★启用前注意保密

2022年普通高等学校招生全国统一考试模拟测试（二）

数　学

本试卷共6页，22小题，满分150分。考试用时120分钟。

注意事项：1. 答卷前，考生务必将自己所在的市（县、区）、学校、班级、姓名、考场号、座位号和考生号填写在答题卡上，将条形码横贴在每张答题卡右上角“条形码粘贴处”。

2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔在答题卡上将对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试卷上。

3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。

4. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $M=\{x\mid x(x-2)<0\}$，$N=\{x\mid x-1<0\}$，则 $M\cap N=$

A. $(-\infty,2)$　　B. $(-\infty,1)$

C. $(0,1)$　　D. $(1,2)$

2. 定义在 $[-2,2]$ 上的下列函数中，既是奇函数，又是增函数的是

A. $y=\sin x$　　B. $y=-2x$

C. $y=e^{|x|}$　　D. $y=2x^3$

3. 已知随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，若 $P(\mu\leqslant X\leqslant\mu+1)=0.2$，则 $P(X>\mu-1)=$

A. 0.7　　B. 0.4

C. 0.3　　D. 0.2

4. 某校安排高一年级（1）～（5）班共5个班去A，B，C，D四个劳动教育基地进行社会实践，每个班去一个基地，每个基地至少安排一个班，则高一（1）班被安排到A基地的排法总数为

A. 24　　B. 36

C. 60　　D. 240

5. 若函数 $y=\sqrt{6}\sin\omega x$ 与 $y=\sqrt{6}\cos\omega x$ 图象的任意连续三个交点构成边长为4的等边三角形，则正实数 $\omega=$

A. $\frac{1}{2}$　　B. 1

C. $\frac{\pi}{2}$　　D. π

6. 赵爽弦图（如图1）中的大正方形是由4个全等的直角三角形和中间的小正方形拼接而成的，若直角三角形的两条直角边长为 a，b，斜边长为 c，由大正方形面积等于4个直角三角形的面积与中间小正方形的面积之和可得勾股定理 $a^2+b^2=c^2$．仿照赵爽弦图构造如图2所示的菱形，它是由两对全等的直角三角形和中间的矩形拼接而成的，设直角三角形的斜边都为1，其中一对直角三角形含有锐角 α，另一对直角三角形含有锐角 β（位置如图2所示）．借鉴勾股定理的推导思路可以得到结论

A．$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$　　B．$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

C．$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$　　D．$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

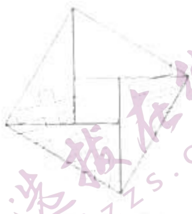


图1

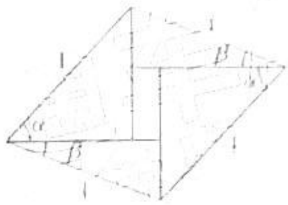


图2

7. 已知抛物线 E：$y^2=4x$，圆 F：$(x-1)^2+y^2=4$，直线 l：$y=t$（t 为实数）与抛物线 E 交于点 A，与圆 F 交于 B，C 两点，且点 B 位于点 C 的右侧，则 $\triangle FAB$ 的周长可能为

A．4　　B．5　　C．6　　D．7

8. 存在函数 $f(x)$ 使得对于 $\forall x\in\mathbf{R}$ 都有 $f(g(x))=|x|$，则函数 $g(x)$ 可能为

A．$g(x)=\sin x$　　B．$g(x)=x^2+2x$

C．$g(x)=x^3-x$　　D．$g(x)=e^x+e^{-x}$

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分

9. 已知复数 z 的共轭复数是 $\bar{z}$，$(1-i)z=1+i$，i 是虚数单位，则下列结论正确的是

A．$z^{2022}=1$

B．$z\cdot\bar{z}$ 的虚部是0

C．$|z\cdot\bar{z}+2z|=\sqrt{5}$

D．$z\cdot\bar{z}+2z$ 在复平面内对应的点在第四象限

10. 吹气球时，记气球的半径 r 与体积 V 之间的函数关系为 $r(V)$，$r'(V)$ 为 $r(V)$ 的导函数．已知 $r(V)$ 在 $0\leqslant V\leqslant 3$ 上的图象如图3所示，若 $0\leqslant V_1<V_2\leqslant 3$，则下列结论正确的是

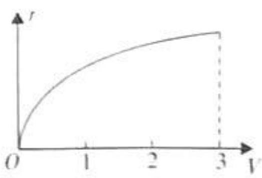


图3

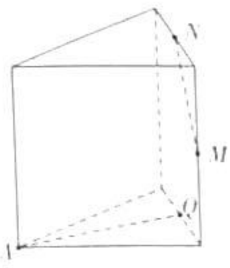
A．$\dfrac{r(1)-r(0)}{1-0}<\dfrac{r(2)-r(1)}{2-1}$

B．$r'(1)>r'(2)$

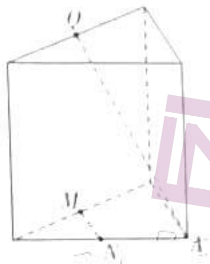
C．$r\left(\dfrac{V_1+V_2}{2}\right)<\dfrac{r(V_1)+r(V_2)}{2}$

D．存在 $V_0\in(V_1,V_2)$，使得 $r'(V_0)=\dfrac{r(V_2)-r(V_1)}{V_2-V_1}$

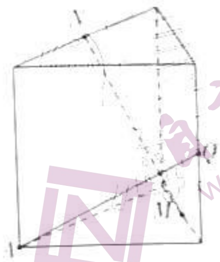
11. 在所有棱长都相等的正三棱柱中，点 A 是三棱柱的顶点，M，N，Q 是所在棱的中点，则下列选项中直线 AQ 与直线 MN 垂直的是



