

江西省上饶市六校 2023 届高三第二次联考

数学（文科）试题参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	B	C	D	D	C	C	D	A	C	B	A

13. 【答案】 $y=1$ 14. 【答案】 $\frac{2}{9}$ 15. 【答案】 $\frac{3}{5}$ 16. 【答案】 $-e$

第 16 题解析 $xe^x \geq -\frac{a \ln x}{x^a} = -a \ln x \cdot e^{-a \ln x}$, 构造函数 $f(x) = xe^x$, 显然 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 故 $f(x) \geq f(-a \ln x)$ 等价于 $x \geq -a \ln x$, 即 $a \geq -\frac{x}{\ln x}$ 任意的实数 $x > 1$ 恒成立.

令 $g(x) = \frac{x}{\ln x}$, $x > 1$ 则 $g'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$, 故 $g(x)$ 在 $(1, e)$ 上单调递减, 在 $(e, +\infty)$ 上单调

递增, $g(x)_{\min} = e$, 得 $a \geq \left(-\frac{x}{\ln x}\right)_{\max} = -e$. 故答案为: $-e$

17. 【答案】 (1) $a_n = 2n - 1$ (2) 4

(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 因为 a_1, a_2, a_5 成等比, 所以 $a_2^2 = a_1 a_5$, 即得

$a_1(a_1 + 4d) = (a_1 + d)^2$ 化简得 $2a_1 d = d^2$, 又因为 $d \neq 0$, 所以 $2a_1 = d$. 因为 $a_2, a_3 = a_8$, 所

以 $(a_1 + d)(a_1 + 2d) = a_1 + 7d$, 即得 $a_1^2 - a_1 = 0$ 解得 $a_1 = 0$ 或者 $a_1 = 1$ 4 分

当 $a_1 = 0$ 时, $d = 2a_1 = 0$ 不合题意舍;5 分

当 $a_1 = 1$ 时, $d = 2a_1 = 2$, 则 $a_n = 2n - 1$,6 分

(2) 因为 $\frac{1}{S_n - 1} = \frac{1}{n^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right)$ 7 分

当 $n \geq 2$ 时,

$$\begin{aligned} \frac{1}{S_2 - 1} + \frac{1}{S_3 - 1} + \frac{1}{S_4 - 1} + \dots + \frac{1}{S_n - 1} &= \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \end{aligned}$$

.....9 分



由题得 $\frac{1}{2}(\frac{3}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) \geq \frac{21}{40}$, 化简得 $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \leq \frac{9}{20}$

即 $9n^2 - 31n - 20 = (9n+5)(n-4) \geq 0$ 11 分

解得 $n \geq 4$, 故 n 的最小值为 412 分

18【答案】(1) 89.92, 88.96, A 配方的猪脚面的辣值的平均数大于 B 配方的猪脚面的辣值的平均数 (2) 0.33

【小问 1 详解】

A 配方售卖的猪脚面的辣值的平均数为

$$\frac{1}{100}(82 \times 10 + 86 \times 20 + 90 \times 42 + 94 \times 18 + 98 \times 10) = 89.92, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

B 配方售卖的猪脚面的辣值的平均数为

$$\frac{1}{100}(82 \times 18 + 86 \times 22 + 90 \times 38 + 94 \times 12 + 98 \times 10) = 88.96, \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

因为 $89.92 > 88.96$,

所以 A 配方的猪脚面的辣值的平均数大于 B 配方的猪脚面的辣值的平均数6 分

【小问 2 详解】

设“其评价 A 配方辣度指数比 B 配方辣度指数高”为事件 C .

记“其评价 A 配方的辣度指数为 4”为事件 A_1 , “其评价 A 配方的辣度指数为 5”为事件 A_2 ,

“其评价 B 配方的辣度指数为 3”为事件 B_0 , “其评价 B 配方的辣度指数为 4”为事件 B_1 ,

$$\text{则 } P(A_1) = \frac{42+18}{100} = 0.6, P(A_2) = \frac{10}{100} = 0.1,$$

$$P(B_0) = \frac{18+22}{100} = 0.4, P(B_1) = \frac{38+12}{100} = 0.5. \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

因为事件 A_i 与 B_j 相互独立, 其中 $i=1,2, j=0,1$,

$$\text{所以 } P(C) = P(A_1B_0 + A_2B_0 + A_2B_1) = P(A_1B_0) + P(A_2B_0) + P(A_2B_1)$$

$$= P(A_1)P(B_0) + P(A_2)P(B_0) + P(A_2)P(B_1) = 0.6 \times 0.4 + 0.1 \times 0.4 + 0.1 \times 0.5 = 0.33.$$

所以其评价 A 配方的辣度指数比 B 配方辣度指数高的概率为 0.3312 分

【答案】(1) 证明见解析; (2) $\frac{1}{6}$.

