参考答案：

1．C【详解】因为$z=\mathrm{i}^3=-\mathrm{i}$，所以$\frac{2}{z}-z^2=\frac{2}{-\mathrm{i}}+1=2\mathrm{i}+1=1+2\mathrm{i}$，

所以$\frac{2}{z}-z^2$的共轭复数为$1-2\mathrm{i}$，$|1-2\mathrm{i}|=\sqrt{5}$，

所以$\frac{2}{z}-z^2$的共轭复数的模是$\sqrt{5}$.

2．A【详解】由$\ln(x+1)<2$，可得$0<x+1<\mathrm{e}^2$，则$A=\{x|-1<x<\mathrm{e}^2-1\}$

又$B=\{y\in \mathrm{Z}|y=3\sin x\}=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$，

所以$A\cap B=\{0,1,2,3\}$.

3．A【详解】①若a_1,a_2,a_3成等比数列，则$a_2^2=a_1\cdot a_3$，

所以$(a_1^2+a_2^2)(a_2^2+a_3^2)=(a_1^2+a_1\cdot a_3)(a_1\cdot a_3+a_3^2)=[a_1(a_1+a_3)][(a_1+a_3)a_3]$

$=(a_1+a_3)^2a_1a_3=(a_1+a_3)^2a_2^2=[(a_1+a_3)a_2]^2=(a_1a_2+a_2a_3)^2$；

②若$a_1=a_2=a_3=0$，

满足$(a_1^2+a_2^2)(a_2^2+a_3^2)=(a_1a_2+a_2a_3)^2$，

但是不满足a_1,a_2,a_3成等比数列（因为等比数列中不能含有0）

“a_1,a_2,a_3成等比数列”是“$(a_1^2+a_2^2)(a_2^2+a_3^2)=(a_1a_2+a_2a_3)^2$”的充分不必要条件，

4．D【详解】对于A：根据学生的成绩都在50分到100分之间的频率和为1，可得$10\times(0.005+0.01+0.015+x+0.040)=1$，解得$x=0.03$，故A错误；

对于B：在被抽取的学生中，成绩在区间$[70,80)$的学生数为$10\times0.015\times400=60$人，故B错误；

对于C：估计全校学生的平均成绩为$55\times0.05+65\times0.1+75\times0.15+85\times0.3+95\times0.4=84$分；故C错误.

对于D：全校学生成绩的样本数据的80%分位数约为$90+\frac{0.2}{0.4}\times10=95$分.

故D正确.

5．D【详解】设$\alpha+\frac{\pi}{4}=\beta$，$\beta\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$，则$\alpha=\beta-\frac{\pi}{4}$，$\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=3\cos2\alpha$，

即$\tan\beta=3\cos\left(2\beta-\frac{\pi}{2}\right)=3\sin2\beta$，$\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=6\sin\beta\cos\beta$，$\sin\beta\neq0$，

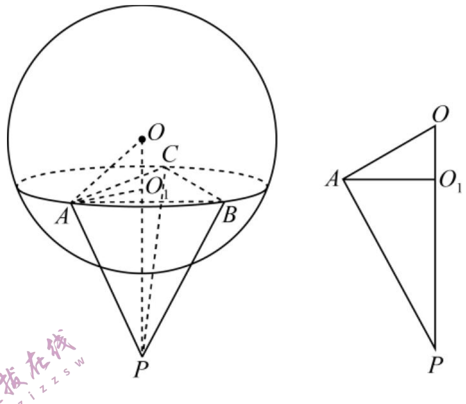
故$\cos^2\beta=\frac{1}{6}$，$\sin2\alpha=\sin\left(2\beta-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos2\beta=1-2\cos^2\beta=\frac{2}{3}$.

6.B【详解】由点M到直线$x-y+2=0$的距离大于m恒成立，可得点M到直线

$x-y+2=0$ 的最近距离大于 m. 因为双曲线的渐近线为 $y=x$，则 $y=x$ 与 $x-y+2=0$

的距离 $d=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ 即为最近距离，则 $m\le\sqrt{2}$，即 $m_{\max}=\sqrt{2}$.

