

2023 年邵阳市高二联考试题卷

数 学

本试卷共 4 页，22 个小题。满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。将条形码横贴在答题卡上“贴条形码区”。

2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔在答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案写在试题卷上无效。

3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。

4. 保持答题卡的整洁。考试结束后，只交答题卡，试题卷自行保存。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数 z 满足： $\frac{z}{1+i}=2i$ (i 为虚数单位)，则 z 的共轭复数为

- A. $2-2i$ B. $2+2i$ C. $-2-2i$ D. $-2+2i$

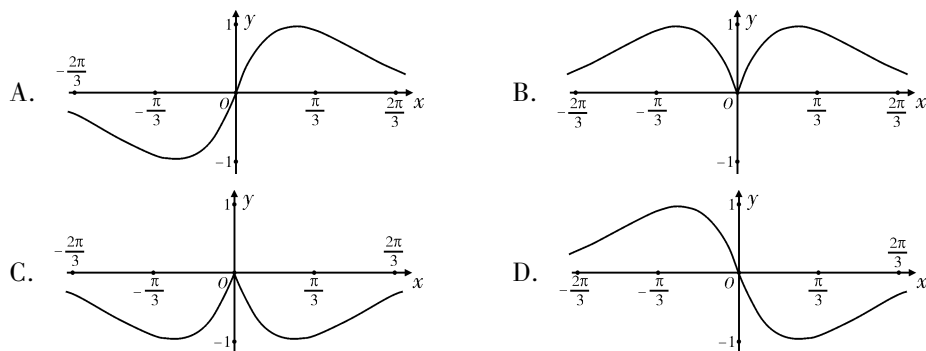
2. 已知全集 $U=\mathbf{R}$ ，设集合 $A=\{x|x-1<0\}$ ， $B=\{x|x^2-2x-3\leq 0\}$ ，则 $(\complement_U A)\cup B=$

- A. $\{x|1\leq x\leq 3\}$ B. $\{x|-2\leq x<1\}$
C. $\{x|x\geq -1\}$ D. $\{x|x\leq 3\}$

3. 若 $\sin\left(\frac{\pi}{5}+\alpha\right)=\frac{2}{3}$ ，则 $\cos\left(\frac{7\pi}{10}+\alpha\right)=$

- A. $-\frac{2}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $-\frac{\sqrt{5}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{3}$

4. 函数 $f(x)=\frac{3\sin x}{e^{|x|}}$ 在区间 $\left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$ 的图象大致为

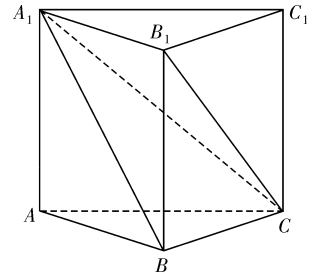


5. “基础学科拔尖学生培养试验计划”简称“珠峰计划”，是国家为回应“钱学森之问”而推出的一项人才培养计划，旨在培养中国自己的学术大师. 浙江大学、复旦大学、武汉大学、中山大学均有开设数学学科拔尖学生培养基地. 已知某班级有 A, B, C, D, E 共 5 位同学从中任选一所学校作为奋斗目标，每所学校至少有一位同学选择，则 A 同学选择浙江大学的不同方法共有
- A. 24 种 B. 60 种 C. 96 种 D. 240 种
6. 设非零向量 \mathbf{a}, \mathbf{b} 满足 $|\mathbf{a}|=8, |\mathbf{b}|=4, |\mathbf{a}+\mathbf{b}|=6$ ，则 \mathbf{a} 在 \mathbf{b} 上的投影向量为
- A. $-\frac{11}{8}\mathbf{b}$ B. $-\frac{11}{8}\mathbf{a}$ C. $-\frac{11}{4}\mathbf{b}$ D. $-\frac{11}{4}\mathbf{a}$
7. 已知点 P 在直线 $y=-x-3$ 上运动, M 是圆 $x^2+y^2=1$ 上的动点, N 是圆 $(x-9)^2+(y-2)^2=16$ 上的动点, 则 $|PM|+|PN|$ 的最小值为
- A. 13 B. 11 C. 9 D. 8
8. 已知函数 $f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的奇函数, 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 均有 $f(x) < \frac{f'(x)}{\ln 3}$ 成立. 若 $f(-1)=1$, 则不等式 $f(x) < -3^{x-1}$ 的解集为
- A. $\{x|x>1\}$ B. $\{x|x<1\}$ C. $\{x|x>-1\}$ D. $\{x|x<-1\}$

二、多选题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 若正实数 a, b 满足 $a+b=2$ ，则下列结论中正确的有
- A. ab 的最大值为 1 B. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 的最大值为 2
- C. $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 的最小值为 2 D. a^2+b^2 的最小值为 2
10. 下列说法中，错误的是
- A. 若事件 A, B 满足： $P(A)>0, P(B)>0$ ，且 $P(AB)=P(A)P(B)$ ，则 \bar{A} 与 \bar{B} 相互独立
- B. 某医院住院的 8 位新冠患者的潜伏天数分别为 10, 3, 8, 3, 2, 15, 5, 4，则该样本数据的第 75 百分位数为 8
- C. 若随机变量 $\xi \sim B\left(7, \frac{1}{2}\right)$ ，则方差 $D(2\xi) = 14$
- D. 在回归模型分析中，残差平方和越小，模型的拟合效果越好
11. 设 A, B 是抛物线 $C: y^2=2x$ 上的两点， F 是抛物线 C 的焦点，则下列命题中正确的是
- A. 若直线 AB 过抛物线 C 的焦点 F ，则 $|AB|$ 的最小值为 2
- B. 若点 A 的坐标为 $(2, 2)$ ，则 $|AF| = \frac{5}{2}$
- C. 过点 $P(0, 1)$ 且与抛物线 C 只有一个公共点的直线有且只有两条
- D. 若 $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{FB}$ (点 A 在第一象限)，则直线 AB 的倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$