【详解】解: (1) 取 BC 的中点为 F , 连结 AF 、 EF ,



$\because BB_1 \perp \text{平面} ABC, AF \subset \text{平面} ABC, \therefore BB_1 \perp AF.$

$\because AB=AC=5, \therefore AF \perp BC,$

$\because BB_1 \cap BC = B, \therefore AF \perp \text{平面} BB_1C_1C,$

$\because AD \parallel BB_1, AD = \frac{1}{2}BB_1, EF \parallel BB_1, EF = \frac{1}{2}BB_1; \therefore \text{四边形} DEFA \text{为平行四边形},$

$\therefore DE \parallel AF, \therefore DE \perp \text{平面} BB_1C_1C. \dots\dots\dots 6 \text{分}$

(II) 由题可得 $DE = AF = 4,$

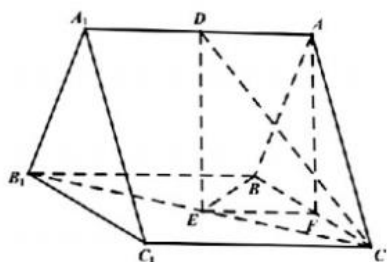
三棱锥 $D-EBC$ 的体积为 $\frac{1}{3}$ 乘以底面积乘高, 所以

$$V_{D-EBC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle BCE} \cdot DE = \frac{1}{3} \times \frac{6 \times 3}{2} \times 4 = 12.$$

直三棱柱的体积为底面积乘以高, 所以

$$V_{ABC-A_1B_1C_1} = S_{ABC} \cdot AA_1 = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 \times 6 = 72.$$

所以三棱锥 $D-EBC$ 的体积与三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 体积的比值为 $\frac{1}{6}. \dots\dots\dots 12 \text{分}$



20 【答案】

【小问1 详解】

$f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = 2ax - (a+2) + \frac{1}{x} = \frac{(ax-1)(2x-1)}{x} (a > 0),$

①当 $0 < \frac{1}{a} < \frac{1}{2}$, 即 $a > 2$ 时, $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{a}), (\frac{1}{2}, +\infty), f'(x) > 0, f(x)$ 递增. $f(x)$ 在 $(\frac{1}{a}, \frac{1}{2}), f'(x) < 0, f(x)$ 递减. $\dots\dots\dots 2 \text{分}$

②当 $\frac{1}{a} = \frac{1}{2}, a = 2$ 时, $f'(x) \geq 0, f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上递增. $\dots\dots\dots 3 \text{分}$

③当 $\frac{1}{a} > \frac{1}{2}$, 即 $0 < a < 2$ 时, $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2}), (\frac{1}{a}, +\infty)$ 上 $f'(x) > 0, f(x)$ 递增. $f(x)$

在 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{a})$ 上 $f'(x) < 0, f(x)$ 递减. $\dots\dots\dots 5 \text{分}$



综上所述, 当 $a > 2$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(0, \frac{1}{a}\right), \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$, 单调递减区间为 $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{2}\right)$

当 $a = 2$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, +\infty)$.

当 $0 < a < 2$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(0, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$, 单调递减区间为 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{a}\right)$...6 分

【小问 2 详解】

当 $a = 0$ 时, 由 $f(x) < e^x - 2x - 2$ 化简得 $e^x - \ln x - 2 > 0$,

构造函数 $h(x) = e^x - \ln x - 2 (x > 0)$,8 分

$h'(x) = e^x - \frac{1}{x}, h''(x) = e^x + \frac{1}{x^2} > 0$, $h'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上递增,

$h'\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e} - 2 < 0, h'(1) = e - 1 > 0$,

故存在 $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, 使得 $h'(x_0) = 0$, 即 $e^{x_0} = \frac{1}{x_0}$.