7．C【详解】如图所示，连接 AB,AC,BC，作 $\triangle ABC$ 所在外接圆圆心 O_1，连接 AO_1,AO，设 $PA=x$，由 PA、PB、PC 两两所成的角都为 60° 可得 $AB=AC=BC=x$，因为 O_1 为 $\triangle ABC$ 几何中心，所以 $AO_1=AB\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}AB=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$，易知对 $\triangle PAO_1$ 和 $\triangle POA$，$\angle P=\angle P,\angle PO_1A=\angle PAO=90^\circ$，所以 $\triangle PAO_1\backsim\triangle POA$，所以 $\dfrac{PA}{AO_1}=\dfrac{PO}{AO}$，即 $\dfrac{x}{\frac{\sqrt{3}}{3}x}=\dfrac{PO}{1}$，解得 $PO=\sqrt{3}$.



故选：C

8．C【详解】因为 $f(5x+2)$ 是偶函数，所以 $f(-5x+2)=f(5x+2)$，
两边求导得 $-5f'(-5x+2)=5f'(5x+2)$，即 $-f'(-5x+2)=f'(5x+2)$，
所以 $g(5x+2)=-g(-5x+2)$，即 $g(x)=-g(-x+4)$，
令 $x=2$ 可得 $g(2)=-g(2)$，即 $\boldsymbol{g}(2)=0$，
因为 $g(x+1)$ 为偶函数，
所以 $g(x+1)=g(-x+1)$，即 $g(x)=g(-x+2)$，
所以 $-g(-x+4)=g(-x+2)$，即 $g(x)=-g(x+2)$，
$\therefore g(x+4)=-g(x+2)=g(x)$，所以 4 是函数 $g(x)$ 的一个周期，
所以 $f'(2022)=g(2022)=g(505\times4+2)=g(2)=0$，

9．ACD

10．ABD【详解】因为函数 $f(x)=\sin^2(x+\varphi)=\dfrac{1-\cos(2x+2\varphi)}{2}=-\dfrac{1}{2}\cos(2x+2\varphi)+\dfrac{1}{2}$，

因为函数 $f(x)=\sin^2(x+\varphi)\left(0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的一条对称轴为 $x=\dfrac{\pi}{3}$，

所以 $2\times\dfrac{\pi}{3}+2\varphi=k\pi,(k\in\mathbf{Z})$，解得：$\varphi=\dfrac{k\pi}{2}-\dfrac{\pi}{3},(k\in\mathbf{Z})$，

又因为 $0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $k=1,\varphi=\dfrac{\pi}{6}$，则 $f(x)=-\dfrac{1}{2}\cos(2x+\dfrac{\pi}{3})+\dfrac{1}{2}$，

对于 A，函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\pi$，故选项 A 正确；

对于 B，$f(0)=-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$，故选项 B 正确；

对于 C，因为 $\dfrac{\pi}{3}<x<\dfrac{2\pi}{3}$，所以 $\pi<2x+\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{5\pi}{3}$，因为函数 $y=-\cos t$ 在 $(\pi,\dfrac{5\pi}{3})$ 上单调递减，

故选项C错误；

对于D，因为 $f(x-\frac{\pi}{6})=-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}$，令 $g(x)=|x|-f(x-\frac{\pi}{6})=|x|+\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}$，

当 $x\geq 0$ 时，$g(x)=x+\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}$，则 $g'(x)=1-\sin 2x\geq 0$，所以 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，则 $g(x)\geq g(0)=0$，也即 $x\geq f(x-\frac{\pi}{6})$，

当 $x<0$ 时，$g(x)=-x+\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}$，则 $g'(x)=-1-\sin 2x\leq 0$，所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，则 $g(x)\geq g(0)=0$，也即 $-x\geq f(x-\frac{\pi}{6})$，

综上可知：$|x|\geq f\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ 恒成立，故选项D正确，

