厦门一中海沧校区 2024 届高三年数学 9 月月考卷

2023.9.1

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

1. 已知集合 $M=\{x|x^2-x-2\le 0\}$，$N=\{x|y=\sqrt{x+2}+\sqrt{1-x}\}$，则 $M\cup N=$（　　）

A. $[-2,2]$　　B. $[-1,1]$　　C. $[-2,1]$　　D. $[-1,2]$

【答案】A

【解析】

【分析】求出集合 M、N，利用并集的定义可求得集合 $M\cup N$.

【详解】由 $M=\{x|x^2-x-2\le 0\}=[-1,2]$，$N=\{x|y=\sqrt{x+2}+\sqrt{1-x}\}=\left\{x\left|\begin{cases}x+2\ge 0\\1-x\ge 0\end{cases}\right.\right\}=[-2,1]$，

故 $M\cup N=[-2,2]$.

故选：A.

2. 已知复数 z 满足 $(1-\mathrm{i})z=1+\mathrm{i}$，则 $z=$（　　）

A. $-\mathrm{i}$　　B. i　　C. $1-\mathrm{i}$　　D. $1+\mathrm{i}$

【答案】B

【解析】

【分析】利用复数的除法化简计算即可.

【详解】由 $(1-\mathrm{i})z=1+\mathrm{i}$，

则 $z=\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\dfrac{(1+\mathrm{i})^2}{2}=\dfrac{1+2\mathrm{i}+\mathrm{i}^2}{2}=\mathrm{i}$.

故选：B.

3. 从长度为 $2,4,6,8,10$ 的 5 条线段中任取 3 条，则这 3 条线段能构成一个三角形的概率是（　　）

A. $\dfrac{3}{10}$　　B. $\dfrac{3}{5}$　　C. $\dfrac{3}{8}$　　D. $\dfrac{1}{3}$

【答案】A

【解析】

【分析】利用列举法，列出 5 条线段中任取 3 条线段的所有情况，然后找出能构成三角形的情况，再利用古典概型的概率公式求解即可.

【详解】从 5 条线段中任取 3 条，可能的情况有：$(2,4,6)$，$(2,4,8)$，$(2,4,10)$，$(2,6,8)$，$(2,6,10)$，

$(2,8,10)$，$(4,6,8)$，$(4,6,10)$，$(4,8,10)$，$(6,8,10)$共有 10 种可能，

其中，能构成三角形的只有$(4,6,8)$，$(4,8,10)$，$(6,8,10)$共 3 种可能，

所以能构成三角形的概率为$\frac{3}{10}$.

故选：A.

4. 已知关于x的不等式$ax^2+bx+1>0$的解集为$(-\infty,m)\cup\left(\frac{1}{m},+\infty\right)$，其中$m<0$，则$\frac{b}{a}+\frac{2}{b}$的最小值为（　　）

A. -2　　B. 2　　C. $2\sqrt{2}$　　D. 3

【答案】D

【解析】

【分析】由题意，得$a>0$，且m，$\frac{1}{m}$是方程$ax^2+bx+1=0$的两根，由韦达定理$m\cdot\frac{1}{m}=\frac{1}{a}$，解得$a$=1；$m+\frac{1}{m}=-\frac{b}{a}=-b$，由基本不等式得$b=-\left(m+\frac{1}{m}\right)\geq 2$，从而可得$\frac{b}{a}+\frac{2}{b}=b+\frac{2}{b}$，利用对勾函数性质可求解.

【详解】因为$ax^2+bx+4>0$的解集为$(-\infty,m)\cup\left(\frac{1}{m},+\infty\right)$，

所以$a>0$，且m，$\frac{1}{m}$是方程$ax^2+bx+1=0$的两根，

$\therefore m\cdot\frac{1}{m}=\frac{1}{a}$，得$a$=1；$\therefore m+\frac{1}{m}=-\frac{b}{a}=-b$，

即$b=-\left(m+\frac{1}{m}\right)$，当$m<0$时，

$b=-\left(m+\frac{1}{m}\right)=-m+\left(-\frac{1}{m}\right)\geq 2\sqrt{-m\cdot\left(-\frac{1}{m}\right)}=2$，

当且仅当$m=\frac{1}{m}$，即$m=-1$时取等号，

令$f(b)=\frac{b}{a}+\frac{2}{b}=b+\frac{2}{b}(b\geq 2)$，由对勾函数的性质可知函数

$f(b)$在$(2,+\infty)$上单调递增，所以$f(b)\geq f(2)=2+1=3$，

$\frac{b}{a}+\frac{2}{b}$的最小值为 3.

故选：D.

5. 已知把物体放在空气中冷却时，若物体原来的温度是θ_1℃，空气的温度是θ_0℃，则$t$min后物体的温度θ℃满足公式$\theta=\theta_0+(\theta_1-\theta_0)e^{-kt}$（其中$k$是一个随着物体与空气的接触状况而定的正常数）.某天小明同学将温度是80℃的牛奶放在20℃空气中，冷却2min后牛奶的温度是50℃，则下列说法正确的是（　　）

A. $k=\ln 2$

B. $k=2\ln 2$

C. 牛奶的温度降至35℃还需4min

D. 牛奶的温度降至35℃还需2min

【答案】D

【解析】

【分析】运用代入法，结合对数的运算逐一判断即可.

【详解】由$\theta=\theta_0+(\theta_1-\theta_0)e^{-kt}$，得$50=20+(80-20)e^{-2t}$，

故$k=\dfrac{1}{2}\ln 2$，AB错误；

又由$35=20+(80-20)e^{-kt}$，$k=\dfrac{1}{2}\ln 2$，得$t=4$，

故牛奶的温度从80℃降至35℃需4min，

从50℃降至35℃还需$4-2=2$min.

故选：D

6. 已知函数$f(x)=x^3-ax^2-bx+a^2$，则“$a+b=7$”是“函数$f(x)$在$x=1$处有极值10”的（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件　　C. 充要条件　　D. 既不充分又不必要条件

【答案】B

【解析】

【分析】求出函数的导函数，依题意可得$\begin{cases}f'(1)=0\\f(1)=10\end{cases}$，即可得到方程组，解得$a$、$b$再检验，最后根据充分条件、必要条件的定义判断即可.

