文科数学 答案

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.

1. B	2. A	3. A	4. C	5. D	6. C
7. A	8. B	9. D	10. B	11. A	12. D

二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 4　　14. 54

15. 2　　16. $2\sqrt{2}-2$

三、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

17. **解析**　(Ⅰ)由频率分布直方图知$(0.004+0.006+0.020+0.030+0.024+m)\times10=1$,

解得 $m=0.016$. ………………(3 分)

则测试成绩在$[80,100]$内的频率为$(0.016+0.024)\times10=0.4$,

所以估计全校学生测试成绩在$[80,100]$内的人数为$800\times0.4=320$. ………………(6 分)

(Ⅱ)样本中测试成绩在$[50,60)$内的学生人数为$0.006\times10\times100=6$, ………………(7 分)

记学生 A 和 B 之外的 4 人分别为 c,d,e,f,

则所有可能的结果有 AB,Ac,Ad,Ae,Af,Bc,Bd,Be,Bf,cd,ce,cf,de,df,ef,共 15 种, ………………(9 分)

其中学生 A 和 B 至少有一人被抽到的结果有 AB,Ac,Ad,Ae,Af,Bc,Bd,Be,Bf,共 9 种. ………………(10 分)

所以学生 A 和 B 至少有一人被抽到的概率 $P=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$. ………………(12 分)

18. **解析**　(Ⅰ)设$\{a_n\}$的公差为 $d(d>0)$.

因为 $S_5=5a_3=85$,所以 $a_3=17$, ………………(2 分)

由 $a_6=7a_1$ 得 $17+3d=7(17-2d)$,解得 $d=6$, ………………(3 分)

所以 $a_1=5$,$a_n=a_3+(n-3)d=17+(n-3)\times6=6n-1$, ………………(5 分)

$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{n(5+6n-1)}{2}=3n^2+2n$. ………………(7 分)

(Ⅱ)由(Ⅰ)得,$b_n=\frac{5}{a_na_{n+1}}=\frac{5}{(6n-1)(6n+5)}=\frac{5}{6}\left(\frac{1}{6n-1}-\frac{1}{6n+5}\right)$, ………………(9 分)

所以 $T_n=\frac{5}{6}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{11}+\frac{1}{11}-\frac{1}{17}+\cdots+\frac{1}{6n-7}-\frac{1}{6n-1}+\frac{1}{6n-1}-\frac{1}{6n+5}\right)$

$=\frac{5}{6}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6n+5}\right)=\frac{n}{6n+5}$. ………………(12 分)

19. **解析**　(Ⅰ)在$\triangle ABC$中,因为 E,F 分别是 BC,AC 的中点,所以 $AB/\!/EF$. ………………(1 分)

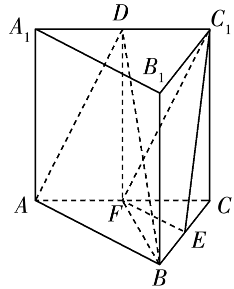
因为 $AC/\!/A_1C_1$,$AF=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}A_1C_1=DC_1$,

所以四边形 AFC_1D 为平行四边形,所以 $AD/\!/FC_1$, ………………(3 分)

又因为 $AD\cap AB=A$,$FE\cap FC_1=F$, ………………(4 分)

所以平面 $ABD // $ 平面 FEC_1. …………………………………………………………（5 分）

（Ⅱ）如图所示，连接 BF，DF.



利用勾股定理计算得 $AB=\sqrt{AC^2-BC^2}=\sqrt{3}$，$AD=\sqrt{AA_1^2+A_1D^2}=\sqrt{5}$，$BD=\sqrt{BF^2+DF^2}=\sqrt{5}$，

所以 $\triangle ABD$ 的面积为 $\frac{1}{2}AB\times\sqrt{AD^2-\left(\frac{AB}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{5-\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{51}}{4}$. …………………………（7 分）

设点 F 到平面 ABD 的距离为 h，则三棱锥 $F-ABD$ 的体积为 $V=\frac{1}{3}h\times\frac{\sqrt{51}}{4}=\frac{\sqrt{51}}{12}h$. ………………（9 分）

又易知 $DF\perp$ 平面 ABC，

所以三棱锥 $D-ABF$ 的体积为 $V=\frac{1}{3}\times DF\times S_{\triangle ABF}=\frac{1}{3}\times 2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times 1=\frac{\sqrt{3}}{6}$. ………………（10 分）

