2021—2022学年度第一学期高二质量检测

数学试题

2021.11

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考试号等填写在答题卡和试卷指定位置上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。

一、单项选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的. $(-1,3)$ $(x+1)(x-3)$ $x\geq 2$

1. 若集合 $A=\{x|x^2-2x-3<0\}$，$B=\{x|3^x\geq 9\}$，则 $A\cup B=$ C

A. $(-1,2]$　　B. $[2,3)$　　C. $(-1,+\infty)$　　D. $(-\infty,3)$

2. 已知复数 z 满足 $z\cdot i^3=1-2i$，则 $\bar{z}$ 的虚部为 A $2+i$ B $1-2i$

A. 1　　B. -1　　C. 2　　D. -2

3. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^{1-x}, & x\leq 0\\ \log_{\frac{1}{2}}x, & x>0\end{cases}$，则 $f(f(-1))=$ A $\log_{\frac{1}{2}}4$

A. -2　　B. 2　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{2}$

4. 已知圆锥的底面半径为1，其侧面展开图为一个半圆，则该圆锥的体积为 D

A. $2\sqrt{2}\pi$　　B. $\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$　　C. $\sqrt{3}\pi$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$

5. 若数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，且 $a_1+a_3=1$，$a_3+a_5=2$，则 $a_{15}+a_{17}=$ C aq^2 aq^4 aq^{14}

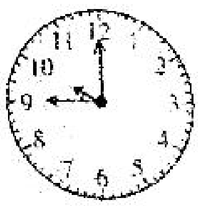
A. 32　　B. 64　　C. 128　　D. 256

6. "$1<k<5$"是方程"$\frac{x^2}{k-1}+\frac{y^2}{5-k}=1$ 表示椭圆"的 B $(1,3)\cup(3,5)$

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分又不必要条件

7. 如图，某时钟显示的时刻为9:45，此时时针与分针的夹角为 θ，则 $(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)=$ $-\cos 2\theta$ C D



A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

8. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右顶点为 A，若以点 A 为圆心，以 b 为半径的圆与 C 的一条渐近线交于 M,N 两点，且 $\overrightarrow{OM}=3\overrightarrow{ON}$，则 C 的离心率为

A. $\sqrt2$　　B. $\sqrt3$　　C. $\frac{\sqrt6}{2}$　　D. $\frac{2\sqrt3}{3}$

二、多项选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9. 将函数 $f(x)=\sqrt3\cos(2x-\frac{\pi}{3})-1$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，再向上平移 1 个单位长度，得到函数 $g(x)$ 的图象，则　BC

A. 函数 $g(x)$ 的图象关于直线 $x=-\frac{\pi}{6}$ 对称　　B. 函数 $g(x)$ 的图象关于 y 轴对称

C. 函数 $g(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的最小值为 $-\sqrt3$　　D. 若 $\frac{\pi}{2}<x_1<x_2<\pi$，则 $g(x_1)>g(x_2)$

10. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $a_1>0$，$a_6+a_9>0$，$a_7\cdot a_8<0$，则　BCD

A. 数列 $\{a_n\}$ 是递增数列　　B. $S_6>S_9$

C. 当 $n=7$ 时，S_n 最大　　D. 当 $S_n>0$ 时，n 的最大值为 14

11. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，满足 $f(x)=f(2-x)$，且当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=x^2$．若函数 $g(x)=f(x)-x-a$ 恰有 3 个不同的零点，则实数 a 的取值范围可以是

A. $(-\frac{5}{4},-1)$　　B. $(-\frac{1}{4},0)$　　C. $(\frac{3}{4},1)$　　D. $(\frac{7}{4},2)$

12. 若点 P 是棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 表面上的动点，点 M 是棱 A_1D_1 的中点，则

A. 当点 P 在底面 $ABCD$ 内运动时，三棱锥 $P-C_1D_1M$ 的体积为定值

B. 当 $AP\perp DM$ 时，线段 AP 长度的最大值为 3

C. 当直线 AP 与平面 $ABCD$ 所成的角为 45° 时，点 P 的轨迹长度为 $4\sqrt2-2\pi$

D. 直线 DM 被正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的外接球所截得的线段的长度为 $\frac{6\sqrt5}{5}$

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13. 已知向量 $\overrightarrow{AB}=(1,-2)$，$\overrightarrow{AC}=(2,t)$，若 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$，则 $|\overrightarrow{BC}|=$ ▲ $\sqrt{10}$.

