2023 年普通高等学校招生全国统一考试
高三第三次联合诊断检测　数学参考答案

一、单选题

1～8 CBDB　ACCC

第 8 题提示：圆内接n边形为正n边形时面积最大，要使棱柱体积最大，可知上下底面为正n边形，由正n边形与外接圆的面积比不依赖于圆的半径，故只需考虑球体内接圆柱体积最大时，上下底面间的距离，设圆柱底面圆的半径为r，则球心到圆柱底面圆的距离为$\sqrt{1-r^2}$，圆柱体积为$2\pi r^2\sqrt{1-r^2}$，考虑函数$f(x)=x\sqrt{1-x}$，$f'(x)=\dfrac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}$，可知$r^2=x=\dfrac{2}{3}$时体积最大.

二、多选题

9.　ACD　　10.　ACD　　11.　BCD　　12.　ABD

第 12 题提示：令$y=1$，得$2(x+1)f(x)=xf(x+1)$，令$x=0$，得$f(0)=0$，令$x=1$，得$f(2)=4f(1)=8$

显然$f(x)=x\cdot 2^x$是一个满足条件的函数，故 C 错误

由$\dfrac{f(x+1)}{x+1}=2\cdot\dfrac{f(x)}{x}$，记$a_n=\dfrac{f(n)}{n}$，可知$a_{n+1}=2a_n$，$\{a_n\}$为等比数列

$a_n=2^n$，$f(n)=n\cdot 2^n$，$\therefore \sum\limits_{k=1}^{n}f(k)=(n-1)\cdot 2^{n+1}+2$

三、填空题

13.　0.728　　14.　$\dfrac{1}{2}+\sqrt{2}$　　15.　$\sqrt{2}$　　16.　$(0,\dfrac{\sqrt{3}}{3})$

第 16 题提示：设$PF_1=n,PF_2=m,\angle PF_2F_1=\alpha$，

由正弦定理$\dfrac{m}{\sin 3\alpha}=\dfrac{n}{\sin\alpha}=\dfrac{2c}{\sin 4\alpha}=\dfrac{m+n}{\sin 3\alpha+\sin\alpha}=\dfrac{2a}{\sin 3\alpha+\sin\alpha}$

$\therefore e=\dfrac{\sin 4\alpha}{\sin 3\alpha+\sin\alpha}=\dfrac{2\sin 2\alpha\cos 2\alpha}{4\sin\alpha-4\sin^3\alpha}=\dfrac{2\cos^2\alpha-1}{\cos\alpha}$

由$\alpha\in(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{4})$，$\cos\alpha\in(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，可得$e\in(0,\dfrac{\sqrt{3}}{3})$

四、解答题

17.（10 分）

解：（1）$\because S_{n+1}=2S_n+1$，$\therefore S_n=2S_{n-1}+1\,(n\geq 2)$

两式相减得$a_{n+1}=2a_n\,(n\geq 2)$，即数列$\{a_n\}$从第二项开始为等比数列

令$n=1$，$\therefore S_2=a_1+a_2=2a_1+1$，$a_2=2$

$\therefore a_2=2a_1$，$\therefore$数列$\{a_n\}$为等比数列，$a_n=a_1\cdot q^{n-1}=2^{n-1}$…………5 分

（2）$b_n=2^{n-1}\cdot 2^n+\log_2(2^{n-1}\cdot 2^n)=\frac{1}{2}\cdot 4^n+2n-1$，设$T_n$为$\{b_n\}$的前$n$项和

$T_n=\frac{1}{2}(4+4^2+\cdots+4^n)+(1+3+\cdots+2n-1)$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{4(1-4^n)}{1-4}+n^2=\frac{2}{3}\cdot 4^n-\frac{2}{3}+n^2$ …………10 分

18.（12 分）

解：（1）由题$\sin A\cos B\sin C-\cos A\sin B\sin C=\sin A\sin B\cos C$

由正弦定理，$ac\cos B-bc\cos A=ab\cos C$

由余弦定理，$ac\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}-bc\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=ab\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

化简整理得$a^2+c^2=3b^2$，$\frac{a^2+c^2}{b^2}=3$ …………6 分

（2）由题$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{2}{3}$

联立$a^2+c^2=3b^2$得$a^2+c^2-2ac=0$，$\therefore a=c$，$\triangle ABC$为等腰三角形

$\therefore \sin A=\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2})=\cos\frac{B}{2}$

由$\cos B=2\cos^2\frac{B}{2}-1=\frac{2}{3}$，解得$\sin A=\cos\frac{B}{2}=\frac{\sqrt{30}}{6}$ …………12 分

