天津市南开区 2021~2022 学年度第一学期期末

高三数学　2022 年 1 月

试题解答　Mike

本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分，共 150 分，考试用时 120 分钟.
祝各位考生考试顺利!

第 I 卷

注意事项:

1. 答第 I 卷前，考生务必将自己的姓名、准考号、考试科目涂在答题卡上;
2. 每小题选出答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑. 如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号;
3. 本卷共 9 小题，每小题 5 分，共 45 分.

参考公式:

- 球的体积公式 $V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3$，其中 R 表示球的半径.
- 锥体的体积公式 $V_{锥体}=\dfrac{1}{3}Sh$，其中 S 表示锥体的底面积，h 表示锥体的高.

一、选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 若全集 $U=\{x \mid 0<x<5, x\in\mathbb{Z}\}, A=\{1,2\}, B=\{2,3\}$，则 $(\complement_U A)\cap B=$　（　）

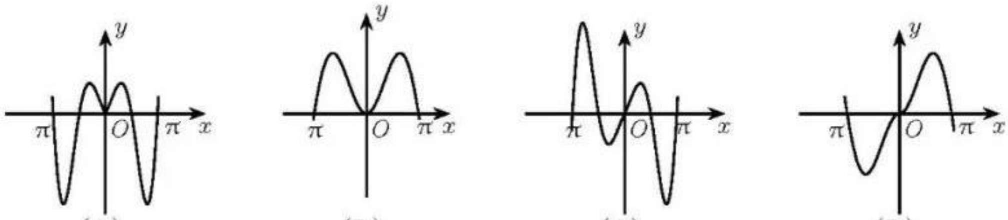
(A) $\{2\}$　(B) $\{3\}$　(C) $\{4\}$　(D) $\{2,3,4\}$

2. 设 $x\in\mathbb{R}$，则 “$x^2-2x\geqslant 3$” 是 “$2\leqslant x\leqslant 4$” 的　（　）

(A) 充分不必要条件　(B) 必要不充分条件

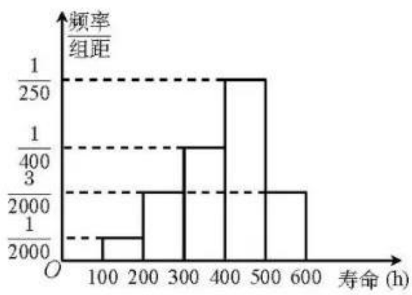
(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

3. 函数 $y=2^{|x|}\sin 2x$ 的图象可能是　（　）



(A)　(B)　(C)　(D)

4. 对某种电子元件使用寿命跟踪调查，抽取容量为 1000 的样本，其频率分布直方图如图所示. 根据此图可知这批样本中寿命不低于 300 h 的电子元件的个数为　（　）



(A) 800　　(B) 750　　(C) 700　　(D) 650

5. 设 $a=\log_3 2, b=\ln 2, c=5^{\ \frac{1}{2}}$，则 a,b,c 的大小关系为　　(　　)

(A) $a<b<c$　　(B) $c<a<b$　　(C) $b<a<c$　　(D) $c<b<a$

6. 设 P,A,B,C 为球 O 表面上的四个点，PA,PB,PC 两两垂直，且 $PA=3, PB=6$，三棱锥 $P\quad ABC$ 的体积为 18，则球 O 的体积为　　(　　)

(A) $\dfrac{23\sqrt{46}}{3}\pi$　　(B) $\dfrac{343}{6}\pi$　　(C) $27\sqrt{6}\pi$　　(D) $\dfrac{243}{2}\pi$

7. 设函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\quad A=0,\omega>0,\ \ \frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2})$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{2\pi}{3}$ 对称，它的最小正周期为 π，则　　(　　)

(A) $f(x)$ 的图象过点 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$　　(B) $f(x)$ 在 $\left[\dfrac{\pi}{12},\dfrac{2\pi}{3}\right]$ 上是减函数

(C) $f(x)$ 的一个对称中心是 $\left(\dfrac{5\pi}{12},0\right)$　　(D) $f(x)$ 的一个对称中心是 $\left(\dfrac{\pi}{6},0\right)$

8. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,b>0)$，过原点作一条倾斜角 $\dfrac{\pi}{3}$ 的直线分别交双曲线左、右两支于 P,Q 两点，以线段 PQ 为直径的圆过右焦点 F，则双曲线的离心率为　　(　　)

(A) $\sqrt{3}+1$　　(B) $\sqrt{2}+1$　　(C) $\sqrt{3}$　　(D) $\sqrt{2}$

9. 函数 $f(x)=|2x\quad 3|-8\sin\pi x\,(x\in\mathbb{R})$ 的所有零点之和为　　(　　)

(A) 10　　(B) 11　　(C) 12　　(D) 13

第 II 卷

注意事项：

1. 用黑色墨水的钢笔或签字笔答题；
2. 本卷共 11 小题，共 105 分.

得分	评卷人

二、填空题：本大题共 6 个小题，每小题 5 分，共 30 分.

10. 设 i 为虚数单位，则 $\dfrac{3+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=$________.

11. 二项式 $\left(\sqrt[3]{x}\quad \dfrac{1}{2x}\right)^8$ 的展开式中，常数项是________.

12. 直线 $l:3x\quad y\quad 6=0$ 与圆 $x^2+y^2-2x\quad 4y=0$ 相交于 A,B 两点，则 $|AB|=$________.

13. 对某实验项目进行测试，测试方法：①共进行 3 轮测试；②每轮测试 2 次，若至少合格 1 次，则本轮通过，否则不通过. 已知测试 1 次合格的概率为 $\dfrac{2}{3}$，如果各次测试合格与否互不影响，则在一轮测试中，通过的概率为________，在 3 轮测试中，通过的次数 X 的期望是________.

14. 已知 $x>0,y>0$，则 $\dfrac{(y+1)^2}{x}+\dfrac{(x+1)^2}{y}$ 的最小值为________.

15. 在四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{DC}, AB=4, BC=AD=2$，则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=$________；若 E,F 分别是边 BC,AB 上的点，且满足 $\dfrac{BE}{BC}=\dfrac{AF}{AB}=\lambda$，则当 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{DF}<0$ 时，λ 的取值范围是________.

三、解答题：本大题共 5 小题，共 75 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

得分	评卷人

16.（本题满分 14 分）

在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c，且 $b\sin A+\sqrt{3}a\cos B=0, a=2c$,.

（Ⅰ） 求角 B；

（Ⅱ） 求 a, c；

（Ⅲ） 求 $\cos(2A\quad B)$ 的值.

得分	评卷人

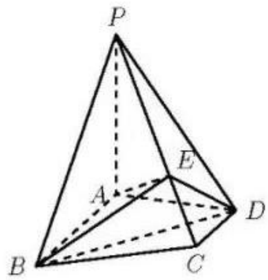
17.（本题满分 15 分）

如图，四棱锥 $P\quad ABCD$ 中，$PA\perp$ 平面 $ABCD, AB//DC, DA\perp AB, AB=AP=2, DA=DC=1, E$ 为 PC 上一点，且 $PE=\dfrac{2}{3}PC$.

（Ⅰ） 求证：$AE\perp$ 平面 PBC；

（Ⅱ） 求证：$PA//$ 平面 BDE；

（Ⅲ） 求平面 AEB 与平面 AED 的夹角的大小.



得分	评卷人

18.（本题满分 15 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2，离心率为 $\dfrac{1}{2}$，点 P 是椭圆 C 上的一个动点，且 $\triangle PF_1F_2$ 面积的最大值为 $\sqrt{3}$.

（Ⅰ） 求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ） 设斜率不为零的直线 PF_2 与椭圆 C 的另一个交点为 Q.

（ⅰ） 求 $|PQ|$ 的取值范围；

（ⅱ） 若 PQ 的垂直平分线交 y 轴于点 $T\left(0,\dfrac{1}{8}\right)$，求直线 PQ 的斜率.

得分	评卷人

19.（本题满分 15 分）

在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=2$，且 a_2, a_1+a_3, a_4 依次是等差数列 $\{b_n\}$ 的第 2 项，第 5 项，第 8 项.

（Ⅰ） 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ） 设数列 $\{a_n^2 \quad a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n.

（i） 求 S_n；

（ii） 求证：$\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{a_ib_i+2}{S_i}<6$.