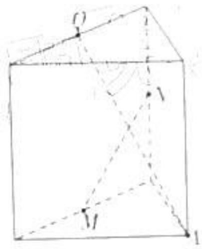
A



B



C



D

12. 如图 4，已知扇形 OAB 的半径为 1，$\angle AOB=\frac{\pi}{2}$，点 C，D 分别为线段 OA，OB 上的动点，且 $CD=1$，点 E 为 $\overset{\frown}{AB}$ 上的任意一点，则下列结论正确的是

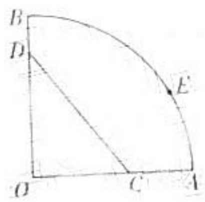


图 4

A. $\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{AB}$ 的最小值为 0

B. $\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EB}$ 的最小值为 $1-\sqrt{2}$

C. $\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{ED}$ 的最大值为 1

D. $\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{ED}$ 的最小值为 0

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$，则 C 的离心率为________。

14. 若直线 $y=x+a$ 和直线 $y=x+b$ 将圆 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 的周长四等分，则 $|a-b|=$________。

15. 若函数 $f(x)=\sin x\cdot\cos(x+\varphi)$ 的最大值为 1，则常数 φ 的一个取值为________。

16. 十字贯穿体（如图5）是美术素描学习中一种常见的教具．如图6，该十字贯穿体由两个全等的正四棱柱组合而成，且两个四棱柱的侧棱互相垂直．若底面正方形边长为2，则这两个正四棱柱公共部分所构成的几何体的内切球的体积为____．

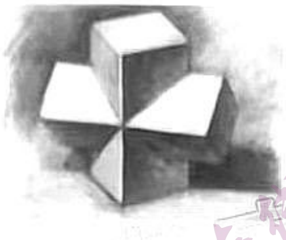


图5


图6

四、解答题：本题共6小题，共70分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

17.（10分）

已知递增等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且满足$4a_2 = a_1a_3$，$S_3 = 14$．

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式．

（2）若数列$\{b_n\}$满足$b_n = \begin{cases} a_k, & n = 3k, \\ k, & 3(k-1) < n < 3k \end{cases}$（$k \in \mathbf{N}^*$），求数列$\{b_n\}$的前15项和．

18.（12分）

小李下班后驾车回家的路线有两条．路线1经过三个红绿灯路口，每个路口遇到红灯的概率都是$\frac{1}{3}$；路线2经过两个红绿灯路口，第一个路口遇到红灯的概率是$\frac{1}{2}$，第二个路口遇到红灯的概率是$\frac{2}{3}$．假设两条路线全程绿灯时的驾车回家时长相同，且每个红绿灯路口是否遇到红灯相互独立．

（1）若小李下班后选择路线1驾车回家，求至少遇到一个红灯的概率．

（2）假设每遇到一个红灯驾车回家时长就会增加1 min，为使小李下班后驾车回家时长的累计增加时间（单位：min）的期望最小，小李应选择哪条路线？请说明理由．

19. (12 分)

如图 7，已知$\triangle ABC$内有一点 P，满足$\angle PAB=\angle PBC=\angle PCA=\alpha$.

(1) 证明：$PB\sin\angle ABC=AB\sin\alpha$.

(2) 若$\angle ABC=90^\circ$，$AB=BC=1$，求 PC.

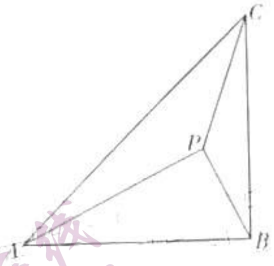


图 7

20. (12 分)

如图 8，在$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90^\circ$，DE 是$\triangle ABC$的中位线，沿 DE 将$\triangle ADE$进行翻折，使得$\triangle ACE$是等边三角形（如图 9），记 AB 的中点为 F.

(1) 证明：$DF\perp$平面 ABC.

(2) 若 $AE=2$，二面角 $D-AC-E$ 为$\frac{\pi}{6}$，求直线 AB 与平面 ACD 所成角的正弦值.

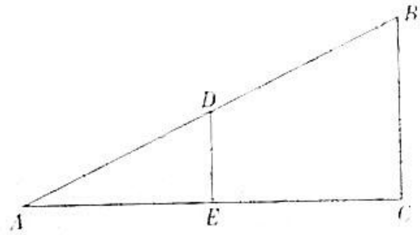


图 8

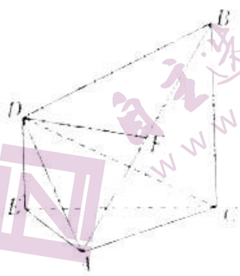


图 9

21. (12 分)

已知椭圆 C: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，点 $F(1,0)$ 为椭圆的右焦点，过点 F 且斜率不为 0 的直线 l_1 交椭圆于 M，N 两点，当 l_1 与 x 轴垂直时，$|MN|=3$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程.

(2) A_1，A_2 分别为椭圆的左、右顶点，直线 A_1M，A_2N 分别与直线 l_2: $x=1$ 交于 P，Q 两点，证明：四边形 OPA_2Q 为菱形.

22. (12 分)

已知函数 $f(x)=xe^{nx}-nx(n\in\mathbf{N}^*$ 且 $n\geqslant2)$ 的图象与 x 轴交于 P，Q 两点，且点 P 在点 Q 的左侧.

(1) 求点 P 处的切线方程 $y=g(x)$，并证明：$x\geqslant0$ 时，$f(x)\geqslant g(x)$.

(2) 若关于 x 的方程 $f(x)=t$（t 为实数）有两个正实根 x_1，x_2，证明：$|x_2-x_1|<\frac{2t}{n\ln n}+\frac{\ln n}{n}$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。