百校联盟 2021届普通高中教育教学质量监测考试
全国卷　理科数学

注意事项：

1. 本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分.
2. 答题前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在本试卷相应的位置.
3. 全部答案写在答题卡上,写在本试卷上无效.
4. 本试卷满分150分,测试时间120分钟.
5. 考试范围:必修1～5,选修2—1,2—2,2—3.

第Ⅰ卷

一、选择题:本大题共12小题,每小题5分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 若 $z=2-i$,则 $|z^2-z|=$

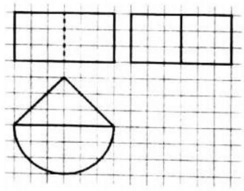
A. 3　　B. 2　　C. $\sqrt{10}$　　D. $\sqrt{26}$

2. 若集合 $A=\{x|y=\log_3(x^2-3x-18)\}$,$B=\{-5,-2,2,5,7\}$,则 $A\cap B=$

A. $\{-2,2,5\}$　　B. $\{-5,7\}$　　C. $\{-5,-2,7\}$　　D. $\{-5,5,7\}$

3. 我国古代的宫殿金碧辉煌,设计巧夺天工,下图(1)为北京某宫殿建筑,图(2)为该宫殿某一"柱脚"的三视图,其中小正方形的边长为1,则根据三视图可知,该"柱脚"的表面积为

图(1)



图(2)

A. $9\pi+9\sqrt{2}+9$　　B. $18\pi+18\sqrt{2}+9$

C. $18\pi+18\sqrt{2}+18$　　D. $18\pi+9\sqrt{2}+18$

4. 已知抛物线 $C_1:y^2=6x$ 上的点 M 到焦点 F 的距离为 $\frac{9}{2}$,若点 N 在 $C_2:(x+2)^2+y^2=1$ 上,则点 M 到点 N 距离的最小值为

A. $\sqrt{26}-1$　　B. $\sqrt{43}-1$　　C. $\sqrt{33}-1$　　D. 2

5. 根据散点图可知,变量 x,y 呈现非线性关系.为了进行线性回归分析,设 $u=2\ln y$,$v=(2x-3)^2$,利用最小二乘法,得到线性回归方程 $u=-\frac{1}{3}v+2$,则

A. 变量 y 的估计值的最大值为 e　　B. 变量 y 的估计值的最小值为 e

C. 变量 y 的估计值的最大值为 e^2　　D. 变量 y 的估计值的最小值为 e^2

6. 函数 $f(x)=\ln 2x-x^3$ 的图象在点 $(\frac{1}{2},f(\frac{1}{2}))$ 处的切线方程为

A. $y=\frac{5}{4}x-\frac{3}{4}$　　B. $y=-\frac{5}{4}x+2$　　C. $y=\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}$　　D. $y=-\frac{1}{4}x$

7. 已知函数 $f(x)=3\cos(\omega x+\varphi)(\omega>0)$,若 $f(-\frac{\pi}{3})=3$,$f(\frac{\pi}{3})=0$,则 ω 的最小值为

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. 2　　D. 3

8. $(3x-2)^2(x-2)^6$ 的展开式中，x^4 的系数为

A. 0　　B. 4320　　C. 480　　D. 3840

9. 已知圆 C 过点 $(1,3),(0,2),(7,-5)$，直线 $l:12x-5y-1=0$ 与圆 C 交于 M,N 两点，则 $|MN|=$

A. 3　　B. 4　　C. 6　　D. 8

10. 已知角 α 的顶点在原点，始边与 x 轴的非负半轴重合，终边过点 $(1,m)$，其中 $m>0$；若 $\tan2\alpha=-\frac{12}{5}$，则 $\cos(2\alpha+m\pi)=$

A. $-\frac{6}{13}$　　B. $-\frac{12}{13}$　　C. $\frac{6}{13}$　　D. $\frac{12}{13}$

11. 已知三棱锥 $S-ABC$ 中，$\triangle SBC$ 为等腰直角三角形，$\angle BSC=\angle ABC=90^\circ$，$\angle BAC=2\angle BCA$，$D,E,F$ 分别为线段 AB,BC,AC 的中点，则直线 SA,SB,AC,SD 中，与平面 SEF 所成角为定值的有

A. 1 条　　B. 2 条　　C. 3 条　　D. 4 条

12. 已知函数 $f(x)=\frac{e^x}{x}-m(\ln x+x+\frac{2}{x})$ 恰有两个极值点，则实数 m 的取值范围为

A. $(-\infty,\frac{1}{2}]$　　B. $(\frac{1}{2},+\infty)$

C. $(\frac{1}{2},\frac{e}{3})\cup(\frac{e}{3},+\infty)$　　D. $(-\infty,\frac{1}{2}]\cup(\frac{e}{3},+\infty)$

第Ⅱ卷

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分.