得分	评卷人

20.（本题满分 16 分）

已知函数 $f(x)=2\ln x \quad ax, a\in\mathbb{R}$.

（Ⅰ） 当 $a=3$ 时，求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ） 若关于 x 的不等式 $f(x)\leqslant ax^2+(a \quad 2)x \quad 2$ 恒成立，求整数 a 的最小值；

（Ⅲ） 是否存在一条直线与函数 $y=f(x)+\dfrac{1}{2}x^2$ 的图象相切于两个不同的点？并说明理由.

天津市南开区 2021~2022 学年度第一学期期末
高三数学　　参考答案

1. B

解： 因为 $U=\{1,2,3,4\}, A=\{1,2\}$，
所以，$\complement_U A=\{3,4\}$，$\complement_U A)\cap B=\{3\}$.

2. D

解： 由 $x^2-2x-3\geqslant 0$ 得 $(x-3)(x+1)\geqslant 0$，解得，$x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant 3$.
所以，"$x^2-2x\geqslant 3$" 是 "$2\leqslant x\leqslant 4$" 的既不充分也不必要条件.

3. C

解： 函数 $f(x)=2^{|x|}\sin 2x$ 的定义域为 $\mathbb{R}$.
因为 $f(-x)=2^{|-x|}\sin(-2x)=-2^{|x|}\sin 2x=-f(x)$，
所以，$f(x)$ 是奇函数，排除 A、B.
当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$\sin 2x>0$；当 $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ 时，$\sin 2x<0$，排除 D，故选 C.

4. A

解： 依题意得，不低于 300 h 的电子元件个数为 $100\times\left(\frac{1}{400}+\frac{1}{250}+\frac{3}{2000}\right)\times 1000=800$.

5. B

解： 因为

$$\frac{1}{2}=\log_3\sqrt{3}<a=\log_3 2<\log_3 3=1,$$

$$\frac{1}{2}=\ln\sqrt{e}<\ln 2<\ln e=1.$$

$$0<5^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}<\frac{1}{2},$$

且 $\log_3 2<\ln 2$，所以 $c<a<b$，选 B.

6. D

解： 依题意得，$\frac{1}{6}PA\cdot PB\cdot PC=18$.
因为 $PA=3, PB=6$，
所以 $PC=6$，球 O 的半径 $R=\frac{\sqrt{PA^2+PB^2+PC^2}}{2}=\frac{9}{2}$，球 O 的体积 $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\times\frac{729}{8}=\frac{243}{2}\pi$.

7. C

解： 因为 $f(x)$ 的最小正周期为 π，所以，$\frac{2\pi}{|\omega|}=\pi$.
因为 $\omega>0$，所以 $\omega=2, f(x)=A\sin(2x+\varphi)$.
因为 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{2\pi}{3}$ 对称，
所以，$2\times\frac{2\pi}{3}+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$，解得 $\varphi=k\pi-\frac{5\pi}{6}, k\in\mathbb{Z}$.
因为 $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}, f(x)=A\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.
A 项，因为 $f(0)=A\sin\frac{\pi}{6}=\frac{A}{2}$，所以，$f(x)$ 过点 $\left(0,\frac{A}{2}\right)$.
B 项，由 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$ 得 $k\pi+\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{2\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}$.

所以，当 $A>0$ 时，$f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递增，在 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$ 上单调递减. 当 $A<0$ 时，$f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递减，在 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$ 上单调递增.

C 项，因为 $f\left(\frac{5\pi}{12}\right)=A\sin\pi=0$，所以，$f(x)$ 的一个对称中心是 $\left(\frac{5\pi}{12},0\right)$.

D 项，因为 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=A\sin\frac{\pi}{2}=A$，所以 $\left(\frac{\pi}{6},0\right)$ 不是 $f(x)$ 的对称中心.

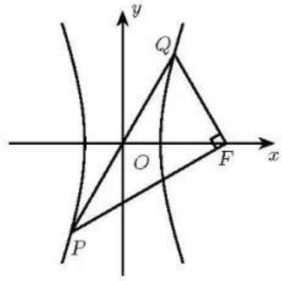
8. A

解 1：坐标法 设 $P(x_1,y_1)$，则 $Q(\ x_1,\ \ y_1)$.