11．BCD【详解】由 $a_{n+1}=\left(\sqrt{a_n+2}+1\right)^2-2$，

得 $a_{n+1}+2=\left(\sqrt{a_n+2}+1\right)^2$，即 $\sqrt{a_{n+1}+2}=\sqrt{a_n+2}+1$，又 $a_1=2$，$\sqrt{a_1+2}=2$

所以 $\left\{\sqrt{a_n+2}\right\}$ 是以 2 为首项，1 为公差的等差数列，

所以 $\sqrt{a_n+2}=2+(n-1)\times 1=n+1$，即 $a_n=n^2+2n-1$，

所以 $a_2=7$，故 A 错误，C 正确；

$a_n=(n+1)^2-2$，所以 $\{a_n\}$ 为递增数列，故 B 正确；

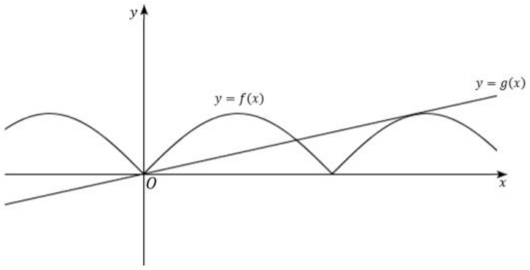
$\frac{1}{a_n+1}=\frac{1}{n^2+2n}=\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$，

所以数列 $\left\{\frac{1}{a_n+1}\right\}$ 的前 n 项和为 $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\dots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)<\frac{3}{4}$，故 D 正确.

12．BCD【详解】对于 A：当 $k=1$ 时，令 $y=\sin x-x$，则 $y=\cos x-1\leq 0$，即函数 $y=\sin x-x$ 有且仅有一个零点为 0，同理易知函数 $y=-\sin x-x$ 有且仅有一个零点为 0，即 $f(x)$ 与 $g(x)$ 也恰有一个公共点，故 A 错误；

对于 B：当 $n=3$ 时，如下图：

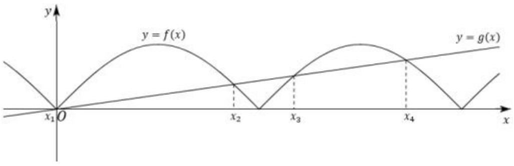


易知在 $x=x_3$，且 $x_3\in(\pi,2\pi)$，$f(x)$ 与 $g(x)$ 图象相切，由当 $x\in(\pi,2\pi)$ 时，$f(x)=-\sin x$，

则 $f'(x)=-\cos x$，$g'(x)=k$，故 $\begin{cases}k=-\cos x_3\\ -\sin x_3=kx_3\end{cases}$，从而 $x_3=\tan x_3$，所以

$\frac{1}{x_3}+x_3=\tan x_3+\frac{1}{\tan x_3}=\frac{1+\tan^2 x_3}{\tan x_3}=\frac{\cos^2 x_3\left(1+\tan^2 x_3\right)}{\cos^2 x_3\tan x_3}=\frac{2}{\sin 2x_3}$，故 B 正确；

对于 C：当$n=4$时，如下图：

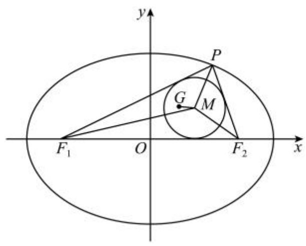


则$x_1=0$，$\pi<x_4<2\pi$，所以$x_1+x_4<2\pi$，又$f(x)$图象关于$x=\pi$对称，结合图象有$x_3-\pi>\pi-x_2$，即有$x_3+x_2>2\pi>x_1+x_4$，故 C 正确；

对于 D：当$k=\frac{2}{2023\pi}$时，由$f(\frac{2023\pi}{2})=g\left(\frac{2023\pi}{2}\right)=1$，$f(x)$与$g(x)$的图象在$y$轴右侧的前 1012 个周期中，每个周期均有 2 个公共点，共有 2024 个公共点，故 D 正确.