【详解】解：因为$f(x)=x^3-ax^2-bx+a^2$，所以$f'(x)=3x^2-2ax-b$，

所以$\begin{cases}f'(1)=3-2a-b=0\\f(1)=1-a-b+a^2=10\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=3\\b=-3\end{cases}$或$\begin{cases}a=-4\\b=11\end{cases}$；

当$\begin{cases}a=3\\b=-3\end{cases}$时$f(x)=x^3-3x^2+3x+9$，$f'(x)=3x^2-6x+3=3(x-1)^2\geq 0$，即函数在定义域上单调递增，

无极值点，故舍去；

当$\begin{cases}a=-4\\b=11\end{cases}$时$f(x)=x^3+4x^2-11x+16$，$f'(x)=3x^2+8x-11=(3x+11)(x-1)$，

当$x>1$或$x<-\frac{11}{3}$时$f'(x)>0$，当$-\frac{11}{3}<x<1$时$f'(x)<0$，满足函数在x=1处取得极值，

所以$a+b=7$，

所以由$a+b=7$推不出函数$f(x)$在x=1处有极值10，即充分性不成立；

由函数$f(x)$在x=1处有极值10推得出$a+b=7$，即必要性成立；

故“$a+b=7$”是“函数$f(x)$在x=1处有极值10”的必要不充分条件；

故选：B

7. 已知F_1，F_2分别是椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的左，右焦点，$M$，$N$是椭圆$C$上两点，且

$\overrightarrow{MF_1}=2\overrightarrow{F_1N}$，$\overrightarrow{MF_2}\cdot\overrightarrow{MN}=0$，则椭圆$C$的离心率为（　　）

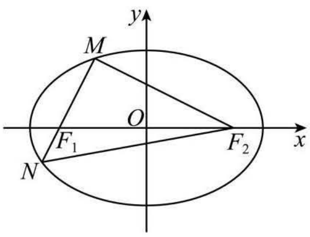
A. $\frac{3}{4}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{7}}{4}$

【答案】C

【解析】

【分析】设$|NF_1|=n$，结合椭圆的定义，在Rt$\triangle MNF_2$中利用勾股定理求得$n=\frac{a}{3}$，Rt$\triangle MF_1F_2$中利用勾股定理求得$36c^2=20a^2$，可求椭圆C的离心率.

【详解】连接NF_2，设$|NF_1|=n$，则$|MF_1|=2n$，$|MF_2|=2a-2n$，$|NF_2|=2a-n$，



在Rt$\triangle MNF_2$中$|MN|^2+|MF_2|^2=|NF_2|^2$，即$(3n)^2+(2a-2n)^2=(2a-n)^2$，

$\therefore 9n^2+4a^2-8an+4n^2=4a^2-4an+n^2$，$\therefore 12n^2=4an$，$n=\dfrac{a}{3}$，

$\therefore |MF_1|=\dfrac{2a}{3}$，$|MF_2|=\dfrac{4a}{3}$，

在$\mathrm{Rt}\triangle MF_1F_2$中，$|MF_1|^2+|MF_2|^2=|F_1F_2|^2$，即$4c^2=\dfrac{4a^2}{9}+\dfrac{16a^2}{9}$，

$\therefore 36c^2=20a^2$，$e^2=\dfrac{20}{36}=\dfrac{5}{9}$，又$\because e\in(0,1)$，$\therefore e=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

故选：C.

8. 记$a=\sqrt[2023]{2022}$，$b=\sqrt[2023]{2023}$，$c=\sqrt[2024]{2023}$，则a，b，c的大小关系是（　　）

A. $a>b>c$　　B. $a>c>b$　　C. $b>c>a$　　D. $b>a>c$

【答案】D

【解析】

【分析】由函数$f(x)=x^{\frac{1}{2023}}$在$\mathbf{R}$上单调递增，可判断$a<b$，再对a、c两边取对数，由函数$g(x)=\dfrac{\ln x}{x+1}$在$(\mathrm{e}^2,+\infty)$单调递减，可得$c<a$，从而得解.

【详解】设$f(x)=x^{\frac{1}{2023}}$，则$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增，

故$f(2022)<f(2023)$，即$a<b$；

由于$\ln a=\dfrac{1}{2023}\ln 2022,\ln c=\dfrac{1}{2024}\ln 2023$，

设$g(x)=\dfrac{\ln x}{x+1}$，$x>\mathrm{e}^2$，

则$g'(x)=\dfrac{\frac{1+x}{x}-\ln x}{(x+1)^2}=\dfrac{1+\frac{1}{x}-\ln x}{(x+1)^2}<\dfrac{2-\ln x}{(x+1)^2}<0$，$(x>\mathrm{e}^2)$，

则$g(x)$在$(\mathrm{e}^2,+\infty)$单调递减，故$g(2023)<g(2022)$，

即$\ln c<\ln a$，则$c<a$；

综上得，$b>a>c$，D正确.

故选：D

二、多选题：本题共4小题，每小题5分，共20分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.

9. 已知一组样本数据x_1、x_2、L、$x_n(n\ge 4)$均为正数，且$x_1<x_2<\cdots<x_n$，若由

$y_k = 2x_k - 1\left(k = 1, 2, \cdots, n\right)$生成一组新的数据 y_1、y_2、$\cdots$、y_n，则这组新数据与原数据的（　　）可能相等

A. 极差　　　　B. 平均数　　　　C. 中位数　　　　D. 标准差

【答案】BC

【解析】

【分析】利用极差的定义可判断 A 选项；利用平均数公式可判断 B 选项；利用中位数的定义可判断 C 选项；利用方差公式可判断 D 选项.

【详解】对于 A 选项，样本数据 x_1、x_2、$\cdots$、$x_n\left(n \geq 4\right)$的极差为 $x_n - x_1$，

样本数据 y_1、y_2、$\cdots$、y_n 的极差为 $y_n - y_1 = \left(2x_n - 1\right) - \left(2x_1 - 1\right) = 2\left(x_n - x_1\right)$，

因为 $x_n - x_1 > 0$，则 $y_n - y_1 = 2\left(x_n - x_1\right) > x_n - x_1$，故 A 错误；

对于 B 选项，设样本数据 x_1、x_2、$\cdots$、$x_n\left(n \geq 4\right)$的平均数为$\overline{x}$，即$\overline{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$，

所以，样本数据 y_1、y_2、$\cdots$、y_n 的平均数为$\overline{y} = \dfrac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n}$

$$= \frac{\left(2x_1 - 1\right) + \left(2x_2 - 1\right) + \cdots + \left(2x_n - 1\right)}{n} = \frac{2\left(x_1 + x_2 + \cdots + x_n\right)}{n} - 1 = 2\overline{x} - 1,$$