所以 $\frac{\sqrt{51}}{12}h=\frac{\sqrt{3}}{6}$，解得 $h=\frac{2\sqrt{17}}{17}$，

即点 F 到平面 ABD 的距离为 $\frac{2\sqrt{17}}{17}$. …………………………………………………………（12 分）

20. **解析**　（Ⅰ）由 $F(2,0)$ 得 C 的半焦距为 $c=2$， …………………………………………（1 分）

所以 $a^2=b^2+4$， …………………………………………………………………………（2 分）

又 C 过点 $(2,3)$，

所以 $\frac{4}{b^2+4}+\frac{9}{b^2}=1$，解得 $b^2=12$， ………………………………………………（3 分）

所以 $a^2=16$，$a=4$， ……………………………………………………………………（4 分）

故 C 的离心率为 $\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$. ………………………………………………………………（5 分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知 C 的方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$. 设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，$P(8,y_0)$.

由题意可得直线 MN 的方程为 $y=x-2$， ………………………………………………（6 分）

联立 $\begin{cases} y=x-2, \\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1, \end{cases}$ 消去 y 可得 $7x^2-16x-32=0$，

则 $x_1+x_2=\frac{16}{7}$，$x_1x_2=-\frac{32}{7}$， …………………………………………………（7 分）

则 $k_{PM}+k_{PN}=\frac{y_0-y_1}{8-x_1}+\frac{y_0-y_2}{8-x_2}=\frac{(y_0-x_1+2)(8-x_2)+(y_0-x_2+2)(8-x_1)}{(8-x_1)(8-x_2)}$ ……………（8 分）

$$=\frac{16y_0+32+2x_1x_2-(y_0+10)(x_1+x_2)}{64+x_1x_2-8(x_1+x_2)}$$

$$=\frac{16y_0+32+2\left(-\frac{32}{7}\right)-\frac{16}{7}(y_0+10)}{64-\frac{32}{7}-8\times\frac{16}{7}}$$ ……………………………………………………（9 分）

$$=\frac{y_0}{3},$$ ……………………………………………………………………（10 分）

又 $k_{PF}=\frac{y_0-0}{8-2}=\frac{y_0}{6}$, ……………………………………………………（11 分）

因此 $k_{PM}+k_{PN}=2k_{PF}$. ……………………………………………………（12 分）

21. **解析** （Ⅰ）由已知得 $f'(x)=\frac{x^2-2ax+9}{x^4}$. ……………………………………（1 分）

若 $a\leqslant 0$，则当 $x>0$ 时，$x^2-2ax+9>0$ 恒成立，所以 $f'(x)>0$，故 $f(x)$ 单调递增. …………（2 分）

由 $\Delta=(-2a)^2-36\leqslant 0$ 可得 $-3\leqslant a\leqslant 3$，

若 $0<a\leqslant 3$，则当 $x>0$ 时，$x^2-2ax+9\geqslant 0$ 恒成立，所以 $f'(x)\geqslant 0$，故 $f(x)$ 单调递增. …………（3 分）

若 $a>3$，令 $f'(x)=0$，可得 $x_1=a-\sqrt{a^2-9}$，$x_2=a+\sqrt{a^2-9}$，其中 $x_1,x_2>0$，

当 $0<x<x_1$ 或 $x>x_2$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，当 $x_1<x<x_2$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减. ………（4 分）

综上：若 $a\leqslant 3$，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；若 $a>3$，则 $f(x)$ 在 $(0,a-\sqrt{a^2-9})$ 和 $(a+\sqrt{a^2-9},+\infty)$ 上单调递增，在 $(a-\sqrt{a^2-9},a+\sqrt{a^2-9})$ 上单调递减. …………………………（5 分）

（Ⅱ）由不等式 $f(x)\leqslant\frac{2\ln x}{x^2}$，得 $-\frac{3}{x^3}+\frac{a}{x^2}-\frac{1}{x}\leqslant\frac{2\ln x}{x^2}$，则 $a\leqslant 2\ln x+x+\frac{3}{x}$，$x\in\left[\frac{1}{2},4\right]$.