因为直线 PQ 过原点，且倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$，所以直线 PQ 的方程为 $y=\sqrt{3}x$.

由 $\begin{cases}y=\sqrt{3}x,\\ b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2,\end{cases}$ 得 $(b^2-3a^2)x^2=a^2b^2$.

所以，$x_1^2=\frac{a^2b^2}{b^2-3a^2}, y_1^2=\ \sqrt{3}x_1)^2=\frac{3a^2b^2}{b^2-3a^2}$.



因为以 PQ 为直径的圆过点 F，所以，$PF\perp FQ$.

又因为 $F(c,0)$，所以，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FQ}&=(x_1-c,y_1)\cdot(\ x_1-c,\ \ y_1)\\&=c^2-x_1^2-y_1^2\\&=c^2-\frac{a^2b^2}{b^2-3a^2}-\frac{3a^2b^2}{b^2-3a^2}\\&=0.\end{aligned}$$

所以，$c^2(c^2-4a^2)=4a^2(c^2-a^2)\Rightarrow e^2(e^2-4)=4(e^2-1)$.

因为双曲线的离心率 $e>1$，所以 $e^2=4+2\sqrt{3}=\ \sqrt{3}+1)^2$，解得 $e=\sqrt{3}+1$.

解 2：坐标法 因为以 PQ 为直径的圆过点 F，

所以，$PF\perp FQ$ 且 $|OQ|=|OP|=|OF|=c$, O 为坐标原点.

因为 $\angle QOF=\frac{\pi}{3}$，

所以，$\triangle OFQ$ 为等边三角形，$Q\left(\frac{c}{2},\frac{\sqrt{3}c}{2}\right)$ 代入双曲线方程得 $\frac{c^2}{4a^2}-\frac{3c^2}{4b^2}=1$，即 $\frac{e^2}{4}-\frac{3e^2}{4(e^2-1)}=1$，

解得 $e=\sqrt{3}+1$.

解 3：双曲线定义 设双曲线的左焦点为 F_1，连结 F_1P, F_1Q.

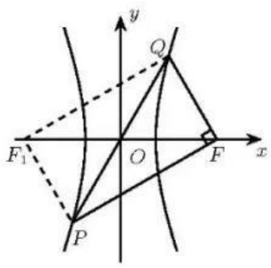
同**解 2** 得 $\triangle QOF$ 为等边三角形，所以，$\angle QOF_1=120^\circ$.

因为 $|OF_1|=|OQ|=c$,

所以 $\angle F_1OQ=\angle OQF_1=30^\circ$，从而有 $QF_1\perp QF, |QF_1|=\sqrt{3}c$.

因为 $|QF_1|-|QF|=2a$,

所以，$\ \sqrt{3}\ \ 1)c=2a$，故 $e=\frac{c}{a}=\frac{2}{\sqrt{3}\ \ 1}=\sqrt{3}+1$.



9. C

解： 由 $f(x)=0$ 得 $|2x\ \ \ 3|=8\sin\pi x$.

设 $g(x)=|2x\quad 3|, h(x)=8\sin\pi x$，则 $g(x)$ 的图象关于 $x=\frac{3}{2}$ 对称.

由 $\pi x=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$ 得 $x=k+\frac{1}{2},k\in\mathbb{Z}$，故 $x=\frac{3}{2}$ 是 $h(x)$ 的一条对称轴.

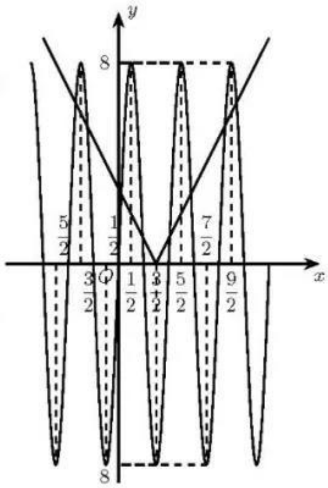
由 $g(x)=8$ 得 $|2x\quad 3|=8$，解得 $x=\quad\frac{5}{2}$ 或 $x=\frac{11}{2}$.

