．$\frac{3}{4}$

三、解答题：共 70 分.

17．解：（1）∵ $a_1+2$，$2a_2$，$a_3+1$ 成等差数列，

∴ $4a_2=a_1+2+a_3+1=a_1+a_3+3$，

即 $4a_1q=a_1+a_1q^2+3$，①

由 $S_3=4a_2-1$ 可得 $a_1+a_1q+a_1q^2=4a_1q-1$，即 $a_1-3a_1q+a_1q^2+1=0$，②

联立①②及 $q>1$ 解得 $a_1=1$，$q=2$，

∴ $a_n=2^{n-1}$.

（2）$T_n=\frac{1}{2^0}+\frac{2}{2^1}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{n}{2^{n-1}}$，

$\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2^1}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n-1}{2^{n-1}}+\frac{n}{2^n}$，

两式作差得 $\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^n}$

$$=\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n},$$

于是 $T_n=4-\frac{n+2}{2^{n-1}}$.

又∵ $S_n=\frac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$，

∴ $4-T_n=(n+2)S_n$ 可化为 $\frac{1}{2^{n-1}}=2^n-1$，即 $2^{n-1}\cdot(2^n-1)=1$，

可变形为 $(2^n)^2-2^n-2=0$，整理得 $(2^n-2)(2^n+1)=0$，　解得 $n=1$.

18．解：（1）∵ $0.010\times10+0.015\times10+0.030\times10+a\times10+0.010\times10=1$，

∴ $a$=0.035.

（2）由题意可知从第 1 组选取的人数为$5\times\dfrac{0.1}{0.1+0.15}=2$人，设为 $A_1$，$A_2$，

从第 2 组选取的人数为$5\times\dfrac{0.15}{0.1+0.15}=3$人，设为 $B_1$，$B_2$，$B_3$.

从这 5 人中随机抽取 2 人的所有情况有：($A_1$，$A_2$)，($A_1$，$B_1$)，($A_1$，$B_2$)，($A_1$，$B_3$)，($A_2$，$B_1$)，($A_2$，$B_2$)，($A_2$，$B_3$)，($B_1$，$B_2$)，($B_1$，$B_3$)，($B_2$，$B_3$)，共 10 种.

这两人恰好属于不同组别有($A_1$，$B_1$)，($A_1$，$B_2$)，($A_1$，$B_3$)，($A_2$，$B_1$)，($A_2$，$B_2$)，($A_2$，$B_3$)，共 6 种.

∴ 所求的概率为 $P=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$.

（3）选出的 200 人中，各组的人数分别为：

第 1 组：200×0.010×10=20 人，第 2 组：200×0.015×10=30 人，

第 3 组：200×0.035×10=70 人，第 4 组：200×0.030×10=60 人，

第 5 组：2000.010×10=20 人，

∴ 青少年组有 20+30+70=120 人，中老年组有 200−120=80 人，

∵ 参与调查者中关注此问题的约占 80%，即有 200×(1−80%)=40 人不关心民生问题，

∴ 选出的 200 人中不关注民生问题的青少年有 30 人.

于是得 2×2 列联表：

| | 关注民生问题 | 不关注民生问题 | 合计 |
|---|---|---|---|
| 青少年 | 90 | 30 | 120 |
| 中老年 | 70 | 10 | 80 |
| 合计 | 160 | 40 | 200 |

∴ $K^2=\dfrac{200\times(90\times10-70\times30)^2}{160\times40\times80\times120}=4.6875<6.635$，

∴ 没有 99%的把握认为是否关注民生与年龄有关.

19. **解**：（1）因为离心率为$\dfrac{1}{2}$，所以$\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$

因为$A_2$的横坐标为 2，所以$a=2,\therefore c=1,b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}$，

因此椭圆的方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$；

（2）设$P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2),R(x_2,-y_2)$

由 $3x^2+4y^2=12$ 与 $x=my+4$ 联立，得 $(3m^2+4)y^2+24my+36=0$

所以 $y_1+y_2=-\dfrac{24m}{3m^2+4}, y_1y_2=\dfrac{36}{3m^2+4}$

直线 $A_1R: y=\dfrac{-y_2}{x_2+2}(x+2)$，直线 $A_2P: y=\dfrac{y_1}{x_1-2}(x-2)$，

联立解出 $x=\dfrac{6y_1-2y_2}{my_1y_2+3y_1+y_2}=4-\dfrac{6(y_1+y_2)+4my_1y_2}{my_1y_2+3y_1+y_2}=4$

20.（1）证明：∵AD∥BC，$BC=\dfrac{1}{2}AD$，Q 为 AD 中点，

∴四边形 BCDQ 为平行四边形.

∴CD∥BQ.

∵∠ADC=90°，

∴∠AQB=90°，即 BQ⊥AD.

又∵平面 PAD⊥平面 ABCD，

且平面 PAD∩平面 ABCD=AD，

BQ⊂平面 ABCD，

∴BQ⊥平面 PAD.

∵BQ⊂平面 PBQ，

∴平面平面 PBQ⊥平面 PAD.

（2）解：∵$V_{C-BQM}=V_{M-BCQ}$，且 $V_{M-BCQ}=\dfrac{1}{2}V_{P-BCQ}$，

由（1）可知：四边形 BCDQ 为矩形，

∴$S_{\triangle BCQ}=\dfrac{1}{2}BQ\cdot BC=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

∵PA=PD，Q 为 AD 的中点，

∴PQ⊥AD，

∵平面 PAD⊥平面 ABCD，且平面 PAD∩平面 ABCD=AD，

∴PQ⊥平面 ABCD，在 Rt△PDQ，$PD^2=PQ^2+DQ^2$，$PQ=\sqrt{3}$，

∴$V_{P-BQM}=\dfrac{1}{2}V_{P-BCQ}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3}=\dfrac{1}{4}$.