14. 若直线 $l_1: x-2y+1=0$ 与直线 $l_2: 2x+my+1=0$ 平行，则直线 l_1 与 l_2 之间的距离为 -4

▲ $\frac{\sqrt5}{10}$

15. 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)=x^3+3\sin x$，满足 $f(1-a)+f(1-a^2)<0$，则实数 a 的取值范围是 ▲ $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$

16. 已知 $\sin\alpha-\cos\beta=3\cos\alpha-3\sin\beta$，且 $\sin(\alpha+\beta)\neq1$，则 $\sin(\alpha-\beta)=$ ▲ .

 $\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

四、解答题：本大题共6小题，共70分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分10分）

已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$4a_n=3S_n+2$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设$b_n=a_n+\log_2 a_n$，求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n.

4^{2n-2}

2^{2n-2}

18.（本小题满分12分）

已知△ABC的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，且$2c+b=2a\cos B$.

$\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

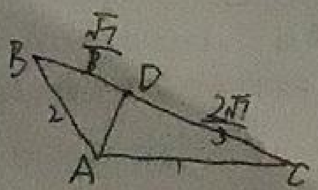
(1)求角A的大小；

(2)若$b=1$，$c=2$，点D在边BC上，且$CD=2BD$，求线段AD的长.

$2c+b=\frac{a^2+c^2-b^2}{c}$

$2c^2+bc=a^2+c^2-b^2$

$bc=a^2-c^2-b^2$

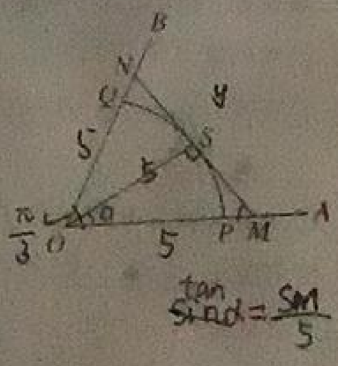


19.（本小题满分12分）

如图，扇形OPQ区域（含边界）是一风景旅游区，其中P，Q分别在公路OA和OB上. 经测得，扇形OPQ区域的圆心角$\angle POQ=\frac{\pi}{3}$，半径为5千米. 为了方便旅游参观，打算在扇形OPQ区域外修建一条公路MN，分别与OA和OB交于M，N两点，并且MN与$\overset{\frown}{PQ}$相切于点S（异于点P，Q），设$\angle POS=\alpha$（弧度），将公路MN的长度记为y（单位：千米），假设所有公路的宽度均忽略不计.

(1)将y表示为α的函数，并写出α的取值范围；

(2)求y的最小值，并求此时α的值.



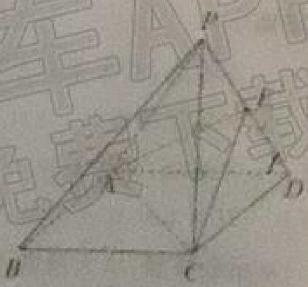
tan $\sin\alpha=\frac{SM}{5}$

20.(本小题满分 12 分)

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为平行四边形，侧面 PAD 是边长为 2 的正三角形，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，$AB\perp PD$.

(1)求证：$AB\perp$ 平面 PAD；

(2)若 E 为侧棱 PD 的中点，且点 B 到平面 ACE 的距离为 $\frac{2\sqrt{6}}{5}$，求平面 ACE 与平面 ABP 夹角的余弦值.

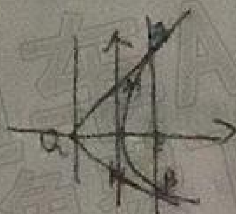


21.(本小题满分 12 分)

已知抛物线 $E: y^2=2px\,(p>0)$ 上一点 $C(1,y_0)$ 到其焦点 F 的距离为 2.

(1)求实数 p 的值；

(2)若过焦点 F 的动直线 l 与抛物线交于 A、B 两点，过 A、B 分别作抛物线的切线 l_1、l_2，且 l_1、l_2 的交点为 Q，l_1、l_2 与 y 轴的交点分别为 M、N，求 $\triangle QMN$ 面积的取值范围.