13. 若实数 x,y 满足 $\begin{cases}x+2\geqslant0\\x-y\leqslant0\\x+y-3\leqslant0\end{cases}$，则 $z=2x+y$ 的最大值为________.

14. 已知 $|\boldsymbol{a}|=5,|\boldsymbol{b}|=3$，若 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向上的投影为 -3，则 $|2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}|=$________.

15. 已知三棱锥 $S-ABC$ 中，$SA\perp$ 平面 ABC，$SA=AB=4,BC=6,AC=2\sqrt{13}$，则三棱锥 $S-ABC$ 外接球的表面积为________.

16. 已知 O 为坐标原点，双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AF_2}$，以 A 为圆心的圆 A 与 y 轴相切，且与双曲线的一条渐近线交于点 O,P，记双曲线 C 的左顶点为 M，若 $\angle PMF_2=\angle PF_2M$，则双曲线 C 的渐近线方程为________.

三、解答题：解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分 10 分）

已知△ABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，$b-\frac{5a\cos C}{c}=5\cos A$.

(1) 求 c；

(2) 若 $b=7,B=\frac{\pi}{3}$，点 M 在线段 BC 上，$AM=5$，求 $\angle MAC$ 的余弦值.

18.（本小题满分 12 分）

已知数列$\{a_n\}$满足 $a_2=2a_1=4$，且 $a_{n+1}-b_n=2a_n$，数列$\{b_n\}$是公差为-1的等差数列.

(1)证明$\{a_n-n\}$是等比数列；

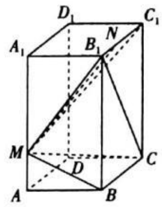
(2)求使得 $a_1+a_2+\cdots+a_n>2200$ 成立的最小正整数 n 的值.

19.（本小题满分 12 分）

已知长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=BC=2$，$BB_1=3\sqrt{2}$，点 M 是线段 AA_1 上靠近 A 的三等分点，点 N 在线段 B_1C_1 上.

(1)求证：$BM\perp MN$；

(2)求二面角 $C-B_1M-C_1$ 的余弦值.



20.（本小题满分 12 分）

疫情过后，为了增加超市的购买力，营销人员采取了相应的推广手段，每位顾客消费达到 100 元以上可以获得相应的积分，每花费 100 积分可以参与超市的抽奖游戏，游戏规则如下：抽奖箱中放有 2 张奖券，3 张白券，每次任取两张券，每个人有放回的抽取三次，即完成一轮抽奖游戏；若摸出的结果是“2 张奖券”三次，则获得 10100 积分，若摸出的结果是“2 张奖券”一次或两次，则获得 300 积分，若摸出“2 张奖券”的次数为零，则获得 0 积分；获得的积分扣除花费的 100 积分，则为该顾客所得的最终积分；最终积分若达到一定的标准，可以兑换电饭锅、洗衣机等生活用品.

(1)求一轮抽奖游戏中，甲摸出“2 张奖券”的次数为零的概率；

(2)记一轮抽奖游戏中，甲摸出“2 张奖券”的次数为 X，求 X 的分布列以及数学期望；

(3)试用概率与统计的相关知识，从数学期望的角度进行分析，多次参与抽奖游戏后，甲的最终积分情况.

21.（本小题满分 12 分）

已知椭圆 $C:\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，且过点 $(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）若过点 $D(-\frac{1}{3},0)$ 且斜率不为 0 的直线与椭圆 C 交于 P,Q 两点，点 $A(1,0)$，求证：$AP\perp AQ$.

22.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=mx^2+\ln x$.

（1）若 $m=-4$，求函数 $f(x)$ 的单调递增区间；

（2）设 x_1,x_2 是 $f'(x)=1$ 的两个不相等的正实数解，求证：$f(x_1)+f(x_2)+3<\ln 4+x_1+x_2$.