21．解：（1）$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，且$f'(x)=\dfrac{2}{x}-a=\dfrac{2-ax}{x}$，

当$a\leqslant 0$时，$f'(x)>0$，故$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

由于$f(1)=0$，所以当$x>1$时，$f(x)>f(1)=0$，不合题意.

当$a>0$时，$f'(x)=\dfrac{-a(x-\frac{2}{a})}{x}$，

$\therefore$ 当$0<x<\dfrac{2}{a}$时，$f'(x)>0$；当$x>\dfrac{2}{a}$时，$f'(x)<0$，

所以$f(x)$在$(0,\dfrac{2}{a})$上单调递增，$f(x)$在$(\dfrac{2}{a},+\infty)$上单调递减，

即$f(x)_{\max}=f(\dfrac{2}{a})=a-2+2\ln 2-2\ln a$.

所以要使$f(x)\leqslant 0$在$(0,+\infty)$时恒成立，则只需$f(x)_{\max}\leqslant 0$，

亦即$a-2+2\ln 2-2\ln a\leqslant 0$.

令$\varphi(a)=a-2+2\ln 2-2\ln a$，则$\varphi'(a)=1-\dfrac{2}{a}=\dfrac{a-2}{a}$，

$\therefore$ 当$0<a<2$时，$\varphi'(a)<0$；当$a>2$时，$\varphi'(a)>0$，

即$\varphi(a)$在$(0,2)$上单调递减，在$(2,+\infty)$上单调递增.

又$\varphi(2)=0$，所以满足条件的$a$只有2，即$a=2$.

（2）由（1）知$a=2$，$f(x)=2-2x+2\ln x$，

$\therefore$ $g(x)=x\cdot\dfrac{f(x)+ax}{x-a}=\dfrac{2x+2x\ln x}{x-2}(x>2)$，

于是$g'(x)=\dfrac{2(x-2\ln x-4)}{(x-2)^2}$.

令$s(x)=x-2\ln x-4$，则$s'(x)=1-\dfrac{2}{x}=\dfrac{x-2}{x}$，

由于$x>2$，所以$s'(x)>0$，即$s(x)$在$(2,+\infty)$上单调递增；

又$s(8)<0$，$s(9)>0$，

$\therefore$ $\exists x_0\in(8,9)$，使得$s(x_0)=0$，即$2\ln x_0=x_0-4$，

且当$2<x<x_0$时，$s(x)<0$；当$x>x_0$时，$s(x)>0$，

即$g(x)$在$(2,x_0)$上单调递减；在$(x_0,+\infty)$上单调递增.

$\therefore$ $g(x)_{\min}=g(x_0)=\dfrac{2x_0+2x_0\ln x_0}{x_0-2}=\dfrac{x_0^{\ 2}-2x_0}{x_0-2}=x_0$.

即$m=x_0$，

$\therefore$ $f(m)=f(x_0)=2-2x_0+2\ln x_0=-x_0-2\in(-11,-10)$，

即 $-11 < f(m) < -10$.

22．解：（1）∵ $C$ 的直角坐标方程为 $x^2+y^2=4$，

∴ 点 $Q(x_0，y_0)$满足 $x^2+y^2=4(y\geqslant 0)$.

设 $M(x，y)$，则 $x=\dfrac{x_0+2}{2}$，$y=\dfrac{y_0}{2}$，即 $x_0=2x-2$，$y_0=2y$，

∴ $(2x-2)^2+(2y)^2=4(y\geqslant 0)$，

整理得 $C_1$ 的轨迹方程为$(x-1)^2+y^2=1(y\geqslant 0)$.

（2）直线 $l$ 过点 $A(-1，0)$，

所以直线 $l$ 的参数方程为$\begin{cases} x=-1+t\cos\theta, \\ y=t\sin\theta, \end{cases}$($\theta$ 为参数，$\theta$ 为倾斜角，$\theta\in[0，\dfrac{\pi}{6})$)

代入 $C_1$：$t^2-4t\cos\theta+3=0$，

则$\begin{cases} t_1+t_2=4\cos\theta, \\ t_1t_2=3, \end{cases}$

∴ $\dfrac{|AD|}{|AE|\cdot|AF|}=\dfrac{\left|\dfrac{t_1+t_2}{2}\right|}{|t_1|\cdot|t_2|}=\dfrac{2\cos\theta}{3}\in(\dfrac{\sqrt{3}}{3}，\dfrac{2}{3}]$.

23．解：（1）∵ $|x+3|-|x-1|=|x+3|-|1-x|\leqslant|(x+3)+(1-x)|=4$，

∴ $a^2-3a\geqslant 4$，

解得 $a\geqslant 4$，或 $a\leqslant -1$（舍去）.

∴ $a$ 的最小值为 4.

（2）∵ $\dfrac{a}{\sqrt{b}}+\dfrac{b}{\sqrt{a}}-(\sqrt{a}+\sqrt{b})=\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}-a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}$

$$=\frac{a(\sqrt{a}-\sqrt{b})-b(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{ab}}$$

$$=\frac{(a-b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{ab}}$$

$$=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{ab}}\geqslant 0$$

∴ $\dfrac{a}{\sqrt{b}}+\dfrac{b}{\sqrt{a}}\geqslant(\sqrt{a}+\sqrt{b})$.