高三年级调研测试

数　学

本试卷共 6 页，22 小题，满分 150 分，考试用时 120 分钟。

注意事项：1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。将条形码横贴在答题卡上“条形码粘贴处”。

2、作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔在答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案。答案不能答在试卷上。

3、非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。

4、考生必须保持答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、若非空且互不相等的集合 M，N，P 满足：$M\cap N=M$，$N\cup P=P$，则 $M\cup P=$

A．M　　B．N　　C．P　　D．$\varnothing$

2、已知 $i^5=a+bi$（a，$b\in\mathbf{R}$），则 $a+b$ 的值为

A．-1　　B．0　　C．1　　D．2

3、设 $p:4x-3<1$；$q:x-(2a+1)<0$，若 p 是 q 的充分不必要条件，则

A．$a>0$　　B．$a>1$　　C．$a\geqslant 0$　　D．$a\geqslant 1$

4、已知点 Q 在圆 $C:x^2+y^2-4x+3=0$ 上，点 P 在直线 $y=x$ 上，则 PQ 的最小值为

A．$\sqrt{2}-1$　　B．1　　C．$\sqrt{2}$　　D．2

5、某次足球赛共 8 支球队参加，分三个阶段进行．

1）小组赛：经抽签分成甲、乙两组，每组 4 队进行单循环比赛，以积分和净胜球数取前两名；

（2）半决赛：甲组第一名与乙组第二名，乙组第一名与甲组第二名进行主、客场交叉淘汰赛（每两队主、客场各赛 1 场），决出胜者；

（3）决赛：两个胜队参加，比赛 1 场，决出胜负．

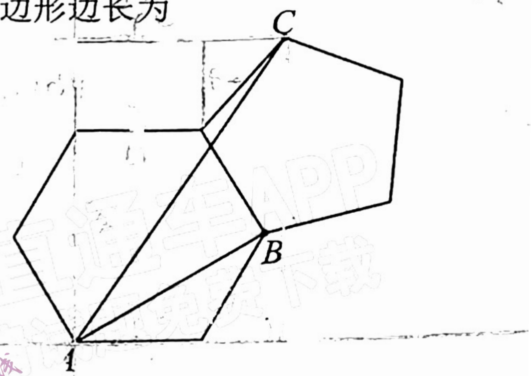
则全部赛程共需比赛的场数为

A．15　　B．16　　C．17　　D．18

6. 若 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 在区间 $[-t,t]$ 上单调递增，则实数 t 的取值范围为

A. $[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}]$　　B. $(0,\frac{\pi}{3}]$　　C. $[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$　　D. $(0,\frac{\pi}{6}]$

7. 足球是由 12 个正五边形和 20 个正六边形组成的．如图，将足球上的一个正六边形和它相邻的正五边形展开放平，若正多边形边长为 a，A，B，C 分别为正多边形的顶点，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$



A. $(3+\sqrt{3}\cos 18°)a^2$

B. $(\sqrt{3}+\cos 18°)a^2$

C. $(3+\sqrt{2}\cos 18°)a^2$

D. $(3\sqrt{3}+3\cos 18°)a^2$

8. 在某次数学节上，甲、乙、丙、丁四位同学分别写下了一个命题：

甲：$\ln 3<\sqrt{3}\ln 2$；　乙：$\ln\pi<\sqrt{\frac{\pi}{e}}$；　丙：$2^{\sqrt{12}}<12$；　丁：$3e\ln 2>4\sqrt{2}$．

所写为真命题的是

A. 甲和乙　　B. 甲和丙　　C. 丙和丁　　D. 甲和丁

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 连续抛掷一枚骰子 2 次，记事件 A 表示“2 次结果中正面向上的点数之和为奇数”，事件 B 表示“2 次结果中至少一次正面向上的点数为偶数”，则

A. 事件 A 与事件 B 不互斥　　B. 事件 A 与事件 B 相互独立

C. $P(AB)=\frac{3}{4}$　　D. $P(A|B)=\frac{2}{3}$

10. 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=3$，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，底面 $A_1B_1C_1D_1$ 的中心为 M，则

A. C_1D_1 // 平面 ABM

B. 向量 $\overrightarrow{AM}$ 在向量 $\overrightarrow{AC}$ 上的投影向量为 $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

C. 棱锥 $M-ABCD$ 的内切球的半径为 $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

D. 直线 AM 与 BC 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{11}}{11}$

公元前 6 世纪，古希腊的毕达哥拉斯学派把 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ($\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$) 称为黄金数．离心率等于黄金数的倒数的双曲线称为黄金双曲线．若黄金双曲线 $E:\frac{x^2}{a^2}-y^2=1(a>0)$ 的左、右顶点分别为 A_1，A_2，虚轴的上端点为 B，左焦点为 F，离心率为 e，则

A．$a^2e=1$

B．$\overrightarrow{A_2B}\cdot\overrightarrow{FB}=0$

C．顶点到渐近线的距离为

D．△A_2FB 的外接圆的面积为 $\frac{2+\sqrt{5}}{4}\pi$

设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(2x+1)$ 为奇函数，$f(x+2)$ 为偶函数，当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=a^x+b$．若 $f(0)+f(3)=-1$，则（　　）