当 $x \in (0, x_0)$ 时, $h'(x) < 0, h(x)$ 递减;

当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $h'(x) > 0, h(x)$ 递增.

所以 $x = x_0$ 时 $h(x)$ 取得极小值, 也即是最小值.9 分

$h(x_0) = e^{x_0} - \ln x_0 - 2 = \frac{1}{x_0} - \ln \frac{1}{e^{x_0}} - 2 = \frac{1}{x_0} + x_0 - 2 > 2\sqrt{\frac{1}{x_0} \cdot x_0} - 2 = 0$,11 分

所以 $h(x) = e^x - \ln x - 2 > 0$, 故 $f(x) < e^x - 2x - 2$12 分

21 【答案】(1) $2\sqrt{30}$; (2) $\frac{9}{4}$.

【小问 1 详解】

解法一: 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, $y_1 < 0, y_2 > 0$,

由 $y^2 = 2x$, 可得 $y = \pm\sqrt{2x}$,

所以 $y' = \frac{1}{y}$, 直线 BA 的斜率 $k_{BA} = \frac{1}{y_1}$,2 分



直线 PA : $y - y_1 = \frac{1}{y_1}(x - x_1)$, 又 $\because P(-1, -2)$ 在 PA 上,

$$-2 - y_1 = \frac{1}{y_1}(-1 - x_1) \Leftrightarrow y_1 = \frac{1}{2}(1 - x_1),$$

$$\text{所以} \begin{cases} y_1^2 = 2x_1 \\ y_1 = \frac{1}{2}(1 - x_1) \end{cases}, \text{又 } y_1 < 0, \text{ 所以 } y_1 = -2 - \sqrt{6},$$

同理可得 $y_2 = -2 + \sqrt{6}$,4 分

$$\therefore y_1 - y_2 = -2\sqrt{6}, x_1 - x_2 = -2(y_1 - y_2) = 4\sqrt{6},$$

$$\therefore |AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(4\sqrt{6})^2 + (-2\sqrt{6})^2} = 2\sqrt{30}; \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

解法二: 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, $y_1 < 0, y_2 > 0$, 由 $y^2 = 2x$, 可得 $y = \pm\sqrt{2x}$,

所以 $y' = \frac{1}{y}$, 直线 PA 的斜率 $k_{PA} = \frac{1}{y_1}$, 直线 PA : $y - y_1 = \frac{1}{y_1}(x - x_1)$, 又 $\because P(-1, -2)$ 在

PA 上, 故 $-2 - y_1 = \frac{1}{y_1}(-1 - x_1)$, 即 $-2y_1 - y_1^2 = -1 - x_1$,

因为 $y_1^2 = 2x_1$, 所以 $x_1 = -2y_1 + 1$, 同理可得 $x_2 = -2y_2 + 1$,

故直线 AB 的方程为 $x = -2y + 1$,3 分

$$\text{联立} \begin{cases} y^2 = 2x \\ x = -2y + 1 \end{cases} \text{ 消去 } x, \text{ 得 } y^2 + 4y - 2 = 0, \text{ 故 } y_1 + y_2 = -4, y_1 \cdot y_2 = -2,$$

$$\text{故 } |AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1y_2} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{24} = 2\sqrt{30} \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

小问 2 详解】

设 $C(x_3, y_3)$, 由条件知 $y_1 + y_2 + y_3 = 0$,

$$\therefore \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle BMN}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin \angle ABC}{\frac{1}{2} \cdot BM \cdot BN \cdot \sin \angle MBN} = \frac{AB}{BM} \cdot \frac{BC}{BN} = \left(1 + \frac{AM}{BM}\right) \cdot \left(1 + \frac{CN}{BN}\right) \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$= \left(1 - \frac{y_1}{y_2}\right) \left(1 - \frac{y_3}{y_2}\right) = 1 - \frac{y_1 + y_3}{y_2} + \frac{y_1 \cdot y_3}{y_2^2} \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$



$$= 2 + \frac{y_1 \cdot y_3}{y_2^2} = 2 + \frac{y_1(-y_1 - y_2)}{y_2^2} = 2 + \frac{-y_1^2 - y_1 y_2}{y_2^2}$$

$$= -\left(\frac{y_1}{y_2}\right)^2 - \left(\frac{y_1}{y_2}\right) + 2 = -\left(\frac{y_1}{y_2} + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}, \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\because 3|AM| < 2|BM| \quad \therefore \frac{|AM|}{|BM|} = -\frac{y_1}{y_2} < \frac{2}{3}, \quad -\frac{2}{3} < \frac{y_1}{y_2} < 0$$

$$\therefore \text{当 } \frac{y_1}{y_2} = -\frac{1}{2} \text{ 时, } \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle BMN}} \text{ 取得最大值 } \frac{9}{4}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

22. (1) $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$, $x+y-4\sqrt{2}=0$. (2) $\sqrt{2}$.