19.（12 分）

解：（1）设$\triangle BDC$的外心为P，$\because$球心O到底面的距离为1，$\therefore OP=1$

$\because\triangle BCD$是边长为$\sqrt{3}$等边三角形，$\therefore BP=1$

$\therefore OB=\sqrt{OP^2+BP^2}=\sqrt{2}$，球$O$的表面积为$4\pi OB^2=8\pi$………………6 分

（2）以DC中点M为原点，$\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC},\overrightarrow{PO}$分别为$x,y,z$轴正向建立空间直角坐标系

$\therefore B(\frac{3}{2},0,0)$，$C(0,\frac{\sqrt{3}}{2},0)$，$D(0,-\frac{\sqrt{3}}{2},0)$，$O(\frac{1}{2},0,1)$，$A(-\frac{1}{2},0,2)$

$\overrightarrow{AC}=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},-2)$，$\overrightarrow{BC}=(-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0)$，$\overrightarrow{DC}=(0,\sqrt{3},0)$

设平面ABC的法向量为$\vec{n}$，由$\begin{cases}\overrightarrow{AC}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{BC}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$，令$x=1$，解得$\vec{n}=(1,\sqrt{3},1)$

设平面 ABC 的法向量为 $\vec{m}$，由 $\begin{cases}\overrightarrow{AC}\cdot\vec{m}=0\\\overrightarrow{DC}\cdot\vec{m}=0\end{cases}$，令 $z=1$，解得 $\vec{m}=(4,0,1)$

设二面角 $B-AC-D$ 的平面角为 θ，$\cos\theta=\dfrac{\vec{n}\cdot\vec{m}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{m}|}=\dfrac{\sqrt{85}}{17}$ ………………12 分

20.（12 分）

解：（1）设甲一局的得分为 ξ_1，由题得

$$P(\xi_1=1)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}，P(\xi_1=3)=\frac{1}{3}，P(\xi_1=0)=1-P(\xi_1=1)-P(\xi_1=3)=\frac{1}{3}$$

设乙一局的得分为 ξ_2，由题得

$$P(\xi_2=1)=\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{11}{30}，P(\xi_2=3)=\frac{1}{4}，P(\xi_2=0)=1-P(\xi_2=1)-P(\xi_2=3)=\frac{23}{60}$$

若最后一轮甲反败为胜，其概率为 $P=P(X=3,Y=0)+P(X=3,Y=1)$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{23}{60}+\frac{1}{3}\cdot\frac{11}{30}=\frac{1}{4}$$ ………………6 分

（2）列出 X,Y 和 $|X-Y|$ 取值相应的概率表如下：

P \ X, Y	3	1	0
3	$P(\lvert X-Y\rvert=0)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$	$P(\lvert X-Y\rvert=2)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$	$P(\lvert X-Y\rvert=3)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$
1	$P(\lvert X-Y\rvert=2)=\frac{1}{3}\cdot\frac{11}{30}=\frac{11}{90}$	$P(\lvert X-Y\rvert=0)=\frac{1}{3}\cdot\frac{11}{30}=\frac{11}{90}$	$P(\lvert X-Y\rvert=1)=\frac{1}{3}\cdot\frac{11}{30}=\frac{11}{90}$
0	$P(\lvert X-Y\rvert=3)=\frac{1}{3}\cdot\frac{23}{60}=\frac{23}{180}$	$P(\lvert X-Y\rvert=1)=\frac{1}{3}\cdot\frac{23}{60}=\frac{23}{180}$	$P(\lvert X-Y\rvert=0)=\frac{1}{3}\cdot\frac{23}{60}=\frac{23}{180}$

由此可得 $Z=|X-Y|$ 的分布列

$Z=\lvert X-Y\rvert$	0	1	2	3
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{37}{180}$	$\frac{19}{90}$

$\therefore E(Z)=0\cdot\dfrac{1}{3}+1\cdot\dfrac{1}{4}+2\cdot\dfrac{37}{180}+3\cdot\dfrac{19}{90}=\dfrac{233}{180}$ ………………12 分

21.（12 分）

解：（1）$\because\triangle ABD$ 是面积为 $\sqrt{3}$ 的正三角形，$\therefore\begin{cases}\dfrac{1}{2}\cdot a\cdot 2b=\sqrt{3}\\ a=\sqrt{3}b\end{cases}\Rightarrow a=\sqrt{3},b=1$，

∴椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$ …………4 分

（2）设 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2),P'(x_1,-y_1),Q'(x_2,-y_2)$，∴ $l_{P'Q}: y=\frac{y_2+y_1}{x_2-x_1}(x-x_2)+y_2$