由$\overline{y} = 2\overline{x} - 1 = \overline{x}$可知，当$\overline{x} = 1$时，两组样本数据的平均数相等，故 B 正确；

当 $n = 2m - 1\left(m \in \mathbf{N}^*\right)$时，样本数据 x_1、x_2、$\cdots$、$x_n\left(n \geq 4\right)$的中位数为 x_m，

样本数据 y_1、y_2、$\cdots$、y_n 的中位数为 $y_m = 2x_m - 1$，

同理可知当 $x_m = 1$时，中位数相等，

当 $n = 2m\left(m \in \mathbf{N}^*\right)$时，样本数据 x_1、x_2、$\cdots$、$x_n\left(n \geq 4\right)$的中位数为$\dfrac{x_m + x_{m+1}}{2}$，

样本数据 y_1、y_2、$\cdots$、y_n 的中位数为$\dfrac{y_m + y_{m+1}}{2} = \dfrac{\left(2x_m - 1\right) + \left(2x_{m+1} - 1\right)}{2} = 2 \times \dfrac{x_m + x_{m+1}}{2} - 1$

同理可知当$\dfrac{x_m + x_{m+1}}{2} = 1$时，两组数据的中位数相等，故 C 正确；

对于 D 选项，设样本数据 x_1、x_2、$\cdots$、$x_n\left(n \geq 4\right)$的标准差为 s_x，

样本数据 y_1、y_2、$\cdots$、y_n 的标准差为 s_y，

则 $s_x^2 = \dfrac{\left(x_1 - \overline{x}\right)^2 + \left(x_2 - \overline{x}\right)^2 + \cdots + \left(x_n - \overline{x}\right)^2}{n}$，

$$s_y^2=\frac{\left(y_1-\overline{y}\right)^2+\left(y_2-\overline{y}\right)^2+\cdots+\left(y_n-\overline{y}\right)^2}{n}$$

$$=\frac{\left[\left(2x_1-1\right)-\left(2\overline{x}-1\right)\right]^2+\left[\left(2x_2-1\right)-\left(2\overline{x}-1\right)\right]^2+\cdots+\left[\left(2x_n-1\right)-\left(2\overline{x}-1\right)\right]^2}{n}$$

$$=\frac{4\left[\left(x_1-\overline{x}\right)^2+\left(x_2-\overline{x}\right)^2+\cdots+\left(x_n-\overline{x}\right)^2\right]}{n}=4s_x^2,$$

因为$x_1<x_2<\cdots<x_n$，则$s_x=\sqrt{\dfrac{\left(x_1-\overline{x}\right)^2+\left(x_2-\overline{x}\right)^2+\cdots+\left(x_n-\overline{x}\right)^2}{n}}>0$，

故$s_y=2s_x>s_x$，故两组样本数据的标准差不可能相等，故D错误.

故选：BC.

10. 将函数$f\left(x\right)=2\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$的图象向右平移$\dfrac{\pi}{8}$个单位长度得到$y=g\left(x\right)$的图象，则（　　）

A. $y=f\left(x\right)$在$\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$上是减函数

B. $f\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)=f\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)$

C. $y=g\left(x\right)$是奇函数

D. $y=g\left(x\right)-1$在$\left[-\pi,\pi\right]$上有4个零点

【答案】ACD

【解析】

【分析】A选项，代入检验，得到$y=f\left(x\right)$在$\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$上单调递减，A正确；

B选项，计算出$f\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)=2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-2x\right)$，$f\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)=2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+2x\right)$，两者不一定相等，

C选项，根据函数平移变换求出$g\left(x\right)=2\sin 2x$，故C正确；

D选项，令$y=g\left(x\right)-1=2\sin 2x-1=0$，得到$\sin 2x=\dfrac{1}{2}$，求出$\left[-\pi,\pi\right]$上，$x=\dfrac{\pi}{12}$或$\dfrac{5\pi}{12}$或$-\dfrac{7\pi}{12}$或$-\dfrac{11\pi}{12}$，共4个零点，D正确.

【详解】$x\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$时，$2x-\dfrac{\pi}{4}\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right]$，由于$y=2\cos z$在$z\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right]$上单调递减，故$y=f\left(x\right)$在$\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$上单调递减，A正确；

$f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=2\cos\left[2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-\frac{\pi}{4}\right]=2\cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)$，$f\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=2\cos\left[2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\frac{\pi}{4}\right]=2\cos\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)$，

因为$2\cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$，

由于$2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$与$2\cos\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)$不一定相等，

故$f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$与$f\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$不一定相等，B 错误；

$g(x)=2\cos\left[2\left(x-\frac{\pi}{8}\right)-\frac{\pi}{4}\right]=2\sin 2x$，故$y=g(x)$是奇函数，C 正确；

令$y=g(x)-1=2\sin 2x-1=0$，解得：$\sin 2x=\frac{1}{2}$，

$x\in[-\pi,\pi]$，则$2x\in[-2\pi,2\pi]$，则$2x=\frac{\pi}{6}$或$\frac{5\pi}{6}$或$-\frac{7\pi}{6}$或$-\frac{11\pi}{6}$，

解得：$x=\frac{\pi}{12}$或$\frac{5\pi}{12}$或$-\frac{7\pi}{12}$或$-\frac{11\pi}{12}$，共 4 个零点，D 正确.

故选：ACD

11. 已知函数$y=f(x)(x\in\mathbf{R})$的图象是连续不间断的，函数$y=f(x-1)$的图象关于点$(1,1)$对称，在区间$(1,+\infty)$上单调递增.若$f(m\cos\theta+4\cos\theta-2)+f(-4\cos 2\theta)>2$对任意$\theta\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$恒成立，则下列选项中$m$的可能取值有（　　）

A. $2\sqrt{2}-4$　　B. $2-2\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{2}-2$　　D. $\sqrt{2}-4$

【答案】BC

【解析】

【分析】根据函数的对称性和单调性得到函数$f(x)$为 R 上单调递增，进而得到$m\cos\theta+4\cos\theta-2>4\cos 2\theta$，利用参变分离和$\theta$的取值范围求出$m$的取值范围，进而求解.