设函数 $h(x)=2\ln x+x+\frac{3}{x}$，$x\in\left[\frac{1}{2},4\right]$，

因为存在 $x\in\left[\frac{1}{2},4\right]$，使 $a\leqslant h(x)$，所以 $a\leqslant h(x)_{\max}$. ……………………………（6 分）

求导得 $h'(x)=\frac{(x+3)(x-1)}{x^2}$，

令 $h'(x)=0$，解得 $x=1$（$x=-3$ 舍去），…………………………………………（7 分）

当 $x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ 时，$h'(x)<0$，当 $x\in(1,4)$ 时，$h'(x)>0$，

所以 $h(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 上单调递减，在 $(1,4)$ 上单调递增，所以 $h(x)_{\max}=\max\left\{h\left(\frac{1}{2}\right),h(4)\right\}$. ………（9 分）

因为 $h\left(\frac{1}{2}\right)=2\ln\frac{1}{2}+\frac{13}{2}$，$h(4)=4\ln 2+\frac{19}{4}$，

且 $h(4)-h\left(\frac{1}{2}\right)=4\ln 2+\frac{19}{4}-2\ln\frac{1}{2}-\frac{13}{2}=6\ln 2-\frac{7}{4}>0$，

所以 $h(4)>h\left(\frac{1}{2}\right)$，…………………………………………………（11 分）

所以 $a\leqslant 4\ln 2+\frac{19}{4}$，即实数 a 的取值范围是 $\left(-\infty,4\ln 2+\frac{19}{4}\right]$. ………………………（12 分）

22. **解析** （Ⅰ）由曲线 C 的参数方程消去参数 α，得普通方程为 $(x-1)^2+(y-\sqrt{3})^2=6$. ………（2 分）

因为 $\rho\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=1$，所以 $\frac{\sqrt{3}\rho\sin\theta}{2}-\frac{\rho\cos\theta}{2}=1$，将 $\rho\cos\theta=x$，$\rho\sin\theta=y$ 代入得 $\sqrt{3}y-x=2$. ………（4 分）

(Ⅱ)由于直线 l 与 x 轴的交点坐标为 $(-2,0)$,倾斜角为 $\frac{\pi}{6}$, …………………………………………… (5 分)

所以直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=-2+\frac{\sqrt{3}}{2}t, \\ y=\frac{1}{2}t \end{cases}$ (t 为参数), …………………………………………… (6 分)

代入 $(x-1)^2+(y-\sqrt{3})^2=6$,得 $t^2-4\sqrt{3}t+6=0$,

设 A,B 对应的参数分别为 t_1,t_2,则 $t_1+t_2=4\sqrt{3}$,$t_1t_2=6$, …………………………………………… (8 分)

所以 $|PA|^2+|PB|^2=t_1^2+t_2^2=(t_1+t_2)^2-2t_1t_2=36$. …………………………………………… (10 分)

23. **解析** (Ⅰ)由 $f(x)+2\leqslant g(x)$,可得 $2|x+1|+2\leqslant 4+|2x-1|$, …………………………………………… (1 分)

当 $x\geqslant\frac{1}{2}$ 时,原不等式可化为 $2(x+1)+2\leqslant 4+(2x-1)$,化简得 $4\leqslant 3$,不成立; …………………… (2 分)

当 $-1<x<\frac{1}{2}$ 时,原不等式可化为 $2(x+1)+2\leqslant 4-(2x-1)$,解得 $x\leqslant\frac{1}{4}$,故 $-1<x\leqslant\frac{1}{4}$; ………… (3 分)

当 $x\leqslant -1$ 时,原不等式可化为 $-2(x+1)+2\leqslant 4-(2x-1)$,化简得 $0\leqslant 5$,恒成立,故 $x\leqslant -1$. ……… (4 分)

综上可知 x 的取值范围为 $\left(-\infty,\frac{1}{4}\right]$. …………………………………………… (5 分)

(Ⅱ)因为 $f(x)+g(x)=|2x+2|+4+|2x-1|\geqslant|2x+2-(2x-1)|+4=7$, ………………………… (7 分)

由题可知关于 x 的不等式 $f(x)+g(x)\geqslant 2a^2-13a$ 的解集为 $\mathbf{R}$,所以 $7\geqslant 2a^2-13a$, ………………… (8 分)

解得 $-\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 7$.

故实数 a 的取值范围是 $\left[-\frac{1}{2},7\right]$. …………………………………………… (10 分)