13．80　　14．$\frac{\pi}{4}$

15．$\frac{1}{2}$　【详解】设$P\left(x_0,y_0\right)\left(x_0\neq 0\right)$，由于$G$是$\triangle PF_1F_2$的重心，由重心坐标公式可得$G\left(\frac{x_0}{3},\frac{y_0}{3}\right)$，由于$GM//F_1F_2$，所以$M$的纵坐标为$y_M=\frac{y_0}{3}$，



由于M是$\triangle PF_1F_2$的内心，所以$\triangle PF_1F_2$内切圆的半径为$r=\left|\frac{y_0}{3}\right|$，

由椭圆定义得$|PF_1|+|PF_2|=2a,|F_2F_1|=2c$，

$S_{\triangle PF_2F_1}=S_{\triangle MF_2F_1}+S_{\triangle MF_2P}+S_{\triangle MPF_1}\Rightarrow\frac{1}{2}|F_1F_2|\cdot|y_0|=\frac{1}{2}\left(|F_1F_2|+|PF_2|+|F_1P|\right)\frac{|y_0|}{3}$，

$2c|y_0|=(2a+2c)\frac{|y_0|}{3}\Rightarrow a=2c\Rightarrow e=\frac{1}{2}$

16．$2\leq a<3$【详解】因为$f(1)=0$，且函数$f(x)=e^{x-1}+x-2$为单调递增函数，所以1为函数$f(x)=e^{x-1}+x-2$的唯一零点，

设函数$g(x)=x^2-ax-a+3$的零点为b，

又因为函数$f(x)=e^{x-1}+x-2$与$g(x)=x^2-ax-a+3$互为“零点相邻函数”，

所以$|1-b|<1$，解得$0<b<2$，

所以函数$g(x)=x^2-ax-a+3$在$(0,2)$上有零点，

所以$g(0)\cdot g(2)<0$或$\begin{cases}0<\frac{a}{2}<2\\ \Delta=a^2-4(-a+3)=0\end{cases}$或$\begin{cases}0<\frac{a}{2}<2\\ \Delta=a^2-4(-a+3)>0\\ g(0)>0\\ g(2)>0\end{cases}$，

即$\frac{7}{3}<a<3$或$a=2$或$2<a<3$，所以$2\leq a<3$.

17．【详解】（1）由题意得$a_{n+1}-a_n=2\cdot(-1)^n$，

所以$a_{2n}=\left(a_{2n}-a_{2n-1}\right)+\left(a_{2n-1}-a_{2n-2}\right)+\cdots+\left(a_2-a_1\right)+a_1$

$=2\cdot(-1)^{2n-1}+2\cdot(-1)^{2n-2}+\cdots+2\times(-1)^1+1=-2+1=-1$.

（2）设数列$\{a_n\}$的公比为q，

因为$a_{n+1}=a_n+2\cdot(-1)^n$，所以$a_2=a_1-2$，$a_3=a_2+2$，两式相加得$a_3=a_1\cdot q^2=a_1$，所以$q=\pm1$，

当$q=1$时，$a_2=a_1=a_1-2$不成立，所以$q=-1$，$a_2=-a_1=a_1-2$，解得$a_1=1$.

18. 【详解】（1）因为$\tan B=\dfrac{\sin A+\sin C}{\cos A+\cos C}$，即$\dfrac{\sin B}{\cos B}=\dfrac{\sin A+\sin C}{\cos A+\cos C}$，

所以$\sin B\cos A+\sin B\cos C=\cos B\sin A+\cos B\sin C$，

即$\sin B\cos A-\cos B\sin A=\cos B\sin C-\sin B\cos C$，所以$\sin(B-A)=\sin(C-B)$，

因为$0<A<\pi$，$0<B<\pi$，所以$-\pi<B-A<\pi$，同理得$-\pi<C-B<\pi$，

所以$B-A=C-B$或$(B-A)+(C-B)=\pm\pi$（不成立），

所以$2B=A+C$，结合$A+B+C=\pi$得$B=\dfrac{\pi}{3}$.