【详解】由函数$y=f(x-1)$的图象关于点$(1,1)$对称且在区间$(1,+\infty)$上单调递增可得，函数$y=f(x)(x\in\mathbf{R})$的图象关于于$(0,1)$对称，函数$f(x)$为 R 上单调递增，

由$f(m\cos\theta+4\cos\theta-2)+f(-4\cos 2\theta)>2$可得，

$f(m\cos\theta+4\cos\theta-2)+f(-4\cos 2\theta)>f(-4\cos 2\theta)+f(4\cos 2\theta)$，

也即 $f\left(m\cos\theta+4\cos\theta-2\right)>f(4\cos 2\theta)$，

则有 $m\cos\theta+4\cos\theta-2>4\cos 2\theta$ 恒成立，即 $m\cos\theta>4\cos 2\theta-4\cos\theta+2$

因为 $\theta\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$，所以 $\cos\theta\in[0,\frac{\sqrt{2}}{2}]$，

当 $\cos\theta=0$ 时，得到 $0>-2$ 恒成立；

当 $\cos\theta\neq 0$ 时，则有 $m>\frac{4\cos 2\theta+2-4\cos\theta}{\cos\theta}=\frac{8\cos^2\theta-4\cos\theta-2}{\cos\theta}=8\cos\theta-\frac{2}{\cos\theta}-4$，

令 $\cos\theta=t\in(0,\frac{\sqrt{2}}{2}]$，则 $y=8t-\frac{2}{t}-4$，

因为函数 $y=8t-\frac{2}{t}-4$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $t\in(0,\frac{\sqrt{2}}{2}]$，

所以 $y_{\max}=2\sqrt{2}-4$，则 $m>2\sqrt{2}-4$，所以 BC 适合题意，AD 不合题意.

故选：BC.

12. 已知正四面体 $P-ABC$ 的棱长为 2，下列说法正确的是（　　）

A. 正四面体 $P-ABC$ 的外接球表面积为 6π

B. 正四面体 $P-ABC$ 内任意一点到四个面的距离之和为定值

C. 正四面体 $P-ABC$ 的相邻两个面所成二面角的正弦值为 $\frac{1}{3}$

D. 正四面体 $Q-MNG$ 在正四面体 $P-ABC$ 的内部，且可以任意转动，则正四面体 $Q-MNG$ 的体积最大值为 $\frac{2\sqrt{2}}{81}$

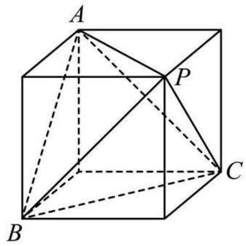
【答案】ABD

【解析】

【分析】根据正四面体的外接球、内切球、体积以及二面角等知识对选项进行分析，从而确定正确答案.

【详解】A.棱长为 2 的正四面体 $P-ABC$ 的外接球与棱长为 $\sqrt{2}$ 的正方体的外接球半径相同，

设为 R，则：$2R=\sqrt{6}$，所以 $S=4\pi R^2=6\pi$，所以 A 对.



B.设正四面体$P-ABC$内任意一点到四个面的距离分别为d_1，d_2，d_3，d_4，

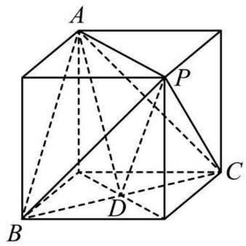
设正四面体$P-ABC$的高为d，由等体积法可得：$\frac{1}{3}S(d_1+d_2+d_3+d_4)=\frac{1}{3}Sd$，

所以$d_1+d_2+d_3+d_4=d$为定值，所以B对.

C.设BC中点为D，连接PD，AD，则$AD\perp BC,PD\perp BC$，

则$\angle PDA$为所求二面角的平面角，$AP=2,PD=AD=\sqrt{3}$，

所以$\cos\angle PDA=\frac{3+3-4}{6}=\frac{1}{3}$，所以正弦值为$\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，所以C错.



D.要使正四面体$Q-MNG$在四面体$P-ABC$的内部，且可以任意转动，

则正四面体$Q-MNG$的外接球在四面体$P-ABC$内切球内部，

当正四面体$Q-MNG$的外接球恰好为四面体$P-ABC$内切球时，

正四面体$Q-MNG$的体积最大值，

由于正四面体的外接球与内切球半径之比为$\frac{1}{3}$，

所以正四面体$Q-MNG$的外接球半径为$\frac{\sqrt{6}}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{6}}{6}$，

设正四面体$Q-MNG$的边长为a，则$\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)=2\times\frac{\sqrt{6}}{6}$，所以$a=\frac{2}{3}$，

故体积$V=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3=\frac{2\sqrt{2}}{81}$，所以D对.

故选：ABD

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. $(x-2y)^5$的展开式中x^2y^3的系数为__.

【答案】-80

【解析】

【分析】根据二项式展开式的通项公式，直接计算即可得到结果.

【详解】展开式的通项公式为$T_{r+1}=C_5^r x^{5-r}(-2y)^r=C_5^r\cdot(-2)^r x^{5-r}y^r$，

令$5-r=2$，则$r=3$，所以x^2y^3的系数为$C_5^3\cdot(-2)^3=-80$.

故答案为: -80

14. 已知函数$f(x)=\lg(|x|+1)+2^x+2^{-x}$，则使不等式$f(x+1)<f(2x)$成立的$x$的取值范围是

__________.

【答案】$(-\infty,-\frac{1}{3})\cup(1,+\infty)$

【解析】

【分析】分析给定函数$f(x)$的性质，利用函数的奇偶性、单调性解不等式得出结果.

【详解】函数$f(x)=\lg(|x|+1)+2^x+2^{-x}$定义域为**R**，

显然有$f(-x)=\lg(|-x|+1)+2^{-x}+2^x=f(x)$，即函数$f(x)$是偶函数，

当$x\geq 0$时，$f(x)=\lg(x+1)+2^x+2^{-x}$，令$g(x)=2^x+2^{-x}(x\geq 0)$，

$\forall x_1,x_2\in[0,+\infty)$，$x_1<x_2$，$g(x_1)-g(x_2)=2^{x_1}+2^{-x_1}-2^{x_2}-2^{-x_2}=(2^{x_1}-2^{x_2})(1-\frac{1}{2^{x_1}\cdot 2^{x_2}})$，

因$0\leq x_1<x_2$，则$1<2^{x_1}<2^{x_2}$，即$2^{x_1}-2^{x_2}<0$，$1-\frac{1}{2^{x_1}\cdot 2^{x_2}}>0$，有$g(x_1)<g(x_2)$，$g(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增，

又$y=\lg(x+1)$在$[0,+\infty)$上单调递增，因此，$f(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增，

于是得$f(x+1)<f(2x)\Leftrightarrow f(|x+1|)<f(|2x|)\Leftrightarrow|x+1|<|2x|$，

解得$x<-\frac{1}{3}$或$x>1$，

所以不等式 $f(x+1)<f(2x)$ 成立的 x 的取值范围是 $(-\infty,-\frac{1}{3})\cup(1,+\infty)$.

