

蒙城一中 涡阳一中 淮南一中 怀远一中 颍上一中

2023 届高三第二次五校联考

数学试题

命题学校:怀远一中 考试时间:2023 年 5 月 12 日

考生注意:

1. 本试卷满分 150 分,考试时间 120 分钟。
2. 答题前,考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时,请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑;非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答,超出答题区域书写的答案无效,在试题卷、草稿纸上作答无效。

一、选择题:本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $M = \{x \mid |x| = x, x \in \mathbf{R}\}$, 则 $\complement_{\mathbf{R}} M =$
A. $(-\infty, 0)$ B. $(-\infty, 0]$ C. $(0, +\infty)$ D. $[0, +\infty)$
2. 若复数 $z = 1 - i$, 实数 a, b 满足 $z + \frac{b}{a} - a = 0$, 则 $a + b =$
A. 2 B. 4 C. -1 D. -2
3. 已知非零向量 a, b, c 满足 $|a| = 1, (a - b) \cdot (a + b) = -1, a \cdot b = 1, c = -2b$. 则向量 a 与 c 的夹角
A. 45° B. 60° C. 135° D. 150°
4. 图 1 是世界上单口径最大、灵敏度最高的射电望远镜“中国天眼”——500 m 口径抛物面射电望远镜,反射面的主体是一个抛物面(抛物线绕其对称轴旋转所形成的曲面称为抛物面),其边缘距离底部的落差约为 156.25 米,它的一个轴截面开口向上的抛物线 C 的一部分,放入如图 2 所示的平面直角坐标系 xOy 内,已知该抛物线上点 P 到底部水平线(x 轴)距离为 125 m,则点到该抛物线焦点 F 的距离为

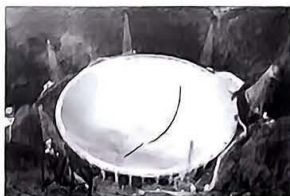


图1

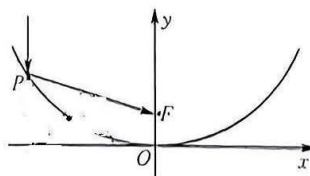


图2

- A. 225 m B. 275 m C. 330 m D. 380 m

【高三数学试题 第 1 页(共 4 页)】

5. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的偶函数, 函数 $g(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, 且 $f(x), g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减, 则

- A. $f(f(2)) > f(f(3))$ B. $f(g(2)) < f(g(3))$
C. $g(g(2)) > g(g(3))$ D. $g(f(2)) < g(f(3))$

6. 若两条直线 $l_1: y=x+m, l_2: y=x+n$ 与圆 $x^2+y^2-2x-2y+t=0$ 的四个交点能构成矩形, 则 $m+n=$

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

7. 已知事件 A, B, C 的概率均不为 0, 则 $P(A)=P(C)$ 的充要条件是

- A. $P(A \cup C) = P(A) + P(C)$ B. $P(AB) = P(BC)$
C. $P(A \cup B) = P(B \cup C)$ D. $P(A\bar{C}) = P(\bar{A}C)$

8. 若 $\exists m \in \mathbf{R}$, 对于 $\forall x \in [a, b]$ 恒有 $2m^2 - 2\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot m + \sin 2x \leq 0$, 则 $b-a$ 的最大值是

- A. $\frac{3\pi}{4}$ B. π C. $\frac{4\pi}{3}$ D. 2π

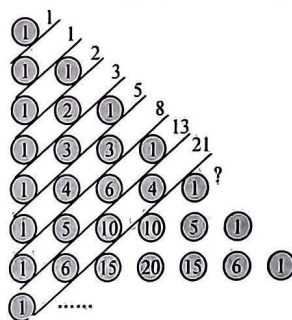
二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 已知 $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x\right)^n = a_0 + a_1(x-1) + \dots + a_n(x-1)^n, n \geq 3, n \in \mathbf{N}^+$, 若 $a_3 \geq a_i (i=0, 1, 2, \dots, n)$, 则 n 的可能值为