2021 届普通高中教育教学质量监测考试

全国卷　理科数学　参考答案

1. C 【解析】依题意，$z^2=(2-\mathrm{i})^2=3-4\mathrm{i}$，故 $|z^2-z|=|3-4\mathrm{i}-2+\mathrm{i}|=|1-3\mathrm{i}|=\sqrt{10}$.

2. B 【解析】依题意，$A=\{x|x^2-3x-18>0\}=\{x|x<-3$ 或 $x>6\}$，故 $A\cap B=\{-5,7\}$.

3. C 【解析】根据“柱脚”的三视图可知，该“柱脚”是由半圆柱和一个三棱柱组合而成，故所求表面积 $S=\pi\times3\times3+\pi\times3^2+6\times3+3\sqrt{2}\times3\times2=18(\pi+\sqrt{2}+1)$.

4. B 【解析】依题意，$|MF|=x_M+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$，故 $x_M=3$，则 $y_M=\pm\sqrt{6x_M}=\pm3\sqrt{2}$；由对称性，不妨设 $M(3,3\sqrt{2})$，故 M 到点 N 距离的最小值为 $\sqrt{(3+2)^2+(3\sqrt{2})^2}-1=\sqrt{43}-1$.

5. A 【解析】依题意，$2\ln y=-\frac{1}{3}(2x-3)^2+2$，则 $\ln y=-\frac{1}{6}(2x-3)^2+1$，则 $y=\mathrm{e}^{-\frac{1}{6}(2x-3)^2+1}$，故当 $x=\frac{3}{2}$ 时，变量 y 的估计值的最大值为 e.

6. A 【解析】依题意，$f(\frac{1}{2})=-\frac{1}{8}$，$f'(x)=\frac{1}{x}-3x^2$，故切线斜率 $k=f'(\frac{1}{2})=2-\frac{3}{4}=\frac{5}{4}$，所求切线方程为 $y-(-\frac{1}{8})=\frac{5}{4}(x-\frac{1}{2})$，即 $y=\frac{5}{4}x-\frac{3}{4}$.

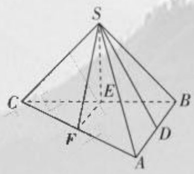
7. B 【解析】依题意，$f(-\frac{\pi}{3})=3$，$f(\frac{\pi}{3})=0$，故 $\frac{T}{4}+k\cdot\frac{T}{2}=\frac{\pi}{3}-(-\frac{\pi}{3})$，即 $\frac{(2k+1)T}{4}=\frac{2\pi}{3}$，故 $\frac{(2k+1)}{4}\cdot\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{3}$，解得 $\omega=\frac{3(2k+1)}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$；因为 $\omega>0$，故 ω 的最小值为 $\frac{3}{4}$.

8. B 【解析】依题意，$(3x-2)^2(x-2)^6=(9x^2-12x+4)(x-2)^6$，故 x^4 的系数为 $9\times C_6^2\times(-2)^4-12\times C_6^3\times(-2)^3+4\times C_6^4\times(-2)^2=2160+1920+240=4320$.

9. C 【解析】设圆 $C:x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，故 $\begin{cases}10+D+3E+F=0\\4+2E+F=0\\74+7D-5E+F=0\end{cases}$，解得 $D=-8$，$E=2$，$F=-8$，故圆 C：$(x-4)^2+(y+1)^2=25$；则圆心 $(4,-1)$ 到直线 l：$12x-5y-1=0$ 的距离 $d=\frac{|48+5-1|}{\sqrt{12^2+(-5)^2}}=4$，故 $|MN|=2\sqrt{r^2-d^2}=6$.

10. D 【解析】依题意，$\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=-\frac{12}{5}$，解得 $\tan\alpha=-\frac{2}{3}$ 或 $\tan\alpha=\frac{3}{2}$；因为 $m>0$，故 $\tan\alpha=\frac{3}{2}=m$，则 $\sin\alpha=\frac{3}{\sqrt{13}}$，$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{13}}$，故 $\cos(2\alpha+\frac{3}{2}\pi)=\sin2\alpha=\frac{12}{13}$.

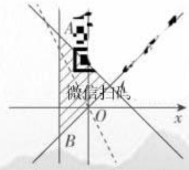
11. B 【解析】作出图形如右所示；因为 E、F 分别为线段 BC，AC 的中点，故 $EF//AB$，则 $EF\perp BC$；而 $CS=BS$，则 $SE\perp BC$，$SE\cap EF=E$，故 $BC\perp$ 平面 SEF，故 BS 与平面 SEF 所成角为 $\angle BSE$，大小为 $45°$，AC 与平面 SEF 所成的角为 $\angle CFE=\angle A=60°$，由于平面 SBC 与平面 ABC 的位置关系未知，故 SA，SD 与平面 SEF 所成的角不为定值.



