

秘密★启用前

数学试卷

注意事项:

- 答题前,考生务必用黑色碳素笔将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号在答题卡上填写清楚.
- 每小题选出答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号.在试题卷上作答无效.
- 考试结束后,请将本试卷和答题卡一并交回.满分150分,考试用时120分钟.

一、单项选择题(本大题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求)

- 已知 $\vec{a}=(3, -2)$, $\vec{b}=(2, k)$, $k \in \mathbf{R}$, 若 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 则 $k=$
A. 3 B. $\frac{4}{3}$ C. $-\frac{4}{3}$ D. -3
- 已知 $A=\{x|x=3k+2, k \in \mathbf{N}\}$, $B=\{y|y=6m+5, m \in \mathbf{N}\}$, 则集合 A 与集合 B 之间的关系为
A. $A=B$ B. $B \subsetneq A$ C. $A \subsetneq B$ D. $A \cap B = \emptyset$
- 在复平面中,点 O 为坐标原点,记 \vec{OA} , \vec{OC} , \vec{AB} 表示的复数分别为 $2+i$, $-1+2i$, $1-2i$, 记 z 为 \vec{BC} 所表示的复数,则 $z \cdot \bar{z}=$
A. 25 B. 8 C. 5 D. $2+3i$
- $(1+2x)^6$ 的展开式中二项式系数最大的项是
A. 160 B. 240 C. $160x^3$ D. $240x^4$
- 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 满足 $S_9 - S_5 = 4$, 且 $a_1 = -25$, 则当 S_n 取得最小值时, n 的值为
A. 4 B. 5 C. 6 D. 7
- 近年来,天然气表观消费量从2006年的不到 $600 \times 10^8 \text{ m}^3$ 激增到2021年的 $3726 \times 10^8 \text{ m}^3$. 从2000年开始统计,记 k 表示从2000年开始的第几年, $0 \leq k, k \in \mathbf{N}$. 经计算机拟合后发现,天然气表观消费量随时间的变化情况符合 $V_k = V_0(1+r_n)^k$, 其中 V_k 是从2000年后第 k 年天然气消费量, V_0 是2000年的天然气消费量, r_n 是过去20年的年复合增长率. 已知2009年的天然气消费量为 $900 \times 10^8 \text{ m}^3$, 2018年的天然气消费量为 $2880 \times 10^8 \text{ m}^3$, 根据拟合的模型,可以预测2024年的天然气消费量约为
(参考数据: $2.88^{\frac{1}{3}} \approx 2.02$, $3.2^{\frac{2}{3}} \approx 2.17$, $4^{\frac{1}{3}} \approx 2.52$)
A. $5817.6 \times 10^8 \text{ m}^3$ B. $6249.6 \times 10^8 \text{ m}^3$
C. $6928.2 \times 10^8 \text{ m}^3$ D. $7257.6 \times 10^8 \text{ m}^3$
- 一名具有30多年医药研究和教学经验的医生面对这样一个问题:妇女患上乳腺癌的概率为0.8%. 如果一名妇女患上了乳腺癌,其X光片有90%的可能呈阳性;如果没有,则X光片呈阳性的概率为7%. 现知道一名妇女的X光片呈阳性,请帮助该医生计算这位妇女真正患上乳腺癌的概率约为
A. 9% B. 33% C. 70% D. 90%

8. 已知 F 为双曲线 $C: \frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ 的左焦点,过 F 的一条直线 l 与双曲线 C 交于 A, B 两点,与

双曲线 C 的渐近线交于 D, E 两点,若 $\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{\sqrt{13}}{2}$, 则直线 l 的斜率为

- A. $\pm \frac{\sqrt{3}}{6}$ B. $\pm \frac{\sqrt{3}}{4}$ C. $\pm \frac{\sqrt{5}}{3}$ D. ± 2

二、多项选择题(本大题共4小题,每小题5分,共20分.在每小题给出的四个选项中,有多项符合题目要求,全部选对的得5分,选对但不全的得2分,有选错的得0分)