12. 《九章算术·商功》中记载：“斜解立方，得两堑堵，斜解堑堵，其一为阳马，一为鳖臑。阳马居二，鳖臑居一，不易之率也。合两鳖臑三而一，验之以棊，其形露矣”。文中“堑堵”是指底面是直角三角形，且侧棱垂直于底面的三棱柱；文中“阳马”是指底面为长方形且有一条侧棱与底面垂直的四棱锥；文中“鳖臑”是指四个面都是直角三角形的三棱锥。如图(1)所示，在堑堵 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，若 $AB \perp BC$ ， $A_1A = AB = BC = 2$ 。则下列说法中正确的有



图(1)

- A. 四棱锥 $C-AA_1B_1B$ 为阳马，三棱锥 B_1-A_1BC 为鳖臑
 B. 点 N 在线段 A_1C 上运动，则 $BN+B_1N$ 的最小值为 $2\sqrt{3}$
 C. G, H 分别为 A_1B_1, CC_1 的中点，过点 B, G, H 的平面截

三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ ，则该截面周长为 $2\sqrt{5} + \frac{2\sqrt{17}}{3}$

- D. 点 P 在侧面 BCC_1B_1 及其边界上运动，点 M 在棱 AB 上运动，若直线 C_1M, AP 是共面直线，则点 P 的轨迹长度为 $\sqrt{6}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中， $a_4 = 2, a_7 = 54$ ，则公比 q 为 _____。
14. 已知函数 $f(x) = 3\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$ ($\omega > 0$) 的最小正周期为 π ，则函数 $y = f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{5\pi}{12}\right]$ 上的最小值为 _____。
15. 某市 2022 年高二数学联考学生成绩 $X \sim N(90, \sigma^2)$ ，且 $P(80 \leq X \leq 100) = \frac{3}{5}$ 。现从参考的学生中随机抽查 3 名学生，则恰有 1 名学生的成绩超过 100 分的概率为 _____。
16. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的右焦点为 F ，点 M, N 在双曲线 C 上，且关于原点 O 对称。若 $|ON| = |OF|$ ， $\triangle MNF$ 的面积为 $\frac{a^2}{4}$ ，则双曲线 C 的离心率为 _____。

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 d 不为 0， $a_4 = 7$ ，且 a_1, a_3, a_{13} 成等比数列。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n ；

(2) 记 $b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}}$ ， $n \in \mathbf{N}^*$ ，证明： $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n < \frac{1}{2}$ 。

18. (本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，已知 $\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} = \frac{\sin C}{2\sqrt{3}\sin B}$ 。

(1) 求 a 的值；

(2) 若 $\sin \frac{B+C}{2} = \sin A$ ， $B = 45^\circ$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积。

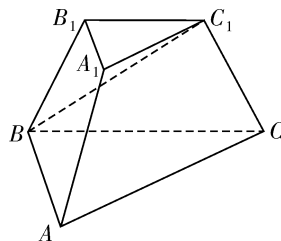
19. (本小题满分 12 分)

如图 (2) 所示, 在三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 平面 $BB_1C_1C \perp$ 平面 ABC ,

$$AB \perp BC, BB_1 = B_1C_1 = C_1C = \frac{1}{2}BC = 2.$$

(1) 证明: $AB \perp BC_1$;

(2) 当二面角 $B-C_1C-A$ 为 $\frac{\pi}{4}$ 时, 求三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积.



图(2)

20. (本小题满分 12 分)

$$\text{已知函数 } f(x) = e^{x+1} - \frac{a}{x} + 1, g(x) = \frac{\ln x}{x} + 2.$$

(1) 讨论函数 $g(x)$ 在定义域内的单调性;

(2) 若 $f(x) \geq g(x)$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

21. (本小题满分 12 分)

已知 $P\left(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上的一点, F_1, F_2 为椭圆 C 的左、右焦点,

B_1, B_2 为其短轴的两个端点, $|B_1B_2|$ 是 $|PF_1|$ 与 $|PF_2|$ 的等差中项.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 若直线 l 与椭圆 C 交于点 M, N , 与圆 $O: x^2 + y^2 = \frac{4}{5}$ 切于点 G , 问: $|GM| \cdot |GN|$ 是否为定值? 若是, 求出该定值; 若不是, 请说明理由.

22. (本小题满分 12 分)

新宁崀山景区是世界自然遗产、国家 5A 级景区, 其中“八角寨”景区和“天下第一巷”景区是新宁崀山景区的两张名片. 为了合理配置旅游资源, 现对已游览“八角寨”景区且尚未游览“天下第一巷”景区的游客进行随机调查, 若不游览“天下第一巷”景区记 2 分, 若继续游览“天下第一巷”景区记 4 分, 假设每位游客选择游览“天下第一巷”景区的概率均为 $\frac{1}{3}$, 游客之间选择意愿相互独立.

(1) 从游客中随机抽取 2 人, 记总得分为随机变量 X , 求 X 的数学期望;

(2) (i) 记 $p_k (k \in \mathbf{N}^*)$ 表示“从游客中随机抽取 k 人, 总分恰为 $2k$ 分”的概率, 求 $\{p_k\}$ 的前 4 项和;

(ii) 在对游客进行随机问卷调查中, 记 $a_n (n \in \mathbf{N}^*)$ 表示“已调查过的累计得分恰为 $2n$ 分”的概率, 探求 a_n 与 $a_{n-1} (n \geq 2)$ 的关系, 并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.