故答案为：$(-\infty,-\frac{1}{3})\cup(1,+\infty)$.

15. 若定义域为 R 的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=f(x+1)+f(x-1)$，且 $f(1)=2$，则 $f(2024)=$________.

【答案】2

【解析】

【分析】利用赋值法及奇函数的定义，结合函数的周期性即可求解.

【详解】由 $f(x)=f(x+1)+f(x-1)$，得 $f(x+1)=f(x+2)+f(x)$，

所以 $f(x)-f(x-1)=f(x+2)+f(x)$，即 $-f(x-1)=f(x+2)$，于是有 $-f(x)=f(x+3)$，

所以 $-f(x+3)=f(x+6)$，即 $f(x)=f(x+6)$.

所以函数 $f(x)$ 的周期为 6.

因为 $f(x)$ 是定义域为 R 的奇函数，

所以 $f(-0)=-f(0)$，即 $f(0)=0$.

令 $x=1$，则 $f(1)=f(2)+f(0)$，解得 $f(2)=f(1)-f(0)=2$，

所以 $f(2024)=f(337\times6+2)=f(2)=2$.

故答案为：2.

16. 已知 e $O_1:x^2+(y-2)^2=1$， e $O_2:(x-3)^2+(y-6)^2=9$，过 x 轴上一点 P 分别作两圆的切线，切点分别是 M，N，当 $|PM|+|PN|$ 取到最小值时，点 P 坐标为______.

【答案】$\left(\frac{3}{4},0\right)$

【解析】

【分析】$P(t,0)$，则 $|PM|+|PN|=\sqrt{t^2+3}+\sqrt{(t-3)^2+27}=\sqrt{(t-0)^2+[0-(-\sqrt{3})]^2}+\sqrt{(t-3)^2+(0-3\sqrt{3})^2}$，可看成点 P 到两定点 $A(0,-\sqrt{3})$，$B(3,3\sqrt{3})$ 的距离和，而 A,B 两点在 x 轴的两侧，所以 A,B 连线与 x 轴的交点就是所求点 P.

【详解】e $O_1:x^2+(y-2)^2=1$ 的圆心为 $O_1(0,2)$，半径 $r_1=1$，

$\odot O_2:(x-3)^2+(y-6)^2=9$ 的圆心为 $O_2(3,6)$，半径 $r_2=3$，

设 $P(t,0)$，则 $|PM|=\sqrt{|PO_1|^2-1}=\sqrt{t^2+4-1}=\sqrt{t^2+3}$，

$|PN|=\sqrt{|PO_2|^2-3^2}=\sqrt{(t-3)^2+6^2-9}=\sqrt{(t-3)^2+27}$

所以 $|PM|+|PN|=\sqrt{t^2+3}+\sqrt{(t-3)^2+27}=\sqrt{(t-0)^2+[0-(-\sqrt{3})]^2}+\sqrt{(t-3)^2+(0-3\sqrt{3})^2}$，

取 $A(0,-\sqrt{3})$，$B(3,3\sqrt{3})$

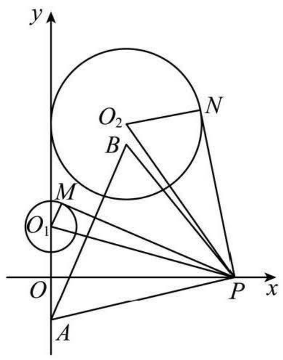
则 $|PM|+|PN|=|PA|+|PB|\geq|AB|=\sqrt{3^2+\left(4\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{57}$，

当 P,A,B 三点共线时取等号，

此时 AB 直线：$y+\sqrt{3}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}(x-0)$

令 $y=0$，则 $x=\dfrac{3}{4}$，$\therefore P\left(\dfrac{3}{4},0\right)$，

故答案为：$\left(\dfrac{3}{4},0\right)$



【点睛】关键点点睛：此题考查直线与圆的位置关系，考查距离公式的应用，解题的关键是将问题转化为点 P 到两定点 $A(0,-\sqrt{3})$，$B(3,3\sqrt{3})$ 的距离和的最小值，结合图形求解，考查数形结合的思想，属于较难题.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 西梅以“梅”为名，实际上不是梅子，而是李子，中文正规名叫“欧洲李”，素有“奇迹水果”的美誉.因此，每批西梅进入市场之前，会对其进行检测，现随机抽取了 10 箱西梅，其中有 4 箱测定为一等品.

（1）现从这 10 箱中任取 3 箱，求恰好有 1 箱是一等品的概率；

（2）以这 10 箱的检测结果来估计这一批西梅的情况，若从这一批西梅中随机抽取 3 箱，记 ξ 表示抽到一

等品的箱数，求ξ的分布列和期望.

【答案】(1) $\frac{1}{2}$

(2) 分布列见解析，$E(\xi)=\frac{6}{5}$

【解析】

【分析】(1) 根据古典概型概率计算公式以及组合数的计算求得所求概率.

(2) 利用二项分布的知识求得分布列并求得数学期望.

【小问1详解】

设抽取的3箱西梅恰有1箱是一等品为事件A_1，

则$P(A_1)=\frac{C_4^1C_6^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{2}$；因此，从这10箱中任取3箱，恰好有1箱是一等品的概率为$\frac{1}{2}$.

【小问2详解】

由题意可知，从这10箱中随机抽取1箱恰好是一等品的概率$\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$，

由题可知ξ的所有可能取值为0，1，2，3，则$\xi\sim B\left(3,\frac{2}{5}\right)$

$P(\xi=0)=C_3^0\left(\frac{2}{5}\right)^0\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{27}{125}$，$P(\xi=1)=C_3^1\left(\frac{2}{5}\right)^1\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{54}{125}$，

$P(\xi=2)=C_3^2\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^1=\frac{36}{125}$，$P(\xi=3)=C_3^3\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(\frac{3}{5}\right)^0=\frac{8}{125}$，

所以ξ的分布列为

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{27}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$

$E(\xi)=3\times\frac{2}{5}=\frac{6}{5}$.