在同一平面直角坐标系中作出函数 $y=g(x)$ 与 $y=h(x)$ 的图象，如图

不妨设 8 个零点为 $x_i, i=1,2,3,\cdots,8$，且设 $x_1<x_2<x_3<\cdots<x_8$.

由对称性知，$x_1+x_8=x_2+x_7=x_3+x_6=x_4+x_5=2\times\frac{3}{2}=3$.

所以，$x_1+x_2+x_3+\cdots+x_8=4\times 3=12$，选 C.



10. $2-\mathrm{i}$

解： $\frac{3+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\frac{(3+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\frac{4-2\mathrm{i}}{2}=2-\mathrm{i}$.

11. 7

解： 二项式 $\left(x^{\frac{1}{3}}\quad \frac{1}{2}x^{\quad 1}\right)^8$ 的通项 $T_{k+1}=C_8^k\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{8\quad k}\left(\quad\frac{1}{2}x^{\quad 1}\right)^k=\left(\quad\frac{1}{2}\right)^k C_8^k x^{\frac{8}{3}\quad\frac{4k}{3}}$.

由 $\frac{8}{3}\quad\frac{4k}{3}=0$ 得 $k=2$.

所以，二项式 $\left(\sqrt[3]{x}\quad\frac{1}{2x}\right)^8$ 展开式中的常数项是 $C_8^2\left(\quad\frac{1}{2}\right)^2=7$.

12. $\sqrt{10}$

解： 圆 $x^2+y^2-2x\quad 4y=0$ 的标准方程为 $(x\quad 1)^2+(y\quad 2)^2=5$，其圆心为 $(1,2)$，半径 $r=\sqrt{5}$.

圆心 $(1,2)$ 到直线 l 的距离 $d=\frac{|3\quad 2-6|}{\sqrt{3^2+(\quad 1)^2}}=\frac{5\sqrt{10}}{10}$.

所以，$|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=\sqrt{10}$.

13. $\frac{8}{9},\frac{8}{3}$

解： 记"一轮测试中，合格 k 次"为事件 $A_k, k=0,1,2$，"一轮测试中，通过为事件" A，则 $P(A_k)=C_2^k\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{2\quad k}$.

$$\begin{aligned}P(A)&=P(A_1\cup A_2)\\&=P(A_1)\cup P(A_2)\\&=P(A_1)+P(A_2)\\&=C_2^1\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2\\&=\frac{8}{9}.\end{aligned}$$

在 3 轮测试中，通过的次数 $X\sim B\left(3,\frac{8}{9}\right)$，其期望 $E(X)=3\times\frac{8}{9}=\frac{8}{3}$.

说明：也可以利用对立事件求 $P(A), P(A)=1 \quad P(A_0)=1 \quad \left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$.

14. 8

解:

$$\begin{aligned}\frac{(y+1)^2}{x}+\frac{(x+1)^2}{y} &=\frac{y^2+1+2y}{x}+\frac{x^2+1+2x}{y}\\ &\geqslant\frac{2y+2y}{x}+\frac{2x+2x}{y}\\ &=\frac{4y}{x}+\frac{4x}{y}\\ &\geqslant 2\sqrt{\frac{4y}{x}\cdot\frac{4x}{y}}\\ &=8.\end{aligned}$$

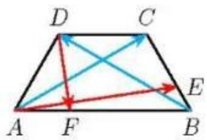
当且仅当 $x=y=1$ 时等号成立.

15. $6, \lambda \in \left[0, \frac{7 \quad \sqrt{33}}{4}\right)$

解:（1）依题意可知四边形 $ABCD$ 为底角是 60° 的等腰梯形.

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD} \quad \overrightarrow{AB}$.

因为 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|\cos\angle BAD=4\times 2\times\frac{1}{2}=4$，所以，



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}&=\left(\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AD} \quad \overrightarrow{AB}\right)\\ &=\overrightarrow{AD}^2-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB} \quad \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2\\ &=2^2-\frac{1}{2}\times 4-\frac{1}{2}\times 4^2\\ &= \quad 6.\end{aligned}$$

（2）因为 $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AF} \quad \overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AB} \quad \overrightarrow{AD}$,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AE}&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}\\ &=\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{BC}\\ &=\overrightarrow{AB}+\lambda\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}\right)\\ &=\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AD}.\end{aligned}$$

（Ⅱ） **证明：** $\overrightarrow{PA}=(0,0,\ \ 2),\overrightarrow{BD}=(\ \ 2,1,0),\overrightarrow{BE}=\left(\ \ \frac{4}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$.