【详解】(1) 解: 因为 $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$,

所以由 $\rho = 2\sqrt{2} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$ 可得, $\rho^2 = 2\sqrt{2} \rho \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = 2\rho \sin \theta + 2\rho \cos \theta$,

化为普通方程为, $x^2 + y^2 = 2x + 2y$, 即 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$. $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

由 $\rho \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = 4$ 可得, $\frac{\sqrt{2}}{2} \rho \sin \theta + \frac{\sqrt{2}}{2} \rho \cos \theta = 4$, 由 $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$,

可得 $x + y - 4\sqrt{2} = 0$. $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(2) 解: 将 $\theta = \alpha$ 代入圆 C 和直线 l 的极坐标方程可得 $\rho_1 = 2\sqrt{2} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$,

$\rho_2 \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = 4$, 所以 $\rho_2 = \frac{4}{\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)}$,

则 $|OP| = \rho_1 = 2\sqrt{2} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$, $|OQ| = \rho_2 = \frac{4}{\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)}$, $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

所以 $\frac{|OP|}{|OQ|} = \frac{2\sqrt{2} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)}{\frac{4}{\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin^2\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1 - \cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} (1 + \sin 2\alpha)$

$\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

因为 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 所以 $2\alpha \in (0, \pi)$,

当 $2\alpha = \frac{\pi}{2}$, 即 $\alpha = \frac{\pi}{4}$ 时, $\frac{|OP|}{|OQ|} = \frac{\sqrt{2}}{4} (1 + \sin 2\alpha)$ 有最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 此时 $\frac{|OQ|}{|OP|}$ 有最小值 $\sqrt{2}$

$\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$



23 【答案】(1) $\{x|-6 \leq x \leq 1\}$; (2) $a \geq \frac{1}{30}$ 或 $a \leq -\frac{1}{30}$ 或 $a \geq \frac{1}{15}$.

【详解】解: (I) 原不等式为 $|x+1|+|x+4| \leq 7$,

当 $x \leq -4$ 时, 得 $-x-1-x-4 \leq 7$, 得 $x \geq -6$,

所以 $-6 \leq x \leq -4$2 分

当 $-4 < x \leq -1$ 时, 得 $-x-1+x+4 \leq 7$ 成立,

所以 $-4 < x \leq -1$3 分

当 $x > -1$ 时, $x+1+x+4 \leq 7$,

所以 $-1 < x \leq 1$4 分

综上得不等式的解集为 $\{x|-6 \leq x \leq 1\}$5 分

(II) 因为 m, n 为正实数, 并且

$$\frac{m^2+n}{mn} = \frac{m}{n} + \frac{1}{m} = \frac{m}{n} + \frac{6m+4n}{m} = 6 + \frac{m}{n} + \frac{4n}{m} \geq 6 + 2\sqrt{\frac{m}{n} \cdot \frac{4n}{m}} = 10 \text{6 分}$$

, 当且仅当 $\frac{m}{n} = \frac{4n}{m}$ 时取等号, 当 $m = \frac{1}{8}, n = \frac{1}{16}$ 时等号成立,

所以 $\frac{mn}{m^2+n}$ 的最大值 $\frac{1}{10}$8 分

又因为 $f(x) \geq |x+4a-(x+a)| = |3a|$, 当 $x = -a$ 时取到等号, 要使 $f(x) \geq \frac{mn}{m^2+n}$ 恒成立,

只需 $|3a| \geq \frac{1}{10}$. 所以 $a \geq \frac{1}{30}$ 或 $a \leq -\frac{1}{30}$10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线



自主选拔在线
微信号：zizzsw



自主选拔在线
微信号：zizzsw



自主选拔在线
微信号：zizzsw