18. 在$\triangle ABC$中，角A，B，C的对边分别为a，b，c，且$a\cos B+(b+2c)\cos A=0$.

(1) 求A；

(2) 若点D在边BC上，$BD=2DC$，$AD=2$，$c=2b$，求$\triangle ABC$的面积.

【答案】(1) $\dfrac{2\pi}{3}$

(2) $\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$

【解析】

【分析】(1) 由正弦定理边化角可得，$\sin A\cos B+\left(\sin B+2\sin C\right)\cos A=0$，然后化简即可得出 $\cos A=-\dfrac{1}{2}$. 根据A的范围即可得出答案；

(2) 设 $CD=x$，则 $BD=2x$，然后在 $\triangle ADB$ 和 $\triangle ADC$ 中，根据余弦定理推得 $b^2=x^2+2$. 在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理可得 $9x^2=7b^2$.联立可解得 $b=3$，$c=2b=6$，然后根据面积公式即可得出答案.

【小问1详解】

由正弦定理边化角可得，$\sin A\cos B+\left(\sin B+2\sin C\right)\cos A=0$，

整理可得，$\sin\left(A+B\right)+2\sin C\cos A=0$.

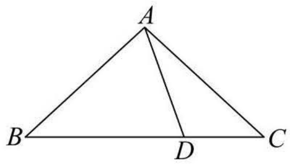
因为 $\sin\left(A+B\right)=\sin\left(\pi-C\right)=\sin C$，$\sin C\neq 0$，

所以有 $2\cos A+1=0$，

所以 $\cos A=-\dfrac{1}{2}$.

因为 $0<A<\pi$，所以 $A=\dfrac{2\pi}{3}$.

【小问2详解】



设 $CD=x$，则 $BD=2x$，

在 $\triangle ADB$ 中，有 $\cos\angle ADB=\dfrac{AD^2+BD^2-AB^2}{2AD\times BD}=\dfrac{4+4x^2-c^2}{8x}$.

在 $\triangle ADC$ 中，有 $\cos\angle ADC=\dfrac{AD^2+CD^2-AC^2}{2AD\times CD}=\dfrac{4+x^2-b^2}{4x}$.

又 $\angle ADB+\angle ADC=\pi$，所以 $\cos\angle ADB=-\cos\angle ADC$，

所以有 $c^2=6x^2-2b^2+12$.

又$c=2b$，所以$b^2=x^2+2$.

在$\triangle ABC$中，由余弦定理可得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.

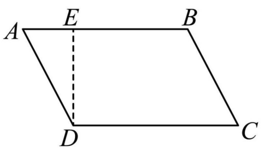
又$a=3x$，$c=2b$，$A=\dfrac{2\pi}{3}$，

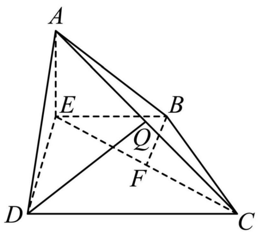
所以有$9x^2=b^2+4b^2-4b^2\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=7b^2$.

联立$\begin{cases}b^2=x^2+2\\9x^2=7b^2\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=\sqrt{7}\\b=3\end{cases}$，所以$c=2b=6$，

所以，$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times3\times6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$.

19. 在平行四边形$ABCD$中，$AB=3\sqrt{2}$，$BC=2\sqrt{2}$，$\angle ABC=\dfrac{2\pi}{3}$，过$D$点作$DE\perp AB$于$E$，以$DE$为轴，将$\triangledown ADE$向上翻折使平面$ADE\perp$平面$BCDE$，连接$CE$，$F$点为线段$CE$的中点，$Q$为线段$AC$上一点.





（1）证明：$BF\perp AC$；

（2）若二面角$A-DQ-E$的余弦值为$\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{37}}$，求$\dfrac{CQ}{CA}$的值.

【答案】（1）证明见解析

（2）$\dfrac{CQ}{CA}=\dfrac{1}{3}$

【解析】

【分析】（1）由平面与平面垂直的性质以及直线与平面垂直的判定定理即可得证；

（2）建立空间直角坐标系，利用空间向量法即可求出答案.

【小问1详解】

证明：$\because$面$ADE\perp$面$BCDE$，面$ADE\cap$面$BCDE=DE$，且$AE\perp DE$，

$\therefore AE\perp$面$BCDE$，又$BF\subset$面$BCDE$，$\therefore AE\perp BF$，又在$\mathrm{Rt}\triangle AED$中，$AE=\dfrac{1}{2}AD=\dfrac{1}{2}BC=\sqrt{2}$，

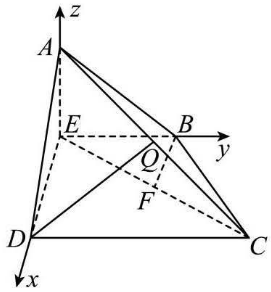
则 $BE=2\sqrt{2}=BC$，

又 F 为 CE 中点，故 $BF\perp EC$，且 $AE\cap EC=E, AE, EC\subset$ 面 AEC,，

则 $BF\perp$ 面 AEC，又 $AC\subset$ 面 AEC，所以 $BF\perp AC$.

【小问 2 详解】

由（1）知，ED，EB，EA 互相垂直，分别以 ED，EB，EA 为 x，y，z 轴非负半轴建立如图所示的空间直角坐标系，



其中 $E(0,0,0)$，$A(0,0,\sqrt{2})$，$D(\sqrt{6},0,0)$，$C(\sqrt{6},3\sqrt{2},0)$，则 $\overrightarrow{ED}=(\sqrt{6},0,0)$，$\overrightarrow{DC}=(0,3\sqrt{2},0)$，

$\overrightarrow{DA}=(-\sqrt{6},0,\sqrt{2})$，

不妨设 $\overrightarrow{CQ}=\lambda\overrightarrow{CA},(0\le\lambda\le1)$，则 $\overrightarrow{DQ}=(1-\lambda)\overrightarrow{DC}+\lambda\overrightarrow{DA}=(-\sqrt{6}\lambda,3\sqrt{2}(1-\lambda),\sqrt{2}\lambda)$，

再设 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$，$\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$ 分别是面 ADQ、面 EDQ 的法向量，

则分别满足 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{DA}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{DC}=0\end{cases}$, 与 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{ED}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{DQ}=0,\end{cases}$

令 $x_1=1$，$y_2=\lambda$，得到 $\vec{m}=(1,0,\sqrt{3})$，$\vec{n}=(0,\lambda,3(\lambda-1))$.