9. 已知 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是定义在 \mathbf{R} 上的函数, $f(x+1)$ 是偶函数, $f(x)$ 关于 $x=-1$ 对称; $g(x-2)$ 是奇函数, $g(x)$ 关于 $x=1$ 对称,则下列说法正确的是

- A. 函数 $f(x)$ 的周期为2 B. $f(1)=0$
C. 函数 $g(x)$ 关于点 $(-2, 0)$ 对称 D. $g(4)=0$

10. 单摆是一种简谐运动,摆球的运动情况可以用三角函数表达为 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$, $A > 0$, $\omega > 0$, $|\varphi| < \pi$, 其中 x 表示时间(s), y 表示位移(cm), A 表示振幅, $\frac{\omega}{2\pi}$ 表示频率, φ 表示初相位. 如图1甲某个小球做单摆运动,规定摆球向右偏移的位移为正,竖

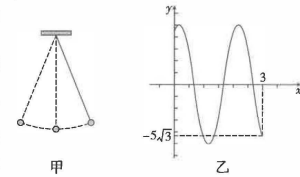


图1

直方向为平衡位置. 图乙表示该小球在 $[0, 3]$ 秒运动时的位移随时间变化情况. 根据秒表记录有: 当 $x = \frac{2}{3}$ 时, 小球第一次到平衡位置; 当 $x = \frac{7}{6}$ 时, 小球

的位移第一次到反向最大值. 根据以上图文信息, 下列选项中正确的是

- A. 频率为 $\frac{1}{2}$ B. 初相位 $\varphi = \frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$
C. 振幅 $A=10$ D. 当 $x = \frac{8}{3}$ 时, 小球第三次回到平衡位置

11. 关于方程 $C: (m-2)x^2 + (6-m)y^2 = 1$, 下列说法正确的有

- A. 当 $2 < m < 6$ 时, 方程 C 表示的曲线是椭圆
B. 当 $m=3$ 时, 方程 C 所表示的曲线上一点到直线 $l: x+y+2\sqrt{3}=0$ 距离的最大值为 $\frac{4\sqrt{6}}{3}$
C. 当 $m \in (-\infty, 2) \cup (6, +\infty)$ 时, 方程 C 表示的曲线是双曲线
D. 若方程 C 表示的曲线是椭圆, 则椭圆的离心率为 $\sqrt{\frac{8-2m}{6-m}}$

12. 三棱锥 $P-ABC$ 满足 $PA \perp$ 平面 ABC , $PA=AB=BC=\frac{\sqrt{2}}{2}AC=2$, D 是线段 PB 的中点, E 是底面

ABC (包括边界) 的一个动点, 球 O 是三棱锥 $P-ABC$ 的外接球, 下列说法正确的有

- A. 当 E 在线段 AB 上时, $PE \perp BC$
B. 若 F 是球 O 表面一个动点, 则 EF 的最大值为4
C. DE 的取值范围是 $[1, \sqrt{6}]$
D. 经过 DE 的平面截球 O 的截面面积最小值为 2π

三、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 在某次射击比赛中, 甲选手每次射击击中靶心的概率为 0.7, 他在同样的条件下连续射击 10 次, 若击中靶心得 2 分, 未击中靶心得 -1 分, 记得分为 X , 则 $E(X) =$ _____.
14. 甲、乙等五人去 A, B, C 三个城市交流学习, 每个人只能去一个城市, 每个城市至少去一人. 甲说“如果我有搭档, 那么搭档中必须有乙”, 则他们五人去交流学习的不同方式有 _____ 种.
15. 水以 $2\text{dm}^3/\text{分}$ 速率流入一个圆锥形容器. 该容器的形状是一个正圆锥, 底面水平, 顶点向下, 底面半径为 2dm, 圆锥的高为 3dm. 当水深为 1dm 时, 水面上升的速率为 _____ dm/分.
16. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=2$, 且 $\cos A + \cos B - \cos(A+B) = \frac{3}{2}$, 则三角形 ABC 的面积为 _____.