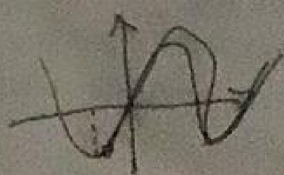


22.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=$ [illegible] $(a,b\in\mathbf{R})$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=$ [illegible].

(1)求实数 a、b 的值；

(2)当 $x\in[-\frac{\pi}{2},+\infty)$ 时，$f(x)\le c\,(c\in\mathbf{Z})$ 恒成立，求 c 的最小值.



2021—2022学年度第一学期高三质量检测

数学试题参考答案及评分标准

注：解答题每题只给出了一种解法，其它解法酌情给分.

一、单项选择题：每小题5分，共40分

1.C　2.B　3.A　4.D　5.C　6.B　7.B　8.C

二、多项选择题：每小题5分，共20分.全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.

9.BC　10.BCD　11.BD　12.ABD

三、填空题：每小题5分，共20分.

13. $\sqrt{10}$　14. $\frac{\sqrt{5}}{10}$　15. $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$　16. $-\frac{4}{5}$

四、解答题：共70分.

17.解：(1) $\because 4a_n=3S_n+2$，　①

当 $n=1$ 时，$4a_1=3a_1+2$，即 $a_1=2$. ……………… 1分

当 $n\geqslant 2$ 时，$4a_{n-1}=3S_{n-1}+2$.　②

由①－②得　$4a_n-4a_{n-1}=3a_n$，即 $a_n=4a_{n-1}$ ……………… 3分

$\therefore$ 数列$\{a_n\}$是以2为首项，4为公比的等比数列.

$\therefore a_n=2\times 4^{n-1}$. ……………… 5分

(2)由(1)知 $\log_2 a_n=\log_2(2\times 4^{n-1})=\log_2 2^{2n-1}=2n-1$

$\therefore b_n=a_n+\log_2 a_n=2\times 4^{n-1}+2n-1$， ……………… 7分

$\therefore T_n=\frac{2(1-4^n)}{1-4}+\frac{n(1+2n-1)}{2}=\frac{2(4^n-1)}{3}+n^2$. ……………… 10分

18.解：(1)在$\triangle ABC$中，由正弦定理得　$2\sin C+\sin B=2\sin A\cos B$ ……………… 2分

因为 $\sin C=\sin(\pi-A-B)=\sin(A+B)$，代入得

$2\sin A\cos B+2\cos A\sin B+\sin B=2\sin A\cos B$

即 $2\cos A\sin B+\sin B=0$ ……………… 4分

又 $\sin B\neq 0$，所以 $\cos A=-\frac{1}{2}$. ……………… 5分

又 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{2\pi}{3}$. ……………… 6分

(2)在$\triangle ABC$中，由余弦定理得　$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=7$

所以 $a=\sqrt{7}$，$BD=\frac{1}{3}a=\frac{\sqrt{7}}{3}$. …………………………………………………………… 8 分

在△ABC 中，由余弦定理得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{5\sqrt{7}}{14}$. ………………………………… 10 分

在△ABD 中，由余弦定理得 $AD^2=AB^2+BD^2-2\times AB\times BD\times\cos B=\frac{13}{9}$，

所以 $AD=\frac{\sqrt{13}}{3}$. ……………………………………………………………………… 12 分

19. 解：(1)因为 MN 与 $\overset{\frown}{PQ}$ 相切于点 S，所以 $OS\perp MN$，

在 Rt$\triangle OSM$ 中，因为 $OS=5$，$\angle MOS=\alpha$，所以 $SM=5\tan\alpha$，……………………………… 1 分

在 Rt$\triangle OSN$ 中，因为 $OS=5$，$\angle NOS=\frac{\pi}{3}-\alpha$，所以 $SN=5\tan(\frac{\pi}{3}-\alpha)$，…………… 3 分

所以 $y=5\tan\alpha+5\tan(\frac{\pi}{3}-\alpha)=5\tan\alpha+\frac{5(\sqrt{3}-\tan\alpha)}{1+\sqrt{3}\tan\alpha}=\frac{5\sqrt{3}(\tan^2\alpha+1)}{1+\sqrt{3}\tan\alpha}$，………… 5 分.