由对称性知 K 在 x 轴上，令 $y=0$，解得 $x_K=\frac{y_1x_2+x_1y_2}{y_1+y_2}$

设直线 $l_{PQ}: x=ty+m$，联立椭圆得 $(t^2+3)y^2+2tmy+m^2-3=0$

∴ $y_1+y_2=\frac{-2tm}{t^2+3}$，$y_1\cdot y_2=\frac{m^2-3}{t^2+3}$ （*）

$x_K=\frac{y_1x_2+x_1y_2}{y_1+y_2}=\frac{y_1(ty_2+m)+(ty_1+m)y_2}{y_1+y_2}=\frac{2ty_1y_2}{y_1+y_2}+m$

代入（*）得 $x_K=\frac{3}{m}$

∵ $\angle AKB$ 为钝角，∴ $\overline{AK}\cdot\overline{BK}<0$，即 $(\frac{3}{m},-1)\cdot(\frac{3}{m},1)=\frac{9}{m^2}-1<0$

解得 $m\in(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$ …………12 分

22.（12 分）

解：（1）曲线 $y=f(x)-g(x)=k^x-k\ln x$，$y'=k^x\ln k-\frac{k}{x}$，当 $x=1$ 时，$y'=k\ln k-k$，$y=k$，

故切线方程为 $y-k=(k\ln k-k)(x-1)$，整理有 $(k\ln k-k)x-y-k\ln k+2k=0$ …………4 分

（2）解法一：先设 $F(x)=h(x)-g(x)=kx-1-k\ln x$，$F'(x)=k-\frac{k}{x}=\frac{k(x-1)}{x}$，当 $x>1$ 时 $F'(x)>0$，

当 $0<x<1$ 时 $F'(x)<0$，所以 $F(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $F(1)=k-1\geq 0$，

故 $k>1$。

令 $H(x)=f(x)-h(x)=k^x-kx+1$，$H'(x)=k^x\ln k-k$，易知 $H'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

令 $k^{x_0}\ln k-k=0$，有 $x_0=\log_k\frac{k}{\ln k}$，有 $H(x_0)=\frac{k}{\ln k}-k\log_k\frac{k}{\ln k}+1\geq 0$，再令 $\ln k=t$，

$H(x_0)=\frac{e^t}{t}-e^t(1-\frac{\ln t}{t})+1\geq 0$，等价整理为 $\ln t+1+\frac{t}{e^t}-t\geq 0$，令 $M(t)=\ln t+1+\frac{t}{e^t}-t$，

$M'(t)=\frac{1}{t}+\frac{1-t}{e^t}-1=(1-t)(\frac{1}{t}+\frac{1}{e^t})$，当 $t>1$ 时 $M'(t)<0$，

当 $0<t<1$ 时 $M'(t)>0$，所以 $M(t)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

$M(\frac{1}{3})=\ln\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3\sqrt[3]{e}}=-\ln 3+\frac{2}{3}+\frac{1}{3\sqrt[3]{e}}<-\ln 3+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}<-1+1=0$

$M(\frac{1}{2})=\ln\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{e}}=\ln\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{e}}>\ln\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}-\ln 2$，而 $\ln e^3-\ln 2^4>0$，所以

$M(\frac{1}{2})>0$，故 $M(t)$ 在 $(\frac{1}{3},\frac{1}{2})$ 内存在唯一零点 t_0，有 $\ln k>t_0$，$k>e^{t_0}$，$e^{t_0}\in(\sqrt[3]{e},\sqrt{e})$，$e^{t_0}<2$，故 $k\geq 2$，所以符合条件的 k 的最小整数值为 2 …………12 分

解法二：先设 $F(x)=h(x)-g(x)=kx-1-k\ln x$，$F'(x)=k-\frac{k}{x}=\frac{k(x-1)}{x}$，当 $x>1$ 时 $F'(x)>0$，

当 $0<x<1$ 时 $F'(x)<0$，所以 $F(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $F(1)=k-1\geq 0$，

故 $k>1$。

令 $k=2$，有 $H(x)=f(x)-h(x)=2^x-2x+1$，$H'(x)=2^x\ln 2-2$，易知 $H'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

令 $2^{x_0}\ln 2-2=0$，有 $x_0=\log_2\frac{2}{\ln 2}$，

有 $H(x_0)=\frac{2}{\ln 2}-2\log_2\frac{2}{\ln 2}+1=\frac{2-\ln 2+\ln(\ln 2)^2}{\ln 2}=\frac{2-\ln\frac{2}{(\ln 2)^2}}{\ln 2}$，

由 $e^2<2^3,\ln 2>\frac{2}{3}$，故 $\ln\frac{2}{(\ln 2)^2}<\ln\frac{9}{2}$，$2-\ln\frac{2}{(\ln 2)^2}>2-\ln\frac{9}{2}=\ln\frac{2e^2}{9}>0$，所以 $H(x)>0$，

故符合条件的 k 的最小整数值为 2 …………12 分