由题意知，$\left|\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle\right|=\dfrac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\dfrac{\left|3\sqrt{3}(1-\lambda)\right|}{2\sqrt{\lambda^2+9(\lambda-1)^2}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{37}}$，解得 $\lambda=\dfrac{1}{3}$，即 $\dfrac{CQ}{CA}=\dfrac{1}{3}$.

20. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1>0$，$a_{n+1}=\begin{cases}\log_2 a_n, n=2k-1, k\in\mathrm{N}^*\\ 2^{a_n+2}, n=2k, k\in\mathrm{N}^*\end{cases}$.

（1）判断数列 $\{a_{2n-1}\}$ 是否是等比数列？若是，给出证明；否则，请说明理由；

（2）若数列 $\{a_n\}$ 的前 10 项和为 361，记 $b_n=\dfrac{1}{(\log_2 a_{2n+1})\cdot a_{2n+2}}$，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，求证：$T_n<\dfrac{1}{2}$.

【答案】（1）数列 $\{a_{2n-1}\}$ 成等比数列，证明见解析

（2）证明见解析

【解析】

【分析】（1）推导出 $a_{2n+1}=2^{a_{2n}+2}=2^{\log_2 a_{2n-1}+2}=4a_{2n-1}$，得到结论；

（2）先得到 $a_{2n-1}=a_1\cdot 4^{n-1}$，$a_{2n}=2(n-1)+\log_2 a_1$，从而得到 $S_{10}=341a_1+5\log_2 a_1+20$，令 $f(x)=341x+5\log_2 x+20$，得到函数单调递增，且由特殊点函数值得到 $a_1=1$，$b_n=\dfrac{1}{4n^2}$，求出 $T_1=\dfrac{1}{4}<\dfrac{7}{4}$，当 $n\ge 2$ 时，利用裂项相消法求和，得到 $T_n<\dfrac{1}{2}$.

【小问 1 详解】

数列 $\{a_{2n-1}\}$ 成等比数列，证明如下：

根据 $a_{n+1}=\begin{cases}\log_2 a_n, n=2k-1, k\in \mathrm{N}^*\\ 2^{a_n+2}, n=2k, k\in \mathrm{N}^*\end{cases}$ 得，

$a_{2n+1}=2^{a_{2n}+2}=2^{\log_2 a_{2n-1}+2}=2^2 a_{2n-1}=4a_{2n-1}$；

$\because a_1>0$，$\therefore a_{2n-1}>0$，$\dfrac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}}=4$，即数列 $\{a_{2n-1}\}$ 成等比数列.

【小问 2 详解】

由（1）得，$a_{2n-1}=a_1\cdot 4^{n-1}$，$a_{2n}=\log_2 a_{2n-1}=2(n-1)+\log_2 a_1$，

故 $S_{10}=a_1\left(4^0+4^1+4^2+4^3+4^4\right)+5\log_2 a_1+2\times(0+1+2+3+4)$

$=341a_1+5\log_2 a_1+20$，

由 $S_{10}=361$，得 $341a_1+5\log_2 a_1+20=361$.

令 $f(x)=341x+5\log_2 x+20$，

当 $x>0$ 时，$f(x)=341x+5\log_2 x+20$ 单调递增，且 $f(1)=361=f\left(a_1\right)$，

故 $a_1=1$，$a_{2n+1}=4^n=2^{2n}$，$a_{2n+2}=\log_2 a_1+2n=2n$，

$\therefore b_n=\dfrac{1}{\left(\log_2 a_{2n+1}\right)\cdot a_{2n+2}}=\dfrac{1}{4n^2}$，$T_1=b_1=\dfrac{1}{4}<\dfrac{1}{2}$，

当 $n\ge 2$ 时，$b_n=\dfrac{1}{4n^2}<\dfrac{1}{4(n-1)n}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}\right)$

$\therefore T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n<\dfrac{1}{4}\left[1+\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}\right)\right]$

$=\frac{1}{4}\left(2-\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{4}\times 2=\frac{1}{2}$，

综上，知$T_n<\frac{1}{2}$

21. 已知函数$f(x)=\left(\frac{1}{2}x^2-ax\right)\ln x-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}ax$.

（1）讨论函数$f(x)$的极值点；

（2）若$f(x)$极大值大于1，求a的取值范围.

【答案】（1）答案不唯一，具体见解析（2）$a\in(1,\sqrt{e})\cup(\sqrt{e},+\infty)$

【解析】

【分析】（1）求出导函数$f'(x)=(x-a)\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)$，分类讨论明确函数的单调性，从而得到函数$f(x)$的极值点；

（2）由（1），$a\le 0$和$a=\sqrt{e}$时，无极大值，不成立；当$a>\sqrt{e}$时，当$0<a<\sqrt{e}$时分别利用$f(x)$极大值大于1，建立不等关系即可.

【详解】$f'(x)=(x-a)\ln x+\frac{1}{2}x-a-x+\frac{3}{2}a=(x-a)\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)$

（1）$a\le 0$时，$f(x)$在$(0,\sqrt{e})$单减，$(\sqrt{e},+\infty)$单增，极小值点为$x=\sqrt{e}$；

$0<a<\sqrt{e}$时，$f(x)$在$(0,a)$单增，$(a,\sqrt{e})$单减，$(\sqrt{e},+\infty)$单增，极小值点为$x=\sqrt{e}$，极大值点为$x=a$；

$a=\sqrt{e}$时，$f(x)$在$(0,+\infty)$单增，无极值点；

$a>\sqrt{e}$时，$f(x)$在$(0,\sqrt{e})$单增，$(\sqrt{e},a)$单减，$(a,+\infty)$单增，极小值点为$x=a$，极大值点为$x=\sqrt{e}$.

（2）由（1），$a\le 0$和$a=\sqrt{e}$时，无极大值，不成立

当$a>\sqrt{e}$时，极大值$f(\sqrt{e})=a\sqrt{e}-\frac{e}{4}>1$，解得$a>\frac{\sqrt{e}}{4}+\frac{1}{\sqrt{e}}$，

由于$\frac{\sqrt{e}}{4}+\frac{1}{\sqrt{e}}-\sqrt{e}=\frac{1}{\sqrt{e}}-\frac{3\sqrt{e}}{4}=\frac{1}{\sqrt{e}}\left(1-\frac{3e}{4}\right)<0$，所以$a>\sqrt{e}$.