设平面 BDE 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BE}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\ \ 2x+y=0,\\ \ \ \frac{4}{3}x+\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}z=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x\ \ \ y=0,\\ \ \ 2x+y+z=0.\end{cases}$

令 $x=1$，则 $\vec{n}=(1,2,0)$ 为平面 BDE 的一个法向量.

因为 $\overrightarrow{PA}\cdot\vec{n}=0\times1+0\times2-0\times2=0$，所以，$PA\perp\vec{n}$.

因为 $PA\subset$ 平面 BDE，所以，$PA//$ 平面 BDE.

（Ⅲ） **解：** $\overrightarrow{AE}=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right),\overrightarrow{AB}=(2,0,0),\overrightarrow{AD}=(0,1,0)$.

设平面 AEB 的法向量为 $\vec{u}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{u}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\\ \vec{u}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}z=0,\\ x=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x+y+z=0,\\ x=0.\end{cases}$

令 $y=1$，则 $\vec{u}=(0,1,\ \ 1)$ 为平面 AEB 的一个法向量.

设平面 AED 的法向量为 $\vec{v}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{v}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\\ \vec{v}\cdot\overrightarrow{AD}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}z=0,\\ y=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x+y+z=0,\\ y=0.\end{cases}$

令 $x=1$，则 $\vec{v}=(1,0,\ \ 1)$ 为平面 AED 的一个法向量.

所以，$\cos\langle\vec{u},\vec{v}\rangle=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$，故平面 AEB 与平面 AED 夹角的大小为 $\frac{\pi}{3}$.

18. （Ⅰ）$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$；（Ⅱ）（ⅰ）$(3,4)$；（ⅱ）$k=\frac{1}{2}$ 或 $k=\frac{3}{2}$.

（Ⅰ） **解：** 设椭圆 C 的焦距为 $2c$.

因为椭圆 C 的离心率为 $\frac{1}{2}$，所以 $\frac{c}{a}=\frac{1}{2},a=2c,b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}c$.

当 P 为椭圆 C 的短轴端点时，$\triangle PF_1F_2$ 的面积取得最大值 $\frac{1}{2}\times2c\times b=bc$，所以 $bc=\sqrt{3}$.

解得 $c=1,b=\sqrt{3},a=2$，椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

（Ⅱ）（ⅰ） 由（Ⅰ）知，$F_2(1,0)$. 设直线 PF_2 的斜率为 k，则直线 PF_2 的方程为 $y=k(x\ \ \ 1),k=0$.

由 $\begin{cases}y=k(x\ \ \ 1),\\ 3x^2+4y^2=12,\end{cases}$ 得 $(4k^2+3)x^2-8k^2x+4k^2-12=0,\Delta=64k^4-4(4k^2+3)(4k^2-12)=144(k^2+1)$.

所以，$|PQ|=\frac{\sqrt{(1+k^2)\times144(k^2+1)}}{4k^2+3}=\frac{12(1+k^2)}{4k^2+3}$.

令 $t=4k^2+3>3$，则 $|PQ|=\frac{3}{t}+3$.

因为中 $t>3$，所以 $\frac{3}{t}\in(0,1),|PQ|\in(3,4)$.

（ⅱ） 设 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$.

由（ⅰ）知 $x_1+x_2=\frac{8k^2}{4k^2+3}$，所以线段 PQ 的中点 M 的坐标为 $\left(\frac{4k^2}{4k^2+3},\ \ \frac{3k}{4k^2+3}\right)$.

因为 $T\left(0,\frac{1}{8}\right)$，所以线段 PQ 中垂线的斜率 $k_{TM}=\frac{\frac{1}{8}+\frac{3k}{4k^2+3}}{\frac{4k^2}{4k^2+3}}=\ \ \frac{4k^2+24k+3}{32k^2}$.

因为直线 TM 与直线 PQ 垂直，

所以，$-\frac{4k^2+24k+3}{32k^2}\times k=\ \ 1$，整理得 $4k^2-8k+3=0$，解得 $k=\frac{1}{2}$ 或 $k=\frac{3}{2}$.