A．$b=-2$

B．$f(2023)=-1$

C．$f(x)$ 为偶函数

D．$f(x)$ 的图象关于 $(\frac{1}{2},0)$ 对称

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．若 $(1-2x)^5(x+2)=a_0+a_1x+\cdots+a_6x^6$，则 $a_3=$______．

14．某学校组织 1200 名学生进行“防疫知识测试”．测试后统计分析如下：学生的平均成绩为 $\bar{x}=80$，方差为 $s^2=25$．学校要对成绩不低于 90 分的学生进行表彰．假设学生的测试成绩 X 近似服从正态分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$（其中 μ 近似为平均数 $\bar{x}$，σ^2 近似为方差 s^2），则估计获表彰的学生人数为______．（四舍五入，保留整数）

参考数据：随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)=0.6827$，

$P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)=0.9545$，$P(\mu-3\sigma<X<\mu+3\sigma)=0.9973$．

15．已知抛物线 $y^2=2x$ 与过点 $T(6,0)$ 的直线相交于 A,B 两点，且 $OB\perp AB$（O 为坐标原点），则△OAB 的面积为______．

16．已知函数 $f(x)=\begin{cases}e^{x-1}+1, & x\leqslant 1,\\ |\ln(x-1)|, & x>1,\end{cases}$ 则函数 $F(x)=f[f(x)]-2f(x)-\frac{1}{2}$ 的零点个数为______．

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10 分）

已知 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $a\cos B+b\cos A=2c\cos C$.

（1）求角 C；

（2）若 $c=2$，求 $\triangle ABC$ 的周长的取值范围.

18.（12 分）

已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$S_3=14$，$S_6=126$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

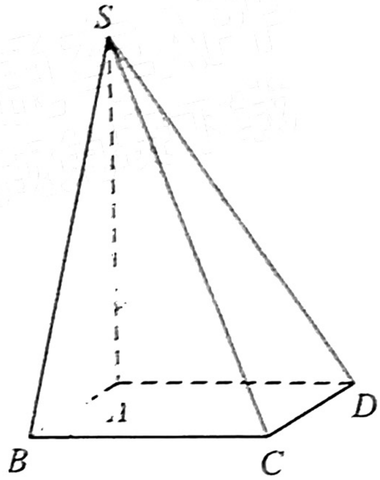
（2）当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，$a_nb_1+a_{n-1}b_2+\cdots+a_1b_n=4^n-1$，求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式.

19.（12 分）

如图，在四棱锥 $S-ABCD$ 中，侧面 $SAD\perp$ 底面 $ABCD$，$SA\perp AD$，且四边形 $ABCD$ 为平行四边形，$AB=1$，$BC=2$，$\angle ABC=\frac{\pi}{3}$，$SA=3$.

（1）求二面角 $S-CD-A$ 的大小；

（2）点 P 在线段 SD 上且满足 $\overrightarrow{SP}=\lambda\overrightarrow{SD}$，试确定 λ 的值，使得直线 BP 与面 PCD 所成角最大.



20.（12 分）

设椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，若椭圆 E 上的点到直线 $l:x=$ — 的最小距离为 $3-\sqrt{3}$.

（1）求椭圆 E 的方程；

（2）过 F_1 作直线交椭圆 E 于 A，B 两点，设直线 AF_2，BF_2 与直线 l 分别交于 C，D 两点，线段 AB，CD 的中点分别为 M，N，O 为坐标原点，若 M，O，N 三点共线，求直线 AB 的方程.

21.（12 分）

第 22 届世界杯于 2022 年 11 月 21 日到 12 月 18 日在卡塔尔举办．在决赛中，阿根廷队通过点球战胜法国队获得冠军．

（1）扑点球的难度一般比较大，假设罚点球的球员会等可能地随机选择球门的左、中、右三个方向射门，门将也会等可能地随机选择球门的左、中、右三个方向来扑点球，而且门将即使方向判断正确也有 $\frac{2}{3}$ 的可能性扑不到球．不考虑其它因素，在一次点球大战中，求门将在前三次扑到点球的个数 X 的分布列和期望；

（2）好成绩的取得离不开平时的努力训练，甲、乙、丙三名前锋队员在某次传接球的训练中，球从甲脚下开始，等可能地随机传向另外 2 人中的 1 人，接球者接到球后再等可能地随机传向另外 2 人中的 1 人，如此不停地传下去，假设传出的球都能接住．记第 n 次传球之前球在甲脚下的概率为 p_n，易知 $p_1=1, p_2=0$．

①试证明：$\{p_n-\frac{1}{3}\}$ 为等比数列；

②设第 n 次传球之前球在乙脚下的概率为 q_n，比较 p_{10} 与 q_{10} 的大小．

22.（12 分）

已知函数 $f(x)=ae^x+\cos x+\frac{1}{2}x^2$，其中 a 为实数，e 是自然对数的底数．

（1）当 $a=0$ 时，求曲线 $f(x)$ 在点 $(\frac{\pi}{2}, f(\frac{\pi}{2}))$ 处的切线方程；

（2）若 $g(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数，$g(x)$ 在 $(0,\ \pi)$ 上有两个极值点，求 a 的取值范围．