当$0<a<\sqrt{e}$时，极大值$f(a)=\frac{1}{2}a^2(2-\ln a)>1$，得$2-\ln a>\frac{2}{a^2}$，令$t=a^2$，则$g(t)=2-\frac{1}{2}\ln t-\frac{2}{t}$

$g'(t)=-\frac{1}{2t}+\frac{2}{t^2}=\frac{4-t}{2t^2}$，$g(t)$在$t=4$取得极大值$g(4)>0$，且$g(1)=0$.

而 $a<\sqrt{e}$，$t<e$，而 $g(t)$ 在 $(1,e)$ 单增，所以 $g(t)>0$ 解为 $(1,e)$，则 $a\in(1,\sqrt{e})$.

综上 $a\in(1,\sqrt{e})\cup(\sqrt{e},+\infty)$.

【点睛】本小题主要考查函数的求导法则、函数的极值点与极值的概念等基础知识，考查推理论证能力、运算求解能力与创新意识，考查函数与方程思想、化归与转化思想、数形结合思想、分类与整合思想，考查数学抽象、直观想象、数学运算、逻辑推理等核心素养，体现综合性、应用性与创新性.

22. 已知双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ 与直线 $l:y=kx+m(k\neq\pm\frac{3}{2})$ 有唯一的公共点 M.

（1）若点 $N(2,9)$ 在直线 l 上，求直线 l 的方程；

（2）过点 M 且与直线 l 垂直的直线分别交 x 轴于 $A(x_1,0)$，y 轴于 $B(0,y_1)$ 两点.是否存在定点 G，H，使得 M 在双曲线上运动时，动点 $P(x_1,y_1)$ 使得 $\left||PG|-|PH|\right|$ 为定值.

【答案】（1） $y=\frac{5}{2}x+4$

（2）存在定点 $G\left(-\frac{13\sqrt{13}}{6},0\right)$，$H\left(\frac{13\sqrt{13}}{6},0\right)$，使得当点 M 运动时，$\left||PG|-|PH|\right|$ 为定值 13

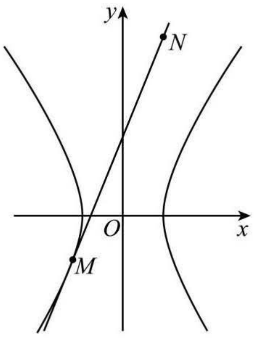
【解析】

【分析】（1）双曲线与直线联立方程组，由判别式为 0 和点 $N(2,9)$ 在直线 l 上，解得 k,m，可求直线 l 的方程；

（2）双曲线与直线联立方程组，求出点 M 坐标，表示出过点 M 且与直线 l 垂直的直线，解得 $A(x_1,0)$，$B(0,y_1)$ 两点，求动点 $P(x_1,y_1)$ 的轨迹方程，由方程确定满足条件的定点 G，H.

【小问 1 详解】

点 $N(2,9)$ 在直线 $l:y=kx+m$ 上，则有 $9=2k+m$，



联立$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1\\ y=kx+m\end{cases}$，则$\left(9-4k^2\right)x^2-8kmx-4m^2-36=0$，

由$9-4k^2\neq 0$，则$\Delta=64k^2m^2-4\left(9-4k^2\right)(-4m^2-36)=0$，可得$m^2=4k^2-9$，

所以：$\left(9-2k\right)^2=4k^2-9$，解得$k=\dfrac{5}{2}$，

当$k=\dfrac{5}{2}$时，$m=4$；所以直线l的方程：$y=\dfrac{5}{2}x+4$

【小问2详解】

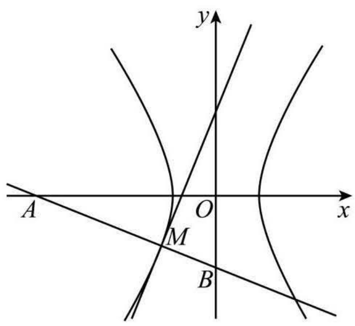
联立$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1\\ y=kx+m\end{cases}$，则$\left(9-4k^2\right)x^2-8kmx-4m^2-36=0$，

因为$k\neq\pm\dfrac{3}{2}$，M是双曲线与直线的唯一公共点，

所以$\Delta=64k^2m^2-4\left(9-4k^2\right)\left(-4m^2-36\right)=0$，化简得$m^2=4k^2-9$，

解得点M的坐标为$\left(\dfrac{4km}{9-4k^2},\dfrac{9m}{9-4k^2}\right)$，即为$\left(\dfrac{4k}{-m},\dfrac{9}{-m}\right)$，

于是，过点M且与l垂直的直线为$y+\dfrac{9}{m}=-\dfrac{1}{k}\left(x+\dfrac{4k}{m}\right)$，



可得$A\left(\dfrac{13k}{-m},0\right)$，$B\left(0,-\dfrac{13}{m}\right)$，$P\left(-\dfrac{13k}{m},-\dfrac{13}{m}\right)$，即$x_1=-\dfrac{13k}{m}$，$y_1=-\dfrac{13}{m}$，

于是$x_1^2=\dfrac{169k^2}{m^2}=\dfrac{169}{m^2}\left(\dfrac{m^2+9}{4}\right)=\dfrac{169}{4}\left(1+\dfrac{9}{m^2}\right)=\dfrac{169}{4}\left(1+\dfrac{9}{\left(-\dfrac{13}{y_1}\right)^2}\right)=\dfrac{169}{4}+\dfrac{9}{4}y_1^2$，

即 P 的轨迹方程为：$\dfrac{x^2}{\frac{169}{4}}-\dfrac{y^2}{\frac{169}{9}}=1(y\neq 0)$，由双曲线的定义可知，

存在定点 $G\left(-\dfrac{13\sqrt{13}}{6},0\right)$，$H\left(\dfrac{13\sqrt{13}}{6},0\right)$，使得当点 M 运动时，$\left||PG|-|PH|\right|$ 为定值 13.

【点睛】方法点睛：

解答直线与双曲线的题目时，时常把两个曲线的方程联立，消去 x(或 y)建立一元二次方程，然后借助根与系数的关系，并结合题设条件建立有关参变量的等量关系．要强化有关直线与双曲线联立得出一元二次方程后的运算能力，重视根与系数之间的关系、弦长、斜率、三角形的面积等问题．

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。