19. （Ⅰ）$a_n=2^n,,n\in\mathbb{N}^*,b_n=2n,n\in\mathbb{N}^*$；（Ⅱ）（ⅰ）$S_n=\dfrac{4^{n+1}}{3}\quad 2^{n+1}+\dfrac{2}{3}$；（ⅱ）见解答

（Ⅰ） 设 $\{a_n\}$ 的公比为 $q,\{b_n\}$ 的公差为 d.

依题意得 $\begin{cases}b_1+d=2q,\\ b_1+4d=2+2q^2,\\ b_1+7d=2q^3,\end{cases}$ 解得 $q=2,b_1=2,d=2$.

所以，数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2^n,n\in\mathbb{N}^*,\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n=2n,n\in\mathbb{N}^*$.

（Ⅱ）（ⅰ）由（Ⅰ）知 $a_n^2\quad a_n=2^{2n}\quad 2^n=4^n\quad 2^n$. 所以，

$$\begin{aligned}S_n&=(4-2)+\ 4^2-2^2)+\ 4^3\quad 2^3)+\cdots+(4^n\quad 2^n)\\&=\ 4+4^2+4^3+\cdots+4^n)-(2+2^2+2^3+\cdots+2^n)\\&=\frac{4(1\quad 4^n)}{1-4}-\frac{2(1\quad 2^n)}{1-2}\\&=\frac{4^{n+1}}{3}\quad 2^{n+1}+\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

（ⅱ）由（ⅰ）知 $\dfrac{a_ib_i}{S_i}=\dfrac{2i\times 2^i+2}{\frac{4^{i+1}}{3}\quad 2^{i+1}+\frac{2}{3}}=\dfrac{3(i\cdot 2^{i+1}+2)}{4^{i+1}-3\times 2^{i+1}+2}=\dfrac{3(i\cdot 2^i+1)}{(2^{i+1}-1)(2^i-1)}=\dfrac{3(i+1)}{2^i-1}-\dfrac{3(i+2)}{2^{i+1}-1}$

所以，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_ib_i+2}{S_i}&=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{3(i+1)}{2^i-1}-\frac{3(i+2)}{2^{i+1}-1}\right]\\&=\frac{3\times 2}{2-1}-\frac{3\times 3}{2^2-1}+\frac{3\times 3}{2^2-1}-\frac{3\times 4}{2^3\quad 1}+\cdots+\frac{3(n+1)}{2^n\quad 1}-\frac{3(n+2)}{2^{n+1}-1}\\&=6\quad\frac{3(n+2)}{2^{n+1}-1}\\&<6.\end{aligned}$$

20. （Ⅰ）单调递增区间为 $\left(0,\dfrac{2}{3}\right)$，单调递减区间为 $\left(\dfrac{2}{3},+\infty\right)$；（Ⅱ）整数 a 的最小值为 2；（Ⅲ）-1

（Ⅰ） **解：** $a=3$ 时，$f(x)=2\ln x\quad 3x,f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

$f'(x)=\dfrac{2}{x}\quad 3=\dfrac{2-3x}{x}$.

由 $f'(x)>0$ 得 $0<x<\dfrac{2}{3}$；由 $f'(x)<0$ 得 $x>\dfrac{2}{3}$.

所以，$f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(0,\dfrac{2}{3}\right)$，单调递减区间为 $\left(\dfrac{2}{3},+\infty\right)$.

（Ⅱ） **解：** 由 $f(x)\leqslant ax^2+(a\quad 2)x\quad 2$ 得 $a(x^2+2x)\geqslant 2\ln x+2x+2$.

因为 $x>0$，所以 $a\geqslant\dfrac{2\ln x+2x+2}{x^2+2x}$.

设 $g(x)=\dfrac{2\ln x+2x+2}{x^2+2x},x>0$，则 $g'(x)=\dfrac{(2x+2)(\ \ x\quad 2\ln x)}{(x^2+2x)^2}$.

设 $h(x)=\quad 2\ln x\quad x,x>0$，则 $h'(x)=\quad\dfrac{2}{x}\quad 1<0,h(x)$ 单调递减.