（2）由余弦定理$\cos B=\dfrac{1}{2}=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$得，$ac=a^2+c^2-b^2$，

所以$ac-a^2=c^2-b^2$，则$\dfrac{a(c-a)}{b^2}=\dfrac{ac-a^2}{b^2}=\dfrac{c^2-b^2}{b^2}=\left(\dfrac{c}{b}\right)^2-1$，

由正弦定理得，$\dfrac{c}{b}=\dfrac{\sin C}{\sin B}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\sin C$，

因为$B=\dfrac{\pi}{3}$，$A+C=\dfrac{2\pi}{3}$，$0<A<\dfrac{\pi}{2}$，$0<C<\dfrac{\pi}{2}$，所以$\dfrac{\pi}{6}<C<\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{1}{2}<\sin C<1$，

所以$\dfrac{c}{b}\in\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$，$\dfrac{a(c-a)}{b^2}\in\left(-\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3}\right)$.

19.【详解】（1）由题意可知：这一枚通关币的使用情况有四种：

①在第一关使用；②在第二关使用；③在第三关使用；④没有使用.

而通过三关的概率依次为：$\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}$，

则李华通过该游戏的概率$P=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{2}$.

（2）购买两枚通关币的费用为200元，报名费为150元，

则收益可能为：$x_1=400-(150+200-100)=150$（未使用通关币过关），

$x_2=400-(150+200-50)=100$（使用1枚通关币且过关），

$x_3=400-(150+200)=50$（使用2枚通关币且过关），

$x_4=-(150+200)=-350$（使用2枚通关币且未过关），

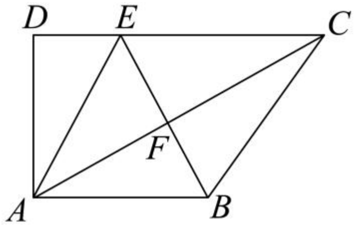
则$p(x_1=150)=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{9}$ $p(x_2=100)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{9}=\dfrac{7}{18}$

$p(x_3=50)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{7}{18}$ $p(x_4=-350)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{9}$

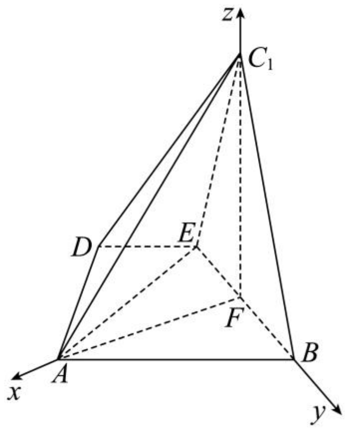
则$E(x)=150\times\dfrac{1}{9}+100\times\dfrac{7}{18}+50\times\dfrac{7}{18}-350\times\dfrac{1}{9}=\dfrac{325}{9}$.

所以他最终获得的收益期望值是$\dfrac{325}{9}$元.

20【详解】（1）解：如图所示：



连接 AC，交 BE 于 F，
因为 $\angle D=90^{\circ}$， $AB=2$， $DC=3$， $AD=\sqrt{3}$， $\overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{ED}$，
所以 AE=2，
又 $AB\parallel CD$，
所以四边形 ABCE 是菱形，
所以 $AC\perp BE$，
在 $\triangle ACD$ 中， $AC=\sqrt{AD^2+CD^2}=2\sqrt{3}$，
所以 $AF=CF=\sqrt{3}$， 又 $AC_1=\sqrt{6}$， 则 $AC_1^{\ 2}=AF^2+CF^2$，
所以 $C_1F\perp AF$， 又 $AF\cap BE=F$，
所以 $C_1F\perp$ 平面 $ABED$，
设点 D 到平面 BC_1E 的距离为 h，
因为 $S_{\triangle C_1BE}=\dfrac{1}{2}\times2\times\sqrt{3}=\sqrt{3},S_{\triangle DBE}=\dfrac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$， 且 $V_{C_1-DBE}=V_{D-C_1BE}$，
所以 $\dfrac{1}{3}\times h\times S_{\triangle C_1BE}=\dfrac{1}{3}\times C_1F\times S_{\triangle DBE}$， 解得 $h=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$；
（2）由（1）建立如图所示空间直角坐标系：