$(0<\alpha<\frac{\pi}{3})$ ………………………………………………………………………………… 6 分

(2)因为 $0<\alpha<\frac{\pi}{3}$，所以 $1+\sqrt{3}\tan\alpha>0$，

令 $t=1+\sqrt{3}\tan\alpha(1<t<4)$，则 $\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}(t-1)$，

所以 $y=\frac{5\sqrt{3}}{3}(t+\frac{4}{t}-2)$ ……………………………………………………………… 8 分

$\geqslant\frac{5\sqrt{3}}{3}(2\sqrt{t\times\frac{4}{t}}-2)=\frac{10\sqrt{3}}{3}$，…………………………………………………… 10 分

当且仅当 $t=\frac{4}{t}$，即 $t=2$ 时取等号，此时 $\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$，又 $0<\alpha<\frac{\pi}{3}$，所以 $\alpha=\frac{\pi}{6}$.

所以公路 MN 长度的最小值为 $\frac{10\sqrt{3}}{3}$，此时 α 的值为 $\frac{\pi}{6}$. ………………………………… 12 分

20. 解：(1)设 Q 为 AD 的中点，连接 PQ，

∵△PAD 为正三角形，∴$PQ\perp AD$，

又平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，

∴$PQ\perp$ 平面 $ABCD$，…………………………………………………………………… 2 分

又 $AB\subset$ 平面 $ABCD$，∴$PQ\perp AB$，………………………………………………………… 3 分

又 $AB\perp PD$，$PQ\cap PD=P$，∴$AB\perp$ 平面 PAD ………………………………………………… 4 分

(2)在平面 PAD 内作 $AM/\!/PQ$，则 $AM\perp AD$.

∵$AB\perp$ 平面 PAD，$AD\subset$ 平面 PAD，$AM\subset$ 平面 PAD，∴$AB\perp AD$，$AB\perp AM$.

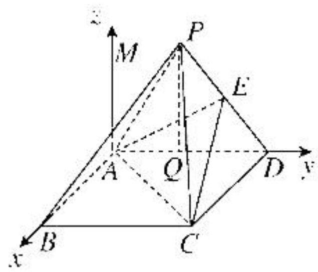
如图所示，以 A 为坐标原点，AB，AD，AM 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，

建立空间直角坐标系. ……………………………………………………………………… 5 分

∵底面 $ABCD$ 为平行四边形，$AB\perp AD$，∴$ABCD$ 为矩形.

设 $AB=a$，则 $A(0,0,0)$，$B(a,0,0)$，$C(a,2,0)$，$D(0,2,0)$，$P(0,1,\sqrt{3})$，$E(0,\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$.

∴$\overrightarrow{AC}=(a,2,0)$，$\overrightarrow{AE}=(0,\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$.



设平面 ACE 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，

由 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AC}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AE}=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}ax+2y=0\\ \frac{3}{2}y+\frac{\sqrt{3}}{2}z=0\end{cases}$

取 $x=2$，得平面 ACE 的一个法向量为 $\vec{m}=(2,-a,\sqrt{3}a)$ ………………………… 7 分

又 $\overrightarrow{AB}=(a,0,0)$，所以点 B 到平面 ACE 的距离为 $\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{m}|}{|\vec{m}|}=\frac{2a}{\sqrt{4+4a^2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

解得 $a=2$. ………………………………………………………………………… 9 分

∴$\vec{m}=(2,-2,2\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AB}=(2,0,0)$，$\overrightarrow{AP}=(0,1,\sqrt{3})$，

设平面 ABP 的法向量为 $\vec{n}=(x_1,y_1,z_1)$，

由 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}2x_1=0\\ y_1+\sqrt{3}z_1=0\end{cases}$

取 $z_1=1$，得平面 ABP 的一个法向量为 $\vec{m}=(0,-\sqrt{3},1)$ ………………………… 10 分

∴平面 ACE 与平面 ABP 夹角的余弦值为

$|\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle|=\frac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\frac{4\sqrt{3}}{2\times2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$. ………………………… 12 分