四、解答题 (共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分 10 分)

小强发现汽车急刹车的停车距离与诸多因素有关, 其中最为关键的两个因素是驾驶员的反应时间和汽车的行驶速度. 小强根据美国公路局公布的实验数据, 制作了汽车行驶速度 x (km/h) 和停车距离 y (m) 的表格.

x	40	50	60	70	80	90	100	110
y	17	26.5	35.8	46	52.7	70.8	85.4	101

- (1) 通过样本相关系数的值说明 x 和 y 的相关程度;
(2) 小强选择用一元线性回归分析这组数据, 请帮他求出回归方程 (保留两位小数).

参考数据: $\sum_{i=1}^8 y_i = 435.2$, $\sum_{i=1}^8 x_i y_i - 8\bar{x}\bar{y} = 4971$, $\sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x})^2 = 4200$, $\sqrt{\sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^8 (y_i - \bar{y})^2} \approx 5019.17$.

参考公式: 相关系数 $r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$; (若 $|r| \in [0.75, 1]$ 认为相关性很强; $|r| \in [0.3, 0.75]$ 认为相关性一般; $|r| \in [0, 0.25]$ 认为相关性较弱)

回归方程 $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$ 中斜率和截距最小二乘估计公式分别为 $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$, $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$.

18. (本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知 $\cos C = \frac{3}{4}$, 记 $\triangle ABC$ 的外接圆为圆 O , 半径 $|OC| = 2$.

- (1) 求 $\vec{AB} \cdot \vec{AO}$ 的值;
(2) $\angle ACB$ 的角平分线与直线 AB 交于点 D , 若 $4(\sin^2 A - \sin^2 B) = 3(a-b)\sin B$, 求 CD 的长.

19. (本小题满分 12 分)

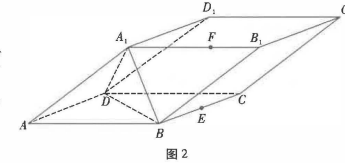
数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = 3a_n + 1 - 2n$, $a_1 = 2$, 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \frac{2n-1}{a_{n+2}-n}$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n .

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n ;
(2) 求证: $T_n < \frac{1}{3}$.

20. (本小题满分 12 分)

如图 2, 平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的所有棱长都相等, $\angle BAD = 60^\circ$, $\cos \angle BAA_1 = \cos \angle DAA_1 = \frac{3}{4}$, E 为棱 BC 的中点, F 在棱 A_1B_1 上运动, $\vec{A_1F} = \lambda \vec{A_1B_1}$.

- (1) 证明: 当 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时, $EF \parallel$ 平面 A_1BD ;
(2) 是否存在点 F , 使得直线 BF 与平面 ECD_1 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{14}$? 若存在, 求出 λ 的值; 若不存在, 请说明理由.



21. (本小题满分 12 分)

平面中有两个定圆, 圆 $F_1: (x+1)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$, 圆 $F_2: (x-1)^2 + y^2 = \frac{49}{4}$. 动圆 P 以点 P 为圆心, 且与圆 F_1 外切, 与圆 F_2 内切.

- (1) 求动圆圆心 P 的轨迹方程 C ;
(2) 已知动点 T 在直线 $x=4$ 上, 过 T 的两条直线分别与曲线 C 交于 A, B 两点和 D, E 两点, 且 $|TA| \cdot |TB| = |TD| \cdot |TE|$, 求直线 AB 的斜率与直线 DE 的斜率之和.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = x(e^x - a)$, $a \in [1, +\infty)$.

- (1) 当 $a=1$ 时, 求 $f(x)$ 的极值;
(2) 若 $\forall x > 0$, 不等式 $f(x) \geq \frac{1}{a} \ln x + 1$ 恒成立, 求 a 的取值集合.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：
www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线