则 $D\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{3}{2},0\right),C_1\left(0,0,\sqrt{3}\right),B\left(0,1,0\right),E\left(0,-1,0\right),A\left(\sqrt{3},0,0\right)$，
所以 $\overrightarrow{BA}=\left(\sqrt{3},-1,0\right),\overrightarrow{BE}=\left(0,-2,0\right)$， 因为 $\overrightarrow{DP}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{DC_1}$，
所以 $\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{BD}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{DC_1}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},-2,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$，
设平面 BEP 的一个法向量为 $\vec{m}=\left(x,y,z\right)$，
则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{BE}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{BP}=0\end{cases}$， 即 $\begin{cases}-2y=0\\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}x-2y+\dfrac{\sqrt{3}}{3}z=0\end{cases}$，
令 $x=1$， 得 $\vec{m}=\left(1,0,-1\right)$， 易知平面 BEA 的一个法向量为 $\vec{n}=\left(0,0,1\right)$，
所以 $\cos\left\langle\vec{m},\vec{n}\right\rangle=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{\left|\vec{m}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$， 则 $\left\langle\vec{m},\vec{n}\right\rangle=\dfrac{3\pi}{4}$，
易知二面角 $P-BE-A$ 的平面角是锐角，
所以二面角 $P-BE-A$ 的大小为 $\dfrac{\pi}{4}$.
21.【详解】（1）因为点 $Q\left(1,2\right)$ 是抛物线 C： $y^2=2px\left(p>0\right)$ 上一点，
所以 $4=2p$， 解得： $p=2$，
所以 $y^2=4x$.
（2）设点 $P\left(x_0,y_0\right)$，点 $M\left(-1,m\right)$，点 $N\left(-1,n\right)$，直线 PM 方程为： $y-m=\dfrac{y_0-m}{x_0+1}\left(x+1\right)$，

化简得$(y_0-m)x-(x_0+1)y+(y_0-m)+m(x_0+1)=0$.

$\because \triangle PMN$的内切圆方程为$x^2+y^2=1$，$\therefore$圆心$(0,0)$到直线PM的距离为1，即

$$\frac{|y_0-m+m(x_0+1)|}{\sqrt{(y_0-m)^2+(x_0+1)^2}}=1.$$

故$(y_0-m)^2+(x_0+1)^2=(y_0-m)^2+2m(y_0-m)(x_0+1)+m^2(x_0+1)^2$.

易知$x_0>1$，上式化简得，$(x_0-1)m^2+2y_0m-(x_0+1)=0$.

同理有$(x_0-1)n^2+2y_0n-(x_0+1)=0$，

$\therefore m$，n是关于t的方程$(x_0-1)t^2+2y_0t-(x_0+1)=0$的两根.

$\therefore m+n=\dfrac{-2y_0}{x_0-1}$，$mn=\dfrac{-(x_0+1)}{x_0-1}$.

$\therefore |MN|^2=(m-n)^2=(m+n)^2-4mn=\dfrac{4y_0^2}{(x_0-1)^2}+\dfrac{4(x_0+1)}{x_0-1}$. $\because y_0^2=4x_0$，$\therefore$

$|MN|=\sqrt{\dfrac{16x_0}{(x_0-1)^2}+\dfrac{4(x_0+1)}{x_0-1}}=2\sqrt{\dfrac{x_0{}^2+4x_0-1}{(x_0-1)^2}}$，

点$P(x_0,y_0)$到直线$x=-1$的距离为$d=x_0+1$，

所以$\triangle PMN$面积为$S=\dfrac{1}{2}|MN|\cdot d=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{\dfrac{(x_0^2+4x_0-1)}{(x_0-1)^2}}(x_0+1)=\sqrt{\dfrac{(x_0+1)^2(x_0^2+4x_0-1)}{(x_0-1)^2}}$，

令$x_0-1=t(t>0)$，则$S=\sqrt{\dfrac{(t^2+4+4t)(t^2+4+6t)}{t^2}}=\sqrt{t^2+10t+\dfrac{40}{t}+\dfrac{16}{t^2}+32}$，

因为$t^2+\dfrac{16}{t^2}\geq 2\sqrt{t^2\cdot\dfrac{16}{t^2}}=8$，$10t+\dfrac{40}{t}\geq 2\sqrt{10t\cdot\dfrac{40}{t}}=40$，

当且仅当$t=2$取等，所以$S\geq\sqrt{8+40+32}=4\sqrt{5}$.