12. C 【解析】依题意，$f'(x)=\frac{(x-1)\mathrm{e}^x}{x^2}-m(\frac{1}{x}+1-\frac{2}{x^2})=\frac{(x-1)(x+2)(\frac{\mathrm{e}^x}{x+2}-m)}{x^2}$；因为 $f(x)$ 恰有两个极值点，所以 $f'(x)=0$ 恰有两个不同的解，显然 $x=1$ 是其中一个解，另一解由 $\frac{\mathrm{e}^x}{x+2}-m=0$ 产生，该解大于 0

且不为 1；令 $g(x)=\frac{e^x}{x+2}$，则 $g'(x)=\frac{e^x(x+1)}{(x+2)^2}>0$，故函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，从而 $g(x)>g(0)=\frac{1}{2}$，故 $m>\frac{1}{2}$，又 $\frac{e^x}{x+2}-m=0$ 解不能是 1，故 $m\neq\frac{e}{3}$，所以范围为 $(\frac{1}{2},\frac{e}{3})\cup(\frac{e}{3},+\infty)$.

13. $\frac{9}{2}$ 【解析】不等式组所表示的平面区域如图中阴影部分所示；观察可知，当直线 $z=2x+y$ 过点 C 时，z 有最大值；联立 $\begin{cases}x-y=0\\x+y-3=0\end{cases}$，解得 $x=y=\frac{3}{2}$，故 $z=2x+y$ 的最大值为 $\frac{9}{2}$.



14. $\sqrt{73}$ 【解析】依题意，$|\boldsymbol{a}|\cdot\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=-3$，则 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=-\frac{3}{5}$，故 $|2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}|=\sqrt{4\boldsymbol{a}^2+12\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+9\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{100-108+81}=\sqrt{73}$.

15. 68π 【解析】依题意，$AB^2+BC^2=AC^2$，故 $AB\perp BC$；将三棱锥 $S-ABC$ 置于棱长为 4，4，6 的长方体中，可知三棱锥 $S-ABC$ 外接球的半径 $R=\frac{\sqrt{4^2+4^2+6^2}}{2}$，故外接球表面积 $S=4\pi R^2=68\pi$.

16. $y=\pm\sqrt{3}x$ 【解析】依题意，圆 A：$(x-\frac{c}{2})^2+y^2=\frac{c^2}{4}$；不妨设点 P 在第一象限，联立 $\begin{cases}(x-\frac{c}{2})^2+y^2=\frac{c^2}{4}\\y=\frac{b}{a}x\end{cases}$，解得 $x=\frac{a^2}{c}$；而 $\angle PMF_2=\angle PF_2M$，故 $\frac{a^2}{c}=\frac{c-a}{2}$，解得 $\frac{c}{a}=2$，故 $\frac{b}{a}=\sqrt{3}$，即所求渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$.

17.【解析】(1)依题意，$b-\frac{5\sin A\cos C}{\sin C}=5\cos A$，…… 1 分

故 $b\sin C-5\sin A\cos C=5\cos A\sin C$，…… 2 分

则 $c\sin B=5(\cos A\sin C+\sin A\cos C)=5\sin B$，…… 4 分

因为 $\sin B\neq0$，故 $c=5$. …… 5 分

(2)因为 $B=\frac{\pi}{3}$，故 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=25+a^2-2\cdot5a\cdot\cos\frac{\pi}{3}=49$，

故 $a^2-5a-24=0$，因为 $a>0$，故 $a=8$；…… 7 分

在 $\triangle ABM$ 中，$B=\frac{\pi}{3}$，$AM=AB$，故 $\triangle ABM$ 是等边三角形，

故 $BM=AB=5$，$MC=3$，…… 9 分

故 $\cos\angle MAC=\frac{AM^2+AC^2-MC^2}{2AM\cdot AC}=\frac{25+49-9}{2\times5\times7}=\frac{13}{14}$. …… 10 分

18.【解析】依题意，$a_{n+1}=2a_n+b_n$，

当 $n=1$ 时，$a_2=2a_1+b_1$，即 $4=4+b_1$，故 $b_1=0$，…… 1 分

则 $b_n=0+(n-1)\cdot(-1)=-n+1$，故 $a_{n+1}=2a_n-n+1$，…… 3 分

故 $\frac{a_{n+1}-(n+1)}{a_n-n}=\frac{2a_n-n+1-(n+1)}{a_n-n}=\frac{2(a_n-n)}{a_n-n}=2$，…… 5 分