21. 解：(1)由抛物线的定义知 $1+\frac{p}{2}=2$ ………………………………………… 2 分

解得 $p=2$. ………………………………………………………………………… 3 分

(2)设 $A(\frac{y_1^2}{4},y_1)$，$B(\frac{y_2^2}{4},y_2)$，$(y_1\neq0,y_2\neq0)$，

设 l：$x=ty+1$，联立 $\begin{cases}y^2=4x\\ x=ty+1\end{cases}$，得 $y^2-4ty-4=0$，

$y_1+y_2=4t$，$y_1y_2=-4$，………………………………………………………… 5 分

设 l_1：$y-y_1=k(x-\frac{y_1^2}{4})$

联立方程组 $\begin{cases}y^2=4x\\ y-y_1=k(x-\frac{y_1^2}{4})\end{cases}$，消 x 得 $ky^2-4y+4y_1-ky_1^2=0$，

所以 $\Delta=16-4k(4y_1-ky_1^2)=4(4-4ky_1+k^2y_1^2)=0$

所以 $k=\frac{2}{y_1}$ ………………………………………………………………………… 7 分

$l_1: y-y_1=\frac{2}{y_1}(x-\frac{y_1^2}{4})$，即 $y=\frac{2}{y_1}x+\frac{y_1}{2}$，令 $x=0$，得 $M(0,\frac{y_1}{2})$，………………………… 8 分

同理 $l_2: y=\frac{2}{y_2}x+\frac{y_2}{2}$，$N(0,\frac{y_2}{2})$，………………………………………………………… 9 分

联立 $\begin{cases} y=\frac{2}{y_1}x+\frac{y_1}{2} \\ y=\frac{2}{y_2}x+\frac{y_2}{2} \end{cases}$，得交点 Q 的横坐标为 $x_Q=\frac{y_1y_2}{4}=-1$， ……………………… 10 分

$\therefore S_{\triangle QMN}=\frac{1}{2}|MN|\cdot|x_Q|=\frac{1}{2}|\frac{y_1}{2}-\frac{y_2}{2}|\times1=\frac{1}{4}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{t^2+1}\geqslant1$

∴△QMN 面积的取值范围是 $[1,+\infty)$. ………………………………………………… 12 分

22. 解：(1)因为 $f'(x)=-a\sin x-be^x$，……………………………………………………… 1 分

所以 $\begin{cases} f'(0)=b=-1 \\ f(0)=a+b=0 \end{cases}$ ………………………………………………………………… 3 分

解得 $\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$ ………………………………………………………………………… 4 分

(2)因为 $f(x)=\cos x-e^x$，$x\in[-\frac{\pi}{2},+\infty)$，

所以 $f'(x)=-\sin x-e^x$，$f''(x)=-\cos x-e^x=-(\cos x+e^x)$. ……………………… 5 分

当 $x\in[-\frac{\pi}{2},0]$ 时，$\cos x\geqslant0$，$e^x>0$，所以 $f''(x)<0$；

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$-1\leqslant\cos x\leqslant1$，$e^x>1$，所以 $f''(x)<0$.

所以，当 $x\in[-\frac{\pi}{2},+\infty)$ 时，$f''(x)<0$，$f'(x)$ 单调递减. ……………………………… 6 分

因为 $f'(0)=-1<0$，$f'(-\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}-e^{-\frac{\pi}{4}}=(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}-(\frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}})^{\frac{1}{2}}$，

因为 $e^{\frac{\pi}{2}}>e>2$，所以 $(\frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}})^{\frac{1}{2}}<(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}$，所以 $f'(-\frac{\pi}{4})>0$. ……………………………… 7 分

所以 $\exists x_0\in(-\frac{\pi}{4},0)$，使得 $f'(x_0)=-\sin x_0-e^{x_0}=0$，即 $e^{x_0}=-\sin x_0$. ………… 8 分

所以，当 $x\in[-\frac{\pi}{2},x_0)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减. ……………………………………………… 9 分

所以 $f(x)_{\max}=f(x_0)=\cos x_0-e^{x_0}=\cos x_0+\sin x_0=\sqrt{2}\sin(x_0+\frac{\pi}{4})$. …………… 10 分

因为 $x_0\in(-\frac{\pi}{4},0)$，所以 $x_0+\frac{\pi}{4}\in(0,\frac{\pi}{4})$，所以 $\sin(x_0+\frac{\pi}{4})\in(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$，

所以 $f(x_0)\in(0,1)$. ……………………………………………………………………… 11 分

由题意知，$c\geqslant f(x_0)$，所以，整数 c 的最小值为 1. ………………………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。