故$\triangle PMN$面积的最小值为$4\sqrt{5}$.

22.【详解】（1）$f'(x)=\dfrac{1}{x}-a$，若$a\leq 0$，则有$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；

若$a>0$，$f'(x)=\dfrac{1}{x}-a=\dfrac{a\left(\dfrac{1}{a}-x\right)}{x}$，当$0<x<\dfrac{1}{a}$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，

当$x>\dfrac{1}{a}$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；

（2）①由（1）的讨论可知，当$a\leq 0$时，$f(x)$单调递增，在$x\in(0,1]$，$f(x)_{\max}=f(1)=0$，满足题意；

当$\dfrac{1}{a}\geq 1$时，在$x\in(0,1]$，$f(x)_{\max}=f(1)=0$，满足题意；

当$0<\dfrac{1}{a}<1$时，即$a>1$，在$x\in(0,1]$，$f(x)_{\max}=f\left(\dfrac{1}{a}\right)=\ln\dfrac{1}{a}-1+a=a-\ln a-1$，

令 $g(x)=x-\ln x-1$ ，则 $g'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$ ，当 $x>1$ 时，$g'(x)>0$ ，$g(x)$ 单调递增，

$\therefore g(x)>g(1)=0$ ，即 $a-\ln a-1>0$ ，不满足题意；

综上，a 的取值范围是 $a\le 1$ ；

②由题意，$k\ge 1$ ，$\ln x-ax+a\le kx^2-3ax+1$ ，即 $kx^2-\ln x+1\ge a(2x+1)$ ，

考虑直线 $y=a(2x+1)$ 的极端情况 a=1，则 $kx^2\ge \ln x+2x$ ，

即 $k\ge \dfrac{\ln x+2x}{x^2}$ ，令 $h(x)=\dfrac{\ln x+2x}{x^2}$ ，$h'(x)=\dfrac{1-2x-2\ln x}{x^3}$ ，显然 $k(x)=1-2x-2\ln x$

是减函数，$k\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{e^2}}\right)=1-\dfrac{2}{\sqrt[3]{e^2}}+\dfrac{4}{3}=\dfrac{7}{3}-\dfrac{2}{\sqrt[3]{e^2}}>0$ ，$k\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{e}}\right)=\dfrac{3}{2}-\dfrac{2}{\sqrt[4]{e}}<0$ ，

$\therefore$存在唯一的 $x_0\in\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{e^2}},\dfrac{1}{\sqrt[4]{e}}\right)$ 使得 $h'(x_0)=0$ ，当 $x>x_0$ 时，$h'(x)<0$ ，当 $x<x_0$ 时，

$h'(x)>0$ ，

$1-2x_0-2\ln x_0=0$ ，$h(x)_{\max}=h(x_0)=\dfrac{x_0+\frac{1}{2}}{x_0^2}$ ，$\therefore h\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{e}}\right)<h(x)_{\max}<h\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{e^2}}\right)$ ，

即 $2<h(x)_{\max}<4$ ，故 k 的最小值可能是 3 或 4，验算 $3x^2-\ln x-2x\ge 0$ ，

由于 $\ln x\le x-1$，$\therefore 3x^2-\ln x-2x\ge 3x^2-3x+1$ ，$\Delta=3^2-3\times 4<0$ ，

$\therefore 3x^2-\ln x-2x\ge 3x^2-3x+1>0$ ，满足题意；

综上，a 的取值范围是 $a\le 1$，k 的最小值是 3.