而 $a_1-1=1$，故 $\{a_n-n\}$ 是以 1 为首项，2 为公比的等比数列. …… 6 分

(2)由(1)可知，$a_n-n=2^{n-1}$，故 $a_n=n+2^{n-1}$，…… 7 分

记 $a_1+a_2+\cdots+a_n=S_n$，

故 $S_n=(1+2+\cdots+n)+(2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{n-1})=\frac{n(1+n)}{2}+\frac{1-2^n}{1-2}=\frac{n^2+n}{2}+2^n-1$，…… 9 分

因为 $S_{11}=2113<2200$，$S_{12}=4173>2200$，…… 11 分

而 $\{S_n\}$ 是递增数列，故满足 $a_1+a_2+\cdots+a_n>2200$ 的最小正整数 n 的值为 12. …… 12 分

19.【解析】(1)证明：因为 $AM=\sqrt{2}$，$A_1M=2\sqrt{2}$，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，

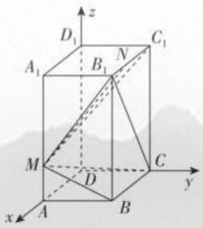
$B_1M=\sqrt{A_1M^2+A_1B_1^2}=2\sqrt{3}$，$BM=\sqrt{AM^2+AB^2}=\sqrt{6}$，

故 $B_1B^2=B_1M^2+BM^2=18$，即 $BM\perp B_1M$；…………………………………… 3 分

因为 $B_1C_1\perp$ 平面 A_1ABB_1，$BM\subset$ 平面 A_1ABB_1，故 $B_1C_1\perp BM$；……………………………… 4 分

又 $B_1C_1\cap B_1M=B_1$，故 $BM\perp$ 平面 B_1C_1M；而 $MN\subset$ 平面 B_1C_1M，故 $BM\perp MN$. ………………… 5 分

(2)如图所示，以 D 为原点，DA，DC，DD_1 所在直线分别为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系，则 $B_1(2,2,3\sqrt{2})$，$M(2,0,\sqrt{2})$，$C(0,2,0)$，$B(2,2,0)$，…………………… 6 分



则 $\overrightarrow{CB_1}=(2,0,3\sqrt{2})$，$\overrightarrow{MB_1}=(0,2,2\sqrt{2})$，

设平面 CB_1M 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CB_1}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{MB_1}=0\end{cases}$，则 $\begin{cases}2x+3\sqrt{2}z=0\\ 2y+2\sqrt{2}z=0\end{cases}$，

令 $z=\sqrt{2}$，则 $x=-3$，$y=-2$，故平面 CB_1M 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(-3,-2,\sqrt{2})$，

……………………………………………………………………………… 8 分

由(1)可知，平面 C_1B_1M 的一个法向量为 $\overrightarrow{BM}=(0,-2,\sqrt{2})$，…………………………………… 10 分

故 $\cos\langle\overrightarrow{BM},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{BM}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{BM}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$，……………………………………………… 11 分

因为二面角 $C-B_1M-C_1$ 为锐二面角，故二面角 $C-B_1M-C_1$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$. ……………………… 12 分

20.【解析】(1)每次抽取，摸出“2 张奖券”的概率 $p=\dfrac{C_2^2}{C_5^2}=\dfrac{1}{10}$，……………………………………… 1 分

故一轮游戏中，甲摸出“2 张奖券”的次数为零的概率 $P(A)=(\dfrac{9}{10})^3=\dfrac{729}{1000}$. ………………………… 3 分

(2)依题意，X 的可能取值为 0，1，2，3，故 $P(X=0)=P(A)=\dfrac{729}{1000}$，$P(X=1)=C_3^1\cdot\dfrac{1}{10}\cdot(1-\dfrac{1}{10})^2=\dfrac{243}{1000}$，

$P(X=2)=C_3^2\cdot(\dfrac{1}{10})^2\cdot(1-\dfrac{1}{10})=\dfrac{27}{1000}$，$P(X=3)=(\dfrac{1}{10})^3=\dfrac{1}{1000}$，…………………………… 5 分

故 X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{729}{1000}$	$\dfrac{243}{1000}$	$\dfrac{27}{1000}$	$\dfrac{1}{1000}$