× ∈

因为 $h\left(\frac{1}{2}\right)=2\ln 2-\frac{1}{2}>0, h(1)=\ \ 1<0,$

所以 $h(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 内有唯一一个零点 x_0，且 $2\ln x_0=\ \ x_0$.

当 $0<x<x_0$ 时，$h(x)>0$，从而有 $g'(x)>0, g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 内单调递增.

当 $x>x_0$ 时，$h(x)<0$，从而有 $g'(x)<0, g(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 内单调递减.

所以，$g(x)_{\max}=g(x_0)=\dfrac{2\ln x_0+2x_0+2}{x_0^2+2x_0}=\dfrac{x_0+2x_0+2}{x_0^2+2x_0}=\dfrac{1}{x_0}$.

因为 $\dfrac{1}{x_0}\in(1,2)$，所以 $a\geqslant 2$，整数 a 的最小值为 2.

（III）**解：** 设 $F(x)=f(x)+\frac{1}{2}x^2=2\ln x+\frac{1}{2}x^2-ax, x>0$，则 $F'(x)=\dfrac{2}{x}+x\ \ \ a$.

假设存在直线 l 与函数 $y=F(x)$ 的图象切于两个不同的点 $(x_1,F(x_1)),(x_2,F(x_2)),x_1>0,x_2>0$ 且 $x_1=x_2$.

因为 $F'(x_1)=2\ln x_1+\frac{1}{2}x_1^2-ax_1$，所以，函数 $y=F(x)$ 的图象在点 $(x_1,F(x_1))$ 处的切线方程为 $y\ \ \left(2\ln x_1+\frac{1}{2}x_1^2-ax_1\right)=\left(\frac{2}{x_1}+x_1-a\right)(x\ \ \ x_1)$，整理得 $y=\left(\frac{2}{x_1}+x_1-a\right)x+2\ln x_1-\frac{1}{2}x_1^2-2$.

同理可得，切线 l 方程也为 $y=\left(\frac{2}{x_2}+x_2-a\right)x+2\ln x_2-\frac{1}{2}x_2^2-2$.

所以，$\begin{cases}\dfrac{2}{x_1}+x_1-a=\dfrac{2}{x_2}+x_2-a,\\ 2\ln x_1-\dfrac{1}{2}x_1^2-2=2\ln x_2-\dfrac{1}{2}x_2^2-2.\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\dfrac{2}{x_1}+x_1=\dfrac{2}{x_2}+x_2,\\ 2\ln x_1-\dfrac{1}{2}x_1^2=2\ln x_2-\dfrac{1}{2}x_2^2.\end{cases}$

因为 $\dfrac{2}{x_1}+x_1=\dfrac{2}{x_2}+x_2$，所以，$\dfrac{2(x_2-x_1)}{x_1x_2}=x_2-x_1$.

因为 $x_1=x_2$，所以，$x_1x_2=2$.

又因为 $2\ln x_1-\frac{1}{2}x_1^2=2\ln x_2-\frac{1}{2}x_2^2$，

所以，$2\ln x_1-\frac{1}{2}x_1^2=2\ln\dfrac{2}{x_1}-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4}{x_1^2}$，整理得 $4\ln x_1-\frac{1}{2}x_1^2+\dfrac{2}{x_1^2}-2\ln 2=0$.

设 $u(x)=4\ln x\ \ \ \frac{1}{2}x^2+\dfrac{2}{x^2}-2\ln 2, x>0$，则 $u'(x)=\dfrac{4}{x}\ \ \ x\ \ \ \dfrac{4}{x^3}=\ \ \ \dfrac{(x^2-2)^2}{x^3}<0, u(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递减.

因为 $u\ \ \sqrt{2})=4\ln\sqrt{2}-1+1\ \ \ 2\ln 2=0$，所以，$u(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有唯一零点 $\sqrt{2}$.

因此，方程 $4\ln x_1-\frac{1}{2}x_1^2+\dfrac{2}{x_1^2}-2\ln 2=0$ 有唯一解 $x_1=\sqrt{2}$，此时有 $x_2=\sqrt{2}$，这与 $x_1=x_2$ 矛盾.

综上，不存在直线 l 与函数 $y=f(x)+\frac{1}{2}x^2$ 的图象切于不同的两点.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。