- A. 6 B. 8 C. 11 D. 13

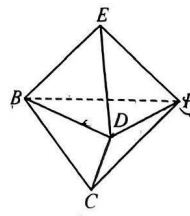
10. 如图, 杨辉三角形中的对角线之和 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... 构成的斐波那契数列经常在自然界中神奇地出现, 例如向日葵花絮中央的管状花和种子从圆心向外, 每一圈的数字就组成这个数列, 等等. 在量子力学中, 粒子纠缠态、量子临界点研究也离不开这个数列, 斐波那契数列 $\{a_n\}$ 的第一项和第二项都是 1, 第三项起每一项都等于它前两项的和, 则

- A. $a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{2022} = a_{2023}$
B. $a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2023} = a_{2024}$
C. $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_{2023}^2 = a_{2023}a_{2024}$
D. $\frac{1}{a_1 a_3} + \frac{1}{a_2 a_4} + \frac{1}{a_3 a_5} + \dots + \frac{1}{a_{2021} a_{2023}} = \frac{1}{a_1 a_2} - \frac{1}{a_{2022} a_{2023}}$



11. 如图, 正三棱锥 $E-PBD$ 和正三棱锥 $C-PBD$ 的侧棱长均为 $\sqrt{2}$, $BD=2$. 若将正三棱锥 $E-PBD$ 绕 BD 旋转, 使得点 E, P 分别旋转至点 A, A_1 处, 且 A, B, C, D 四点共面, 点 A, C 分别位于 BD 两侧, 则

- A. $PA \perp BD$
B. $PA_1 \parallel BD$
C. 多面体 PA_1ABCD 的外接球的表面积为 $\sqrt{6}\pi$
D. 点 P 与点 E 旋转运动的轨迹长之比为 $\sqrt{3}$



12. 已知 $\frac{1+\ln \alpha}{\alpha} = \frac{e^{1-\beta}}{\beta} = \frac{e^{\gamma-1}}{\gamma} > 0$, 则

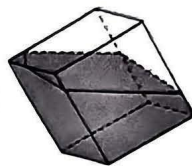
- A. $\alpha \geq \gamma$ B. $\beta \geq \gamma$ C. $2\beta \geq \alpha - \gamma$ D. $2\beta \geq \alpha + \gamma$

【高三数学试题 第 2 页(共 4 页)】

三、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分。

13. 在某地 A, B, C 三个县区爆发了流感, 这三个地区分别 3%, 2%, 4% 的人患了流感. 若 A, B, C 三个县区的人数比分别为 4 : 3 : 3, 先从这三个地区中任意选取一个人, 这个人患流感的概率是_____.

14. 如图, 一个棱长 6 分米的正方体形封闭容器中盛有 V 升的水(没有盛满), 若将该容器任意放置均不能使容器内水平面呈三角形, 写出的一个可能取值:_____.



15. 已知 $F_1(c, 0), F_2(-c, 0)$ 分别是双曲线 $\tau: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点, 点 P 在双曲线上, $PF_1 \perp PF_2$, 圆 $O: x^2 + y^2 = 3c^2$, 直线 PF_1 与圆 O 相交于 A, C 两点, 直线 PF_2 与圆 O 相交于 B, D 两点. 若四边形 ABCD 的面积为 $\sqrt{15}b^2$, 则 τ 的离心率为_____.

16. 完美数(Perfect number)是一类特殊的自然数, 它的所有真因数(除自身之外的正因数)的和恰好等于它本身, 寻找“完美数”用到函数 $\sigma(n): n \in \mathbb{N}^*, \sigma(n)$ 为 n 的所有真因数之和, 如 $\sigma(28) = 1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$, 28 是一个“完美数”, 则再写出一个“完美数”为_____ ; $\sigma(2160) =$ _____.

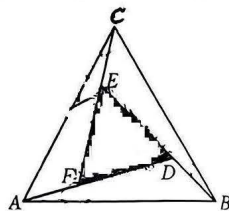
四、解答题:本题共6小题,共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10分)

我国汉代数学家赵爽为了证明勾股定理, 创造了“勾股圆方图”, 后人称其为“赵爽弦图”, 类比“赵爽弦图”. 类比赵爽弦图, 用 3 个全等的小三角形拼成了如图所示的等边 $\triangle ABC$, 若

$$DF = 2, \sin \angle BAD = \frac{3\sqrt{3}}{14}.$$

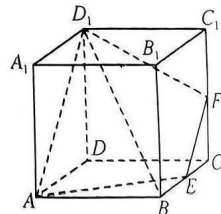
- (1) 求 $\sin \angle CAF$;
- (2) 求 $\triangle ABC$ 的面积.



8. (12分)

已知棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F 分别是棱 BC, CC_1 的中点.

- (1) 求多面体 $CEFADD_1$ 的体积;
- (2) 求直线 BD_1 和平面 $AEFD_1$ 所成角的正弦值.



(12分)

甲、乙、丙三个小学生相互抛沙包, 第一次由甲抛出, 每次抛出时, 抛沙包者等可能的将沙包抛给另外两个人中的任何一个, 设第 $n (n \in \mathbb{N}^*)$ 次抛沙包后沙包在甲手中的方法数为 a_n , 在丙手中的方法数为 b_n .

- (1) 求证: 数列 $\{a_{n+1} + a_n\}$ 为等比数列, 并求出 $\{a_n\}$ 的通项;
- (2) 求证: 当 n 为偶数时, $a_n > b_n$.

20. (12分)

为调查某地区植被覆盖面积 x (单位: 公顷) 和野生动物数量 y 的关系, 某研究小组将该地区等面积花费为400个区块, 从中随机抽取40个区块, 得到样本数据 (x_i, y_i) ($i=1, 2, \dots, 40$), 部分数据如下:

x	...	2.7	3.6	3.2	3.9	...
y	...	50.6	53.7	52.1	54.3	...

经计算得: $\sum_{i=1}^{40} x_i = 160, \sum_{i=1}^{40} y_i = 2400, \sum_{i=1}^{40} (x_i - \bar{x})^2 = 160, \sum_{i=1}^{40} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 1280.$

(1) 利用最小二乘估计建立 y 关于 x 的线性回归方程;

(2) 该小组又利用这组数据建立了 x 关于 y 的线性回归方程, 并把这两条拟合直线画在同一坐标系 xOy 下, 横坐标 x , 纵坐标 y 的意义与植被覆盖面积 x 和野生动物数量 y 一致. 设前者与后者的斜率分别为 k_1, k_2 , 比较 k_1, k_2 的大小关系, 并证明.

附: y 关于 x 的回归方程 $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$ 中, 斜率和截距的最小二乘估计公式分别为: $\hat{b} =$

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \bar{x}. \text{ 线性相关系数 } r = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sqrt{(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2)(\sum_{i=1}^n y_i^2 - n \bar{y}^2)}}$$

21. (12分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点 F_1 与圆 $x^2 + y^2 + 2\sqrt{3}x = 0$ 的圆心重合, 过右焦点 F_2 的直线与 C 交于 A, B 两点, $\triangle ABF_1$ 的周长为 8.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 若 C 上存在 M, N 两点关于直线 $l: 2kx - 2y + 3 = 0$ 对称, 且 $OM \perp ON$ (O 为坐标原点), 求 k 的值.

22. (12分)

已知正实数 $0 < a \leq \frac{1}{2} \leq b < 1$, 函数 $f(x) = a^x + b^{1-x}, x \in [0, 1], g(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.

(1) 若 $a + b = 1$, 求证: $g(b) \leq 0$;

(2) 求证: 对任意正实数 $m, n, m + n = 1$, 有 $m^n + n^m \leq \sqrt{m} + \sqrt{n} \leq m^m + n^n$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