……………………………………………………………………………………… 6 分

故 $E(X)=3\times\dfrac{1}{10}=\dfrac{3}{10}$. ……………………………………………………………… 7 分

(3)记一轮抽奖游戏后，甲的最终积分为 Y，则 Y 的分布列为

Y	-100	200	10000
P	$\dfrac{729}{1000}$	$\dfrac{270}{1000}$	$\dfrac{1}{1000}$

……………………………………………………………………………………… 8 分

故 $E(Y)=\dfrac{-72900+54000+10000}{1000}=-8.9$，……………………………………………… 10 分

可知一轮游戏过后，甲的最终积分的期望为负数，

故多次参与抽奖活动后，可以估计甲的最终积分会越来越少. ……………………………………… 12 分

21.【解析】(1)依题意，$\begin{cases}\dfrac{c}{a}=\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \dfrac{1}{2a^2}+\dfrac{3}{4b^2}=1\end{cases}$，……………………………………………… 2 分

解得 $\begin{cases} a^2=2 \\ b^2=1 \end{cases}$, ………………………………………… 4 分

故椭圆 C 的方程为 $\frac{y^2}{2}+x^2=1$. ………………………………………………

(2)当斜率不为零时,设过点 $(-\frac{1}{3},0)$ 直线为 $x=ty-\frac{1}{3}$, …………………………………………

设 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$,

由 $\begin{cases} x=ty-\frac{1}{3} \\ \frac{y^2}{2}+x^2=1 \end{cases}$,得 $(9+18t^2)y^2-12ty-16=0$,且 $\Delta>0$.

则 $\begin{cases} y_1+y_2=\frac{12t}{9+18t^2} \\ y_1y_2=-\frac{16}{9+18t^2} \end{cases}$, ………………………………………… 8 分

又因为 $\overrightarrow{AP}=(x_1-1,y_1)$, $\overrightarrow{AQ}=(x_2-1,y_2)$. ………………………………………… 9 分

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=(x_1-1)(x_2-1)+y_1y_2=(ty_1-\frac{4}{3})(ty_2-\frac{4}{3})+y_1y_2=(1+t^2)y_1y_2-\frac{4}{3}t(y_1+y_2)+\frac{16}{9}=(1+t^2)\frac{-16}{9+18t^2}-\frac{4t}{3}\cdot\frac{12t}{9+18t^2}+\frac{16}{9}=0$, ………………………………………… 11 分

所以 $AP\perp AQ$. ………………………………………… 12 分

22.【解析】(1)依题意,$x\in(0,+\infty)$, $f(x)=\ln x-4x^2$,

$f'(x)=-8x+\frac{1}{x}=\frac{1-8x^2}{x}=\frac{(1+2\sqrt{2}x)(1-2\sqrt{2}x)}{x}$. ………………………………………… 1 分

令 $f'(x)>0$,故 $1-2\sqrt{2}x>0$,解得 $x<\frac{\sqrt{2}}{4}$, ………………………………………… 3 分

故函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,\frac{\sqrt{2}}{4})$. ………………………………………… 4 分

(2)依题意,$f'(x)=2mx+\frac{1}{x}$,所以 x_1,x_2 是 $2mx^2-x+1=0$ 的两个不相等的正实数解; …………… 5 分

则 $\begin{cases} m>0 \\ \Delta=1-8m>0 \\ x_1+x_2=\frac{1}{2m}>0 \\ x_1\cdot x_2=\frac{1}{2m}>0 \end{cases}$,解得 $0<m<\frac{1}{8}$, ………………………………………… 6 分

$f(x_1)+f(x_2)-x_1-x_2=mx_1^2+mx_2^2-(x_1+x_2)+\ln x_1+\ln x_2=m(x_1^2+x_2^2)-(x_1+x_2)+\ln(x_1x_2)$

$=m[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]-(x_1+x_2)+\ln(x_1x_2)=\ln\frac{1}{2m}-\frac{1}{4m}-1$. ………………………………………… 8 分

令 $t=\frac{1}{2m}$, $g(t)=\ln t-\frac{t}{2}-1$, $t\in(4,+\infty)$, ………………………………………… 9 分

则 $g'(t)=\frac{1}{t}-\frac{1}{2}=\frac{2-t}{2t}<0$, $\therefore g(t)$ 在 $(4,+\infty)$ 上单调递减. ………………………………………… 10 分

$\therefore g(t)<g(4)=\ln 4-3$, ………………………………………… 11 分

即 $f(x_1)+f(x_2)+3<\ln 4+x_1+x_2$. ………………………………………… 12 分

（本文内容来